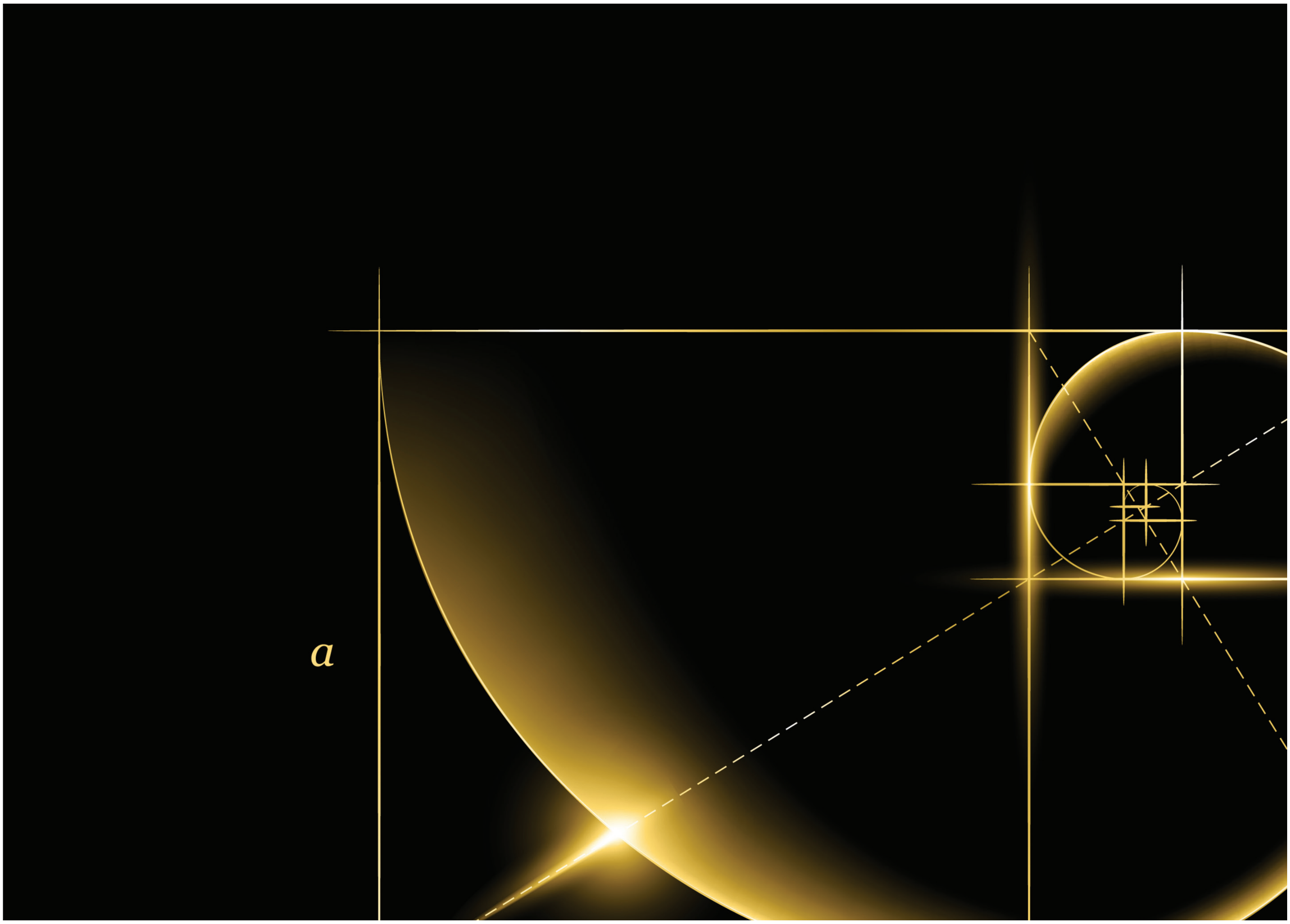
YAZ OKULU

MATEMATİK DERGİSİ



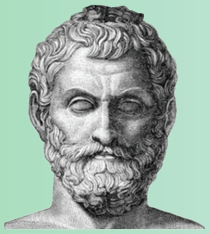
T.C. MİLLÎ EĞİTİM
BAKANLIĞI

Milli Eğitim Bakanlığı
Ortaöğretim Genel Müdürlüğü
Yaz Okulu Matematik Dergisi

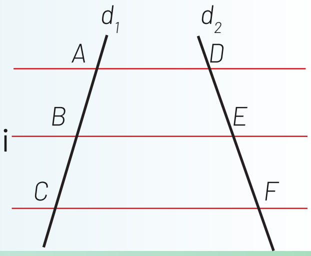
TÜRKİYE CUMHURİYETİ MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI

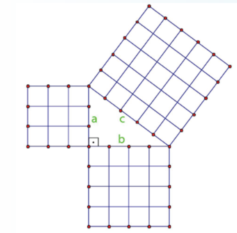
ORTAÖĞRETİM
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

İçindekiler



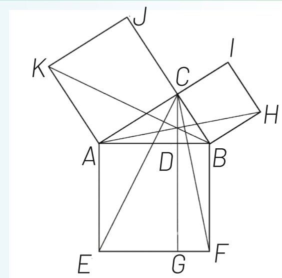
THALES (MÖ 625-550)
Yunan matematikçi Thales (Tales), matematiksel ispatı geometride kullanan ilk kişidir. Bir Güneş tutulmasını önceden tahmin ederek bilimsel üne kavuşan Thales, kendi adıyla anılan “Tales teoremi”ni ortaya koymuştur.

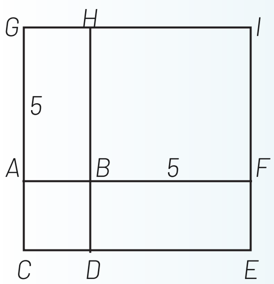




PYTHAGORAS (MÖ 572-497)
Samoslu Pythagoras (Pisagor) Yunan bir matematikçidir. Sayılar teorisi ve geometri alanlarında çalışmalar yapan Pythagoras kendi adıyla anılan “Pisagor teoremi” ile tanınmaktadır.

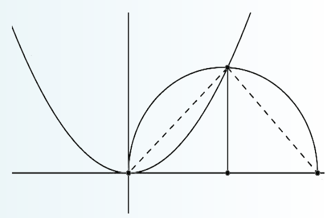
EUCLID (MÖ 330-275)
Yunan matematikçi Euclid’in (Öklid), “Elementler” adlı eseri tarih boyunca matematikçiler için en önemli kaynak kitap olmuştur. Modern anlamda matematiksel ispat kavramını tanıtan bu eser, Euclid’in kendi adıyla anılan geometrisi ile ilgili önermeleri de içermektedir.

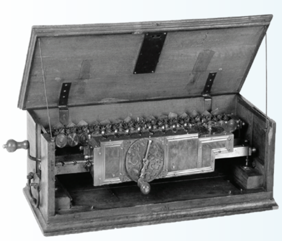




HÂREZMÎ (780-847)
İranlı matematikçi Hârezmî, sayı sisteminin ilk şeklini Hindistan’dan alarak Arap sayı sistemini geliştirmiş ve bu sistem, küçük değişiklikler geçirerek günümüzde kullanılan sayılara dönüşmüştür. Hârezmî, cebir alanında yaptığı çalışmaları “Al Kitab Fi Hisab al Cabr val Muqaballah” adlı kitabında toplamıştır.

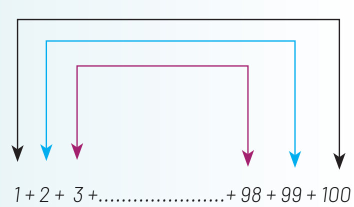
ÖMER HAYYÂM (1048-1131)
İranlı matematikçi Ömer Hayyâm, denklemlere geometrik çözümler üretmiş ve üçüncü dereceden denklemleri sınıflandırarak çözmüştür. Astronomi alanında yaptığı gözlemler sonucunda güneş yılına dayalı takvimi düzenlemiştir.





LEIBNIZ (1646-1716)
Alman matematikçi Leibniz (Laybnız), analiz alanında çok önemli araştırmalar yapmıştır. Dijital bilgisayarların temelinde yer alan ikili sayı sistemini geliştirmiş ve mekanik hesap makinelerini icat etmiştir.

GAUSS (1777-1855)
Alman matematikçi Gauss (Gaus), henüz ilkokuldayken 1’den 100’e kadar olan doğal sayıları toplayabilmenin kolay bir yolunu bulmuştur. Sayılar teorisi, cebir, istatistik ve geometri alanlarında önemli çalışmalar yapmıştır.



Kaynakça:
Baki A., Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi, Harf Eğitim Yayıncılığı, 2008

ARAŞTIRMA SORULARI

1. Matematiğe yön veren bilim insanlarının ortak özellikleri neler olabilir? Bu bilim insanları, çalışma hayatlarında karşılaştıkları matematiksel zorluklarla nasıl başa çıkmış olabilirler? Onları bu kadar önemli yapan nedir?

2. Ömer Hayyâm'ın $x^3 + a^2x = b$ kübik denkleminin çözümüne ilişkin geliştirdiği geometrik bakış açısını araştırınız.

3. Cahit Arf'ın matematik literatürüne katkılarını araştırınız. Arf'ın "Matematik esas olarak sabır olayıdır, onu ezberleyerek değil keşfederek anlamak gerekir." sözünü açıklayınız. Yakın tarihte matematik bilimine önemli katkılar yapan Türk matematikçiler kimlerdir?

4. Abel Ödülü nedir ve kimlere verilir? Son 10 yılda bilim insanları bu ödülü hangi çalışmaları sonucunda almıştır?

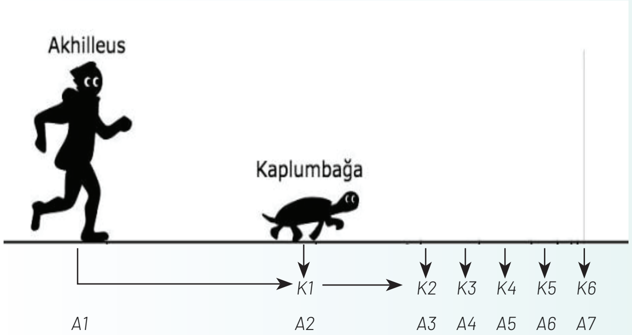
“Ben her zaman yalan söylerim.”

diyen bir kişi doğru söylüyor olabilir mi?
Bazı durumlarda karşılaştığımız ifadelerin doğruluk ya da yanlışlığı bizi çelişkiye götürebilir ve bu konuda akıl yürütürken zorlanabiliriz. Bu tür ifadeler paradoks olarak adlandırılır. Paradokslar, kendisi ile doğruluğu çelişen ve düşüncede sonsuz bir çevrime yol açan ifadelerdir.
Paradokslar, hem merak uyandırır hem de kişiyi düşünsel olarak yanılgıya düşürür. Bu açıdan bakıldığında paradokslar muhakeme becerimiz açısından da önemlidir.

Paradokslar, felsefe ve mantık alanlarında karşımıza çıkar ve matematiksel bazı ifadelerde de bizi düşündürür. Tarih boyunca ortaya çıkan ünlü paradokslardan bazılarını inceleyelim.

Protagoras Paradoksu

Filozof Protagoras’tan hukuk dersi almak isteyen Euthalos’un Protagoras’a ödeme yapacak gücü yoktur. Bu sebeple şöyle bir anlaşma yaparlar:
Protagoras eğitim için ücret almayacak, Euthalos da eğitimi bittikten sonra kazandığı ilk davanın parasını Protagoras’a verecektir. Fakat eğitim bittikten sonra genç avukat para ödememek için bir süre hiç dava almaz. Bu duruma daha fazla sabredemeyen Protagoras ücretinin ödenmesi için Euthalos’a dava açar.
Protagoras, dava sonunda parasını alacağını düşünmektedir:
Davayı kaybederse Euthalos davayı kazandığı için anlaşma gereği parasını alacaktır, davayı kazanırsa Euthalos davayı kaybettiği için yasal olarak borcunu ödemek zorundadır.
Euthalos aksini düşünmektedir:
Davayı kazanırsa yasal olarak borcunu ödemek zorunda kalmayacaktır, davayı kaybederse anlaşma gereği borcunu ödemesine gerek yoktur.
Sizce bu davayı kim kazanır?



Zeno'nun Kaplumbağa Paradoksu

Yunan mitolojisi kahramanı Akhilleus (Aşil) ile kaplumbağa yarış yapacaklardır. Akhilleus, iyi bir koşucu olduğu için kaplumbağanın yarışa kendisinden daha öndeki bir noktadan başlamasına izin verir. Akhilleus'in başlangıç noktasını A1, kaplumbağanın başlangıç noktasını K1 olarak adlandıralım. Akhilleus ilerleyip K1 (A2) noktasına geldiğinde, kaplumbağa bir K2 noktasına ilerlemiş olacaktır. Akhilleus K2 (A3) noktasına geldiğinde kaplumbağa K3 noktasına gelecek ve bu işlem sürekli olarak sayı doğrusunda devam edecektir.
Sizce Akhilleus kaplumbağayı yakalayabilir mi ?

Cantor Paradoksu

Γ tüm kümelerin kümesi olmak üzere

$$\Gamma = \{x : x = x\}$$

şeklinde formüle edilebilir. Γ nın en büyük küme olduğu açıktır. Γ nın alt kümelerinin kümesi de bir kümedir ve eleman sayısı 2^{Γ} olur. Bu durumda Γ nın alt kümelerinin kümesinin kardinalitesi kesin olarak Γ nın kardinalitesinden büyüktür.
Sizce Γ en büyük küme midir?

Russell Paradoksu

Kendisini eleman olarak içermeyen tüm kümelerin kümesi A olmak üzere

$$A = \{x : x \notin x\}$$

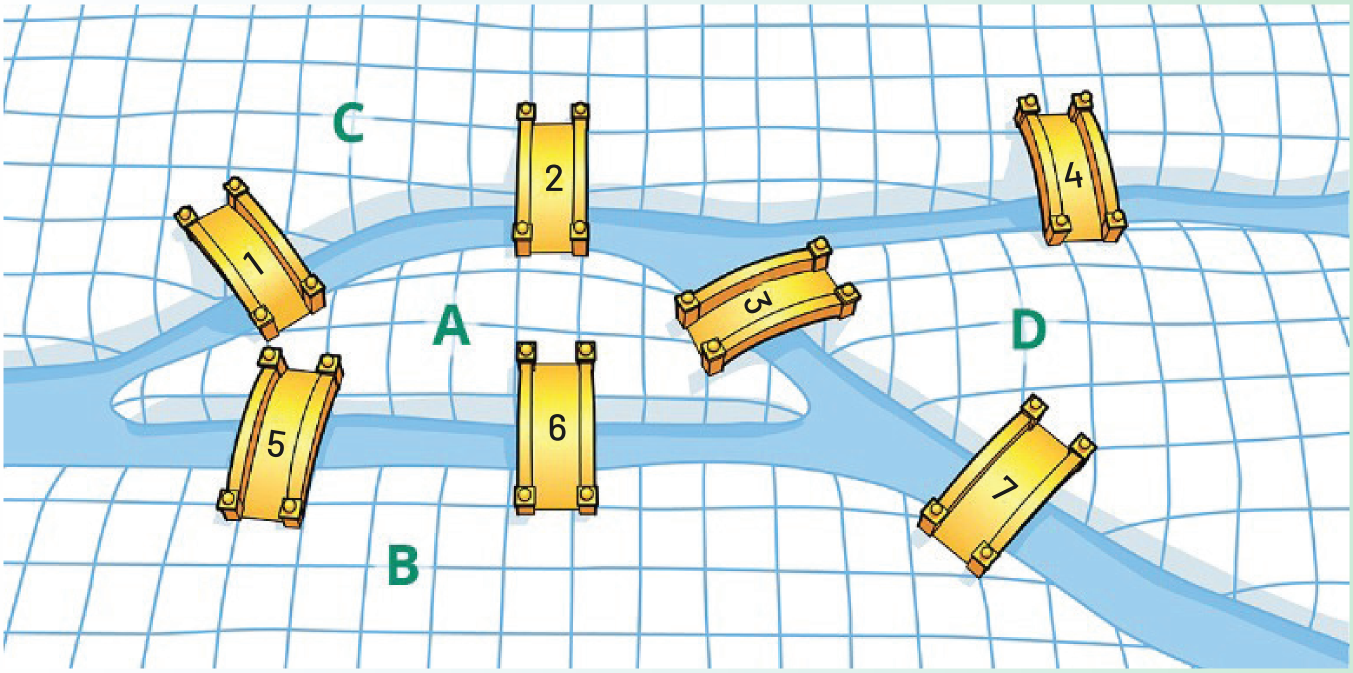
şeklinde formüle edilebilir. Görüldüğü üzere A kümesinin elemanları iyi tanımlanmıştır.
A kümesi, kendisini eleman olarak içerdiğinden A'nın elemanı olamaz. Öte yandan A kümesi kendisinin elemanı değilse A kümesinin tanımını kullanarak kendisinin elemanı olduğu sonucuna varırız.
Sizce A kümesi kendisinin elemanı mıdır?

Kaynakça:
Pappas T., Daha Eğlenceli Matematik, Doruk Yayımcılık, Ankara, 2006
Bilgin Z.; "Çağdaş Matematiğin Temeli Olarak Kümeler Kuramı", Kutadgubilig Felsefe-Bilim Araştırmaları, Eylül 2018, Sayı 38, s. 257-281.
https://bilimgenc.tubitak.gov.tr/makale/paradoksal-durumlar

ARAŞTIRMA SORULARI

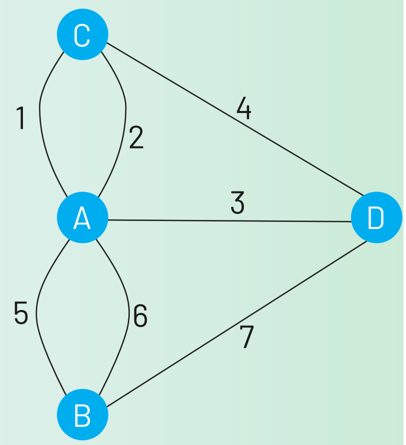
1. Tarihteki ünlü paradoksları araştırınız. Hangi paradoks sizin ilginizi daha çok çekti? Neden?

2. Günlük hayatta paradoks içeren cümleler veya olaylarla karşılaşabilir miyiz? Paradoks içeren cümleler veya olaylar kurgulayınız. Karşılaştığınız veya kurguladığınız durumların neden paradoks olduğunu açıklayınız.



Königsberg (Kaliningrad) şehrinin dört bölgesini birbirine bağlayan Pregel Nehri'nin üzerinde yedi köprü bulunmaktadır. Ünlü matematikçi Leonhard Euler (Lionard Oila), "Königsberg'de yedi köprünün her birinden sadece birer kez geçilip tüm bölgeler dolaşılarak başlangıç bölgesine ulaşılmasını sağlayan bir rota oluşturulabilir mi?" sorusunu gözlemleri sonucu ortaya çıkarmış ve bu soru matematikte yepyeni bir alanın ortaya çıkışında öncü olmuştur.

Euler, problemin çözümüne her çizginin bir köprüyü ve her düğümün köprünün bulunduğu bölgeyi temsil ettiği bir çizge oluşturarak başlamıştır. Her bir düğümde bulunan çizgi sayısına düğüm derecesi adını veren Euler, çizgeleri düğüm derecesinin tek ve çift olma durumuna göre sınıflandırarak çizgelerin çizilebilirliklerini belirlemiştir.

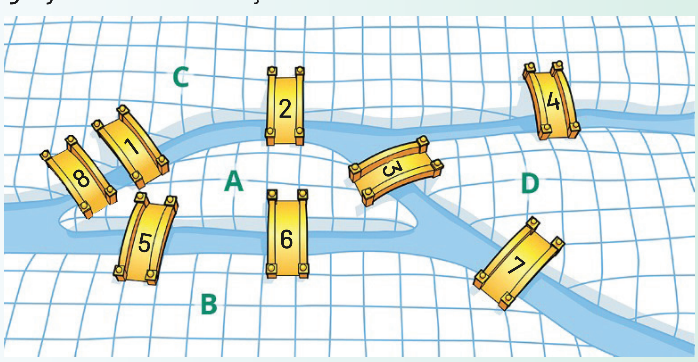


Euler'in Königsberg'in yedi köprüsü problemi için oluşturduğu yukarıdaki çizgede B, C ve D düğümlerinin derecesi 3; A düğümünün derecesi ise 5'tir.

Bunun sonucunda Euler, Köninsberg'de böyle bir rota oluşturmanın mümkün olmadığını kanıtlamıştır. Bu tür bir rota oluşturmayı mümkün kılacak çizgelerin aşağıdaki özelliklere sahip olmaları gerektiğini de ortaya koymuştur.

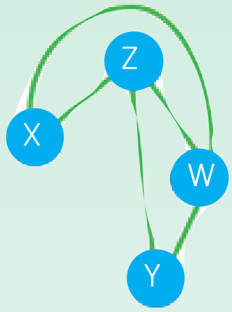
Çizge tek dereceli düğüm (tek sayıda çizgeye sahip köşe) içeriyorsa bu düğümlerin sayısı 2 olmalıdır. Bu düğümler rotanın başlangıç ve bitiş düğümleridir. Ancak çizgede tek dereceli düğümler yoksa rota herhangi bir düğümden başlanarak oluşturulabilir.

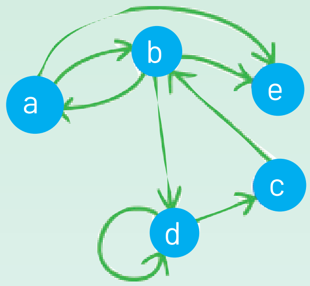
Königsberg'in yedi köprüsü probleminde oluşturulan çizgede düğümlerin dördünün de derecesi tektir. Bundan dolayı köprünün her birinden sadece birer kez geçilip tüm bölgeler dolaşılarak başlangıç bölgesine ulaşılmasını sağlayan bir rota oluşturulamaz.



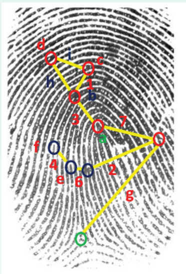
19. yüzyılın sonlarında bölgeye 8. köprü inşa edilmiştir. Sizce 8. köprünün eklenmesi bu problemin çözümünü mümkün kılmış mıdır?

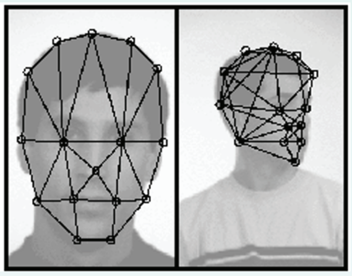
Königsberg'in yedi köprüsü probleminin çözümü çizge kuramının temelini oluşturmuş ve daha sonra bu kuramın çeşitli alt dalları doğmuştur. Birçok çizge uygulamasında çizgilerin uzunluklarının veya yönlerinin önemli olmadığı görülmektedir. Çizge, sadece iki düğümün ilişkili olduğunu gösterir. Ancak bazı durumlarda yönlerin belirtilmesi daha karmaşık problemlerin çözülmesini sağlar.





Günlük hayatta karşılaşılan çok katmanlı bazı problemler, doğrusal yöntemlerle değil sistemin analiz edilmesini sağlayan çizge kuramı ile çözülebilir. Çizge kuramı; tıp, mühendislik, ekonomi, ticaret gibi birçok alanda uygulaması olan kapsamlı bir konudur. Örneğin parmak izi tespiti ve yüz tanıma gibi biyometrik veri incelemelerinde çizge kuramından yararlanılmaktadır.
Gerçek yaşamdaki bir problemi fark ettiğinizde tıpkı Euler gibi yepyeni bir matematik alanı oluşturabilirsiniz. Aklınıza hangi problemler geliyor?



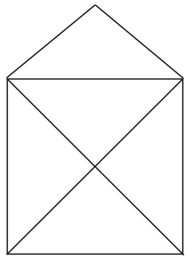


Kaynakça:
https://bilimgenc.tubitak.gov.tr/makale/cizge-kurami-ile-biyometrik-veriyi-nasil-isleriz
https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/leonard-eulers-solution-to-the-konigsberg-bridge-problem
https://bilimteknik.tubitak.gov.tr/system/files/makale/cizge.pdf
Baki A., Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi, Harf Eğitim Yayıncılığı, 2008

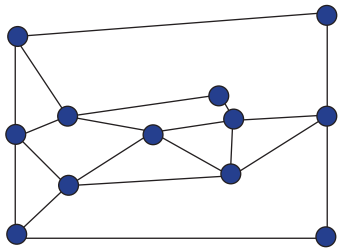
ARAŞTIRMA SORULARI

1. Yandaki şekil ile ilgili "Elinizi kaldırmadan ve her çizginin üzerinden bir kez geçerek bu şekli çizebilir misiniz?" sorusuyla önceki yıllarda büyük ihtimalle karşılaşmışsınızdır.

   Bu soru çizge teoremi kullanılarak da çözülebilir. Çizgilerin kesişim noktalarını düğüm olarak düşünün. Her düğümün derecelerini bulun ve çözümü araştırın.



2. Bir araç, yandaki şekilde nokta ile belirtilen, her sokaktan birer kez geçip tüm sokaklara uğrayarak başladığı yere ulaşabilir mi?



3. Euler'dan başka çizge problemleri üzerinde çalışan matematikçi var mıdır? Araştırınız.

Her gün yüz binlerce kişi, çevrim içi alışveriş yapmakta ve kart bilgilerini alışveriş sitelerine kaydetmektedir. Peki, bu kart bilgileri dijital korsanlardan nasıl korunuyor olabilir?
Şifre bilimi olarak bilinen kriptoloji, Yunanca kryptos (gizli dünya) ve logos (bilim) sözcüklerinin birleşmesinden oluşmuştur. Temeli MÖ 1900'lü yıllara dayanan kriptolojinin günümüzde en sık kullanılan şifreleme yöntemi, dijital bir şifreleme algoritması olan RSA'dır. Bu yöntemde veriler matematikte önemli bir sayı türü olan asal sayılar kullanılarak şifrelenir. Kullanılan asal sayıların büyük olması şifrenin güvenilirliği açısından önemlidir.

RSA Şifreleme Nasıl Yapılır?
RSA; çarpanlara ayırmanın algoritmik zorluğuna dayanan yapısından dolayı 1978 yılında Ron Rivest, Adi Shamir ve Leonard Adleman tarafından üretilmiş bir şifreleme yöntemidir. RSA şifrelemede matematiksel yöntemler ile çalışan iki ayrı anahtar bulunur. Bunlardan biri genel, diğeri özel anahtardır. Şifreli metin göndermek isteyen bir kullanıcı herkesle paylaşılan genel anahtarı kullanarak metni şifreler ve gönderir. Şifreli metin yalnızca özel anahtara sahip kullanıcı tarafından çözülebilir.

RSA şifrelemede anahtar oluşturma adımları şunlardır:
- P ve Q gibi çok büyük iki asal sayı seçilir.
- Seçilen iki asal sayının çarpımı ($N = P.Q$) ve bu asal sayıların birer eksiklerinin çarpımı ($\phi(N) = (P-1).(Q-1)$) hesaplanır.
- $1 < E < \phi(N)$ ve EBOB $(\phi(N), E) = 1$ olmak üzere rastgele bir E tam sayısı seçilir.
- Seçilen E sayısının mod $\phi(N)$'de tersi alınır ve sonuç D tam sayısıdır.
- E ve N tam sayıları genel anahtarı, D ve N tam sayıları ise özel anahtarı oluşturur.

Genel ve özel anahtarlar oluşturulduktan sonra gönderilmek istenen bilgi genel anahtar ile şifrelenir. Şifreleme işlemi şu şekilde yapılır:

- Şifrelenecek bilginin sayısal karşılığının E'ninci kuvveti alınır. Bunun mod N'deki karşılığı şifrelenmiş metni oluşturur. Genel anahtar ile şifrelenmiş bir metin ancak özel anahtar ile açılabilir.
- Şifrelenmiş metni çözmek için oluşturulan özel anahtar kullanılarak metnin sayısal karşılığının D'ninci kuvveti alınır. Bulunan değerin mod N'deki karşılığı orijinal metni oluşturur.

Basit bir örnek ile şifrelemeyi açıklayalım.
- $P = 11$ ve $Q = 23$ gibi iki asal sayı seçelim.
- Bu iki asal sayının çarpımı $N = P.Q$; $N = 253$ ve bu iki asal sayının bir eksiklerinin çarpımı $\phi(N) = (P-1).(Q-1)$; $\phi(N) = 220$ olarak hesaplanır.
- 1'den büyük 220'den küçük, 220 ile aralarında asal bir $E = 7$ tam sayısı seçelim.
- Seçilen $E = 7$ tam sayısının mod 220'de tersi alınır, sonuç $D = 63$ tam sayısıdır.
- 7 ve 253 tam sayıları genel anahtarı, 63 ve 253 tam sayıları ise özel anahtarı oluşturur.

Şimdi oluşturduğumuz {7, 253} ve {63, 253} anahtarlarımızı kullanarak şifreleme yapalım. Örnek olarak 17 sayısını genel anahtarımızla {5, 119} şifreleyelim. 17 sayısının 7'nci kuvvetinin mod 253'teki karşılığı olan 250, 17 sayısının RSA şifrelenmiş hâlidir. Özel anahtarımızı {63, 253} kullanarak 250'nin 63'üncü kuvvetinin mod 253'teki karşılığı 17'dir.
Siz de iki asal sayı seçerek RSA şifreleme ile benzer bir uygulama yapabilirsiniz.

Kaynakça:
https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/839739
http://www.pki.iam.metu.edu.tr/yazi-makale/yunusEA_01.pdf

ARAŞTIRMA SORULARI

1. Çağımızda kullanılan şifreleme modellerini araştırınız. Bu şifreleme modellerinde matematiğin rolü nedir?

2. RSA dışında mod işlemi kullanılan başka şifreleme yöntemleri var mıdır?

3. Tarihte kullanılan ilk şifreleme yöntemini araştırınız.

4. Siz de arkadaşlarınızla haberleşebileceğiniz bir şifreleme yöntemi geliştiriniz. Geliştirdiğiniz yöntemin çözülebilirliğini ve daha güvenli hâle nasıl getirilebileceğini araştırınız.

Pascal üçgeni $(x + y)^n$ şeklindeki iki terimli ifadelerin açılımlarındaki katsayıların üçgensel bir düzenlemesidir. Adını 17. yüzyılda yaşayan Fransız matematikçi Blaise Pascal'dan (Blez Paskal) almıştır ancak tarihi çok daha eskilere dayanır. Ömer Hayyâm bu katsayıları Pascal'dan önce keşfettiğinden bu üçgene Hayyâm üçgeni de denir. Tarihsel süreç boyunca Pascal üçgenini Hintli matematikçiler Meru Dağı'nın merdivenleri, Çinli matematikçiler Yang Hui üçgeni şeklinde de isimlendirmişlerdir.
Şimdi Pascal üçgenini binom açılımlarındaki katsayılardan yararlanarak oluşturalım:

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1.x + 1.y$

$(x + y)^2 = 1.x^2 + 2.xy + 1.y^2$

$(x + y)^3 = 1.x^3 + 3.x^2y + 3.xy^2 + 1.y^3$

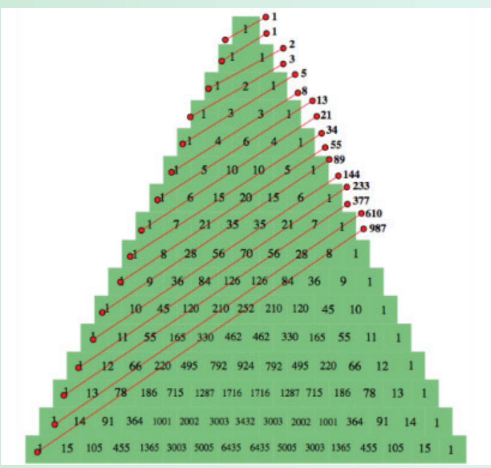
...

$(x + y)^n = \binom{n}{0}.x^n y^0 + \binom{n}{1}.x^{(n-1)}y + \ldots + \binom{n}{n}.x^0 y^n$

Bu açılımlardaki terimlerin katsayıları ortalanarak yazılırsa

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
....

şeklindeki sayılardan oluşan üçgen elde edilir. Bu üçgen Pascal üçgeni olarak isimlendirilir.
Peki Pascal üçgenini matematikçiler için bu kadar ilgi çekici yapan nedir?

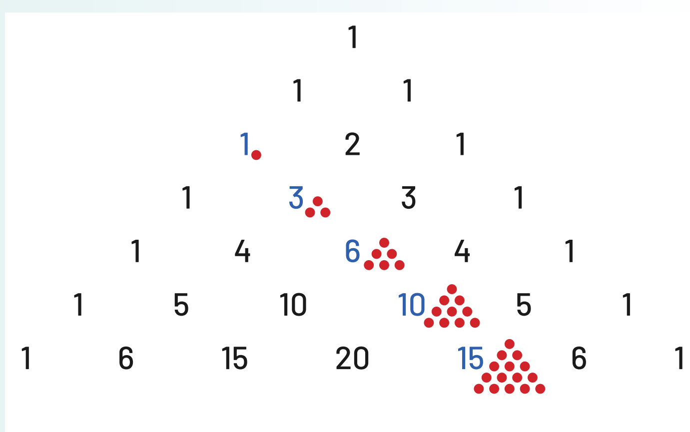


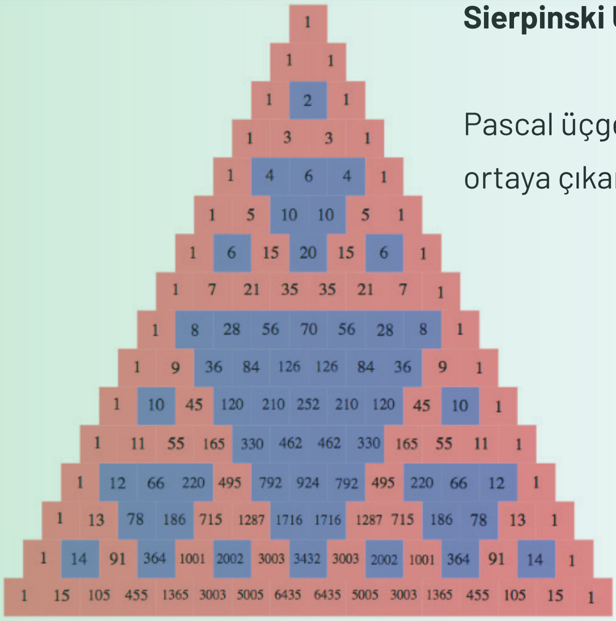
2'nin Kuvvetleri

Şekildeki her bir çapraz çizgi üzerindeki sayıların toplamı Fibonacci sayı dizisindeki sayıları verir.

Üçgensel Sayılar

Şekilde mavi ile gösterilen sayılar üçgensel sayılardır.



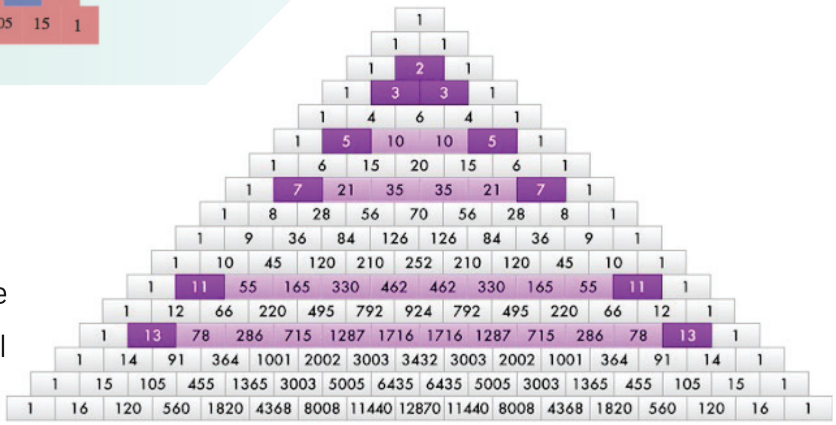


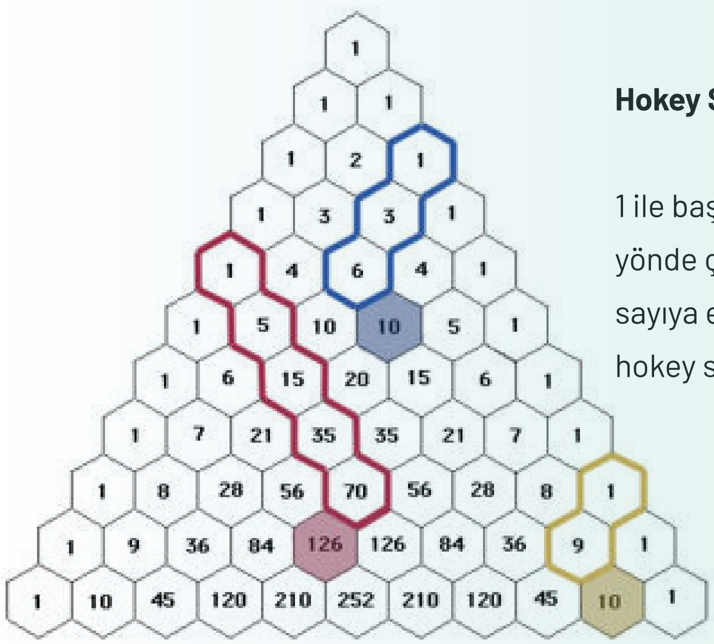
Sierpinski Üçgeni

Pascal üçgenindeki tek ve çift sayılar farklı renklere boyanırsa ortaya çıkan model Sierpinski fraktal üçgenidir.

Asal Sayılar

Bir satırın 1 haricindeki ilk sayısı asal ise o satırdaki tüm sayılar (1'ler hariç) o asal sayıya bölünür.





Hokey Sopası Deseni

1 ile başlayan çapraz bir çizgideki sayıların toplamı, ters yönde çapraz olarak bulunan aşağı doğru bir sonraki sayıya eşittir. Bu sayılar farklı bir renge boyandığında hokey sopası şeklini oluşturur.

Siz de Pascal üçgeni ile gizemli bir yolculuğa çıkarak bu üçgenin farklı özelliklerini keşfedebilirsiniz.

Kaynakça:
http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Su12/Berryman/6690/BerrymanK-Pascals/BerrymanK-Pascals.html

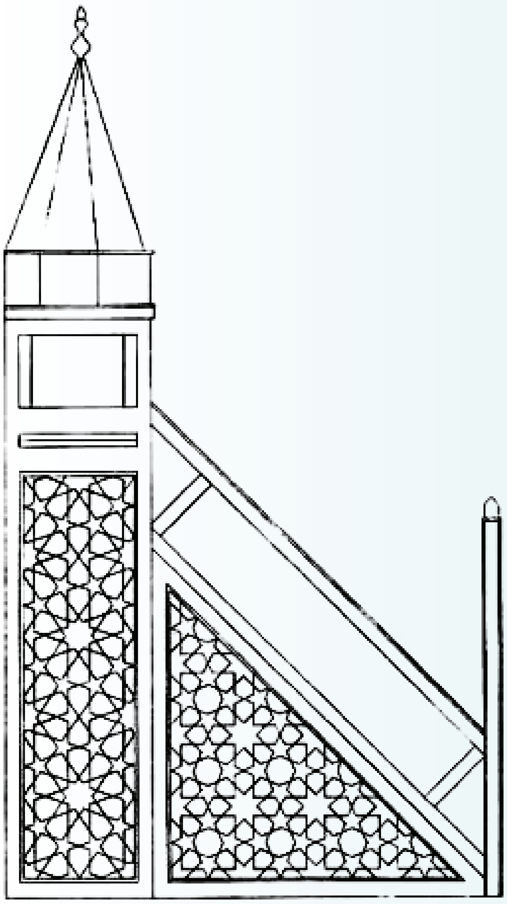
ARAŞTIRMA SORULARI

1. Pascal üçgeninde öyle bir çizgi (hat, yukarıdan aşağıya merdiven şeklinde devam eden sayılar vs.) bulunuz ki başlangıçtan itibaren birbiri ile komşu her iki sayının toplamı karesel sayıları versin.

2. Katalan sayı dizisinin terimlerini veren kuralı ve bu terimlerin Pascal üçgeni ile ilişkisini araştırınız.

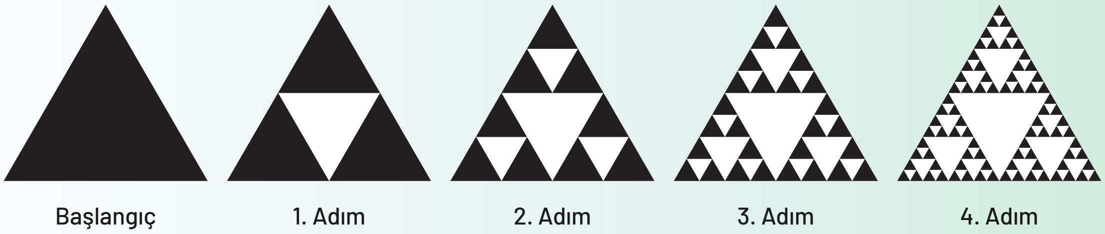
3. 11' in doğal sayı kuvvetleri Pascal üçgeni içinde gizlenmiştir. Bu gizemi keşfediniz.

Daire, deltoid, kare veya üçgenin sadece alanını ve çevresini mi hesaplıyoruz? Günlük yaşamda geometrik şekillerin nerelerde kullanıldığına hiç dikkat ettiniz mi? Örneğin yürürken kaldırım taşları üzerindeki şekillerin size tanıdık geldiği olur mu?
İslam dünyasında önemli bir yeri olan minberlerin üzerinde çok farklı şekiller yer alır. Bu minberlere dikkatlice baktığınızda geometrik şekillerin bir araya getirilmesi ile oluşturulan desenlerin farklı örüntülerden meydana geldiğini kolaylıkla fark edebilirsiniz.



Selçuk Üniversitesi Güzel Sanatlar Fakültesi Öğr. Gör. Naciye DETSELİ'nin "Selçuklu Dönemi Ahşap Minberlerine Bir Örnek: Konya Alâeddin Camii Minberinin Desen Analizi" araştırmasında kullanılan görsel yanda verilmiştir. Minberin üçgen bölümünün adı aynalıktır. Aynalığın dik kenarı 222 cm, yatay kenarı 233 cm ve çapraz kenarı (hipotenüs) 317 cm'dir. Bu bölümde 3 tane sekiz kollu, 6 tane sekizgen, 4 tane yarım sekizgen, 52 tane altıgen ve 32 tane de beş kollu yıldız ile 9 tane sekiz kollu yarım yıldız bulunmaktadır.

Desen oluşumları Sierpinski üçgeninde olduğu gibi bir düzen içindedir. Aşağıda Sierpinski üçgeninin görseli verilmiştir.



Sierpinski üçgeni oluşturulurken başlangıç olarak eşkenar bir üçgen çizilir. Sonra bu üçgenin kenarlarının orta noktaları işaretlenerek birleştirilir ve 1. adımda gösterilen şekil oluşur. 1. adımda oluşan siyah üçgenlerin yine kenar orta noktaları işaretlenerek birleştirilir ve 2. adımda gösterilen şekil oluşur. Bu işlemler devam ettirilerek yeni üçgenler oluşturulur. Bu üçgenlerdeki alanın değişimi sizce nasıl adlandırılabilir?

Minberin aynalık bölümünde yer alan şekilleri aşağıdaki kareli kâğıda çizebilirsiniz.

Minberin üzerindeki şekiller aralarında boşluk bırakılmadan ve üst üste gelmeyecek biçimde birleştirilmiştir. Şekiller belli düzende ve her yönde aynı düzende tekrarlandığı için periyodik olarak adlandırılabilir.

Doğanın da kendine has muhteşem bir geometrisi vardır. Örneğin kar denince aklınıza sadece kızak, kar topu savaşları ya da kardan adam mı geliyor? Kar tanelerinde nasıl bir geometrik gizem olduğunu hiç düşündünüz mü?
Kar tanelerinin içinde dörtgen, çember, doğru parçası ve bunun gibi birçok farklı yapıdan oluşan karmaşık bir geometri söz konusudur. Peki bu şekiller havada nasıl oluşuyor? Kar tanesinin oluşması için su buharının havada yol alıp bir parçacık üzerinde yoğunlaşması gerekir. İki temel yol ile buharın yoğunlaşması mümkündür. Bunlardan ilki faset oluşumudur. Kristal yüzey oluşumu anlamına gelen faset, prizma gibi üç boyutlu bir cisim üzerindeki yüzdür. Buz kristallerinin yapısı altı kenarlı bir cisim olduğundan kar taneleri yukarıdaki görselde olduğu gibi altı kollu bir görüntü verir. Kar tanesi oluşumda ikinci yol dal oluşumudur. Su buharı, dokunduğu parçacığın üzerinde yoğunlaşır. Bu yoğunlaşma ile kar tanesinde bulunan dallar oluşur.

Doğadaki muhteşem geometri sadece kar taneleri ile sınırlı değildir. Havada uçuşan, çiçeklerde tozlaşmayı sağlayan, onlardan topladığı özleri bize sunan arılar; bal peteklerini düzgün altıgenlerle oluşturur. Arıların neden altıgen şekli tercih ettiğini hiç düşündünüz mü?

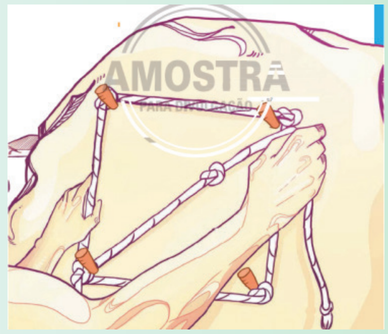
Arılar petekleri altıgen dışında bir şekille inşa etseydi matematiksel olarak şekillerin arasında boşluklar oluşur ve peteklerde daha az bal depolanırdı. Başka bir deyişle maksimum düzeyde bal depolamanın en verimli yolu peteklerin altıgen olmasıdır.

Etrafınızdaki geometri, masanın yuvarlak ya da kapının dikdörtgen olmasından ibaret değildir. Yaşamın her alanında bulunan şekilleri bazen insanların dokunmasıyla bazen de doğanın içinde gizemli veya açık bir biçimde görebilirsiniz.

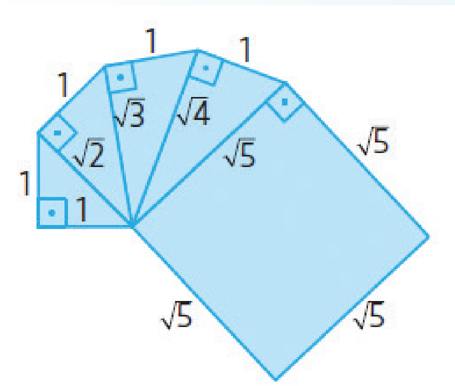
Günümüzde doğal sayılar, tam sayılar ve rasyonel sayılar gibi irrasyonel sayılar kümesi de bilinmekte ve bunlar gerektiğinde matematiksel işlemlerde kullanılmaktadır. Farklı sayı kümelerine neden ihtiyacımız var?

Dünyayı sayılarla daha anlamlı hâle getiriyoruz.

Pisagor (MÖ 572-497), dinî-felsefi bir topluluk olan Pisagor Okuluna önderlik etmiştir. Bu topluluğun sloganlarından biri "Dünyayı sayılar yönetir." sözüdür. Burada sayı kavramı pozitif tam sayılar ile sınırlandırılmıştır. Daha sonra bu sayıların birbirine oranı kullanılarak rasyonel sayılar elde edilmiştir.



Tam ve rasyonel sayıların, basit temel özellikleri tanımlamak için yeterli olmadığını gören Pisagor tam sayılara olan inancını yitirmeye başlamıştır. Genel olarak bir karenin köşegen uzunluğu ile kenar uzunluğu arasında bir oran bulamayan Pisagor, birini diğerinin cinsinden yani kesir olarak ifade edememiştir.



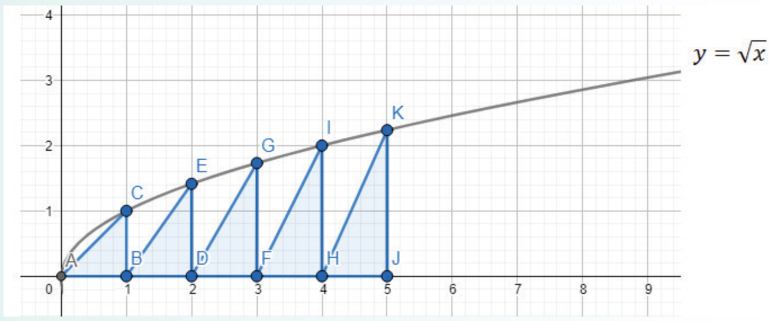
Theodorus Spirali: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{5}$ sayılarının Pisagor teoreminden faydalanarak üretilmesi

Tespit edilemeyen bu sayının anlamlandırılması için benimsenen çözüm, sayı kavramının genişletilmesi olmuştur. Yeni bir sayı kümesi oluşturulmuş ve buna rasyonel olmayan (irrasyonel) sayılar kümesi adı verilmiştir. Rasyonel kelimesi oranlı sayılar, irrasyonel sayılar ise oran olarak ifade edilemeyen sayılar biçiminde tarif edilebilir. Başka bir deyişle irrasyonel sayılar iki tam sayının oranı biçiminde yazılamaz. Birim kenarlı bir karenin köşegeninin uzunluğundan faydalanılarak başka irrasyonel sayılar türetilebilir.

Theodorus, MÖ 5. yüzyılda Yunanların kontrolünde bulunan ve günümüzde Libya olarak bilinen Kirene kentinde doğmuştur. Platon'un hocası olan Sokrates ile tanışıp Atina'ya gitmiş, burada irrasyonel sayılarla ilgili çok önemli çalışmalar yapmıştır. Theodorus; $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ve $\sqrt{5}$ gibi sayıların rasyonel sayı olmadığını ispat etmiştir. Theodorus spirali; "Einstein spirali", "Pi spirali", "Karekök spirali" isimleri ile de bilinir. Bu spiral oluşturulurken önce dik kenar uzunlukları 1 birim olan ikizkenar dik üçgen çizilir. Çizilen dik üçgenin hipotenüsünü bir dik kenar kabul eden ve diğer dik kenarı 1 birim olan yeni bir dik üçgen çizilir. Bu işlem istenen sayıda devam ettirilerek irrasyonel sayı oluşturulur. Aşağıdaki kareli zemin üzerinde $\sqrt{17}$ sayısını oluşturmayı deneyiniz.

Theodorus, spiralini $\sqrt{17}$ de bırakmıştır. Bunun nedeni tam olarak bilinmemektedir ancak $\sqrt{17}$ den sonra spiralin üst üste gelmesinin ve çizimin zorlaşmasının asıl sebep olduğu düşünülmektedir. Bu spiralde başka gizemler de bulunmaktadır:

- Spirale yeni üçgenler eklendiğinde herhangi iki hipotenüs birbiri ile asla çakışmaz.
- Spiral sonsuza kadar devam ettirildiğinde spiralin kolları arasındaki boşluğun uzunluğu π sayısına yaklaşır.
- Spiralde art arda gelen tam kare uzunluğa sahip iki hipotenüs arasındaki açı $\frac{360}{\pi}$ derecelik açıya yaklaşır.



Burada oluşan üçgenlerin spiralden ayrılıp koordinat ekseni üzerinde orijinden başlanarak yan yana dizilmesiyle yeni bir şey daha keşfedilebilir. Üçgenlerin uç noktaları birleştirildiğinde oluşan eğri $y=\sqrt{x}$ eğrisidir. Acaba bu üçgenler oluşturulurken ikizkenar dik üçgen ile başlanmasaydı neler değişirdi? Örneğin dik kenar uzunlukları değiştirilerek yeni üçgenler oluşturulsaydı spiral nasıl olurdu ya da bu üçgenler yukarıdaki gibi yan yana konulup uç noktalar birleştirilse eğride nasıl bir değişiklik meydana gelirdi?

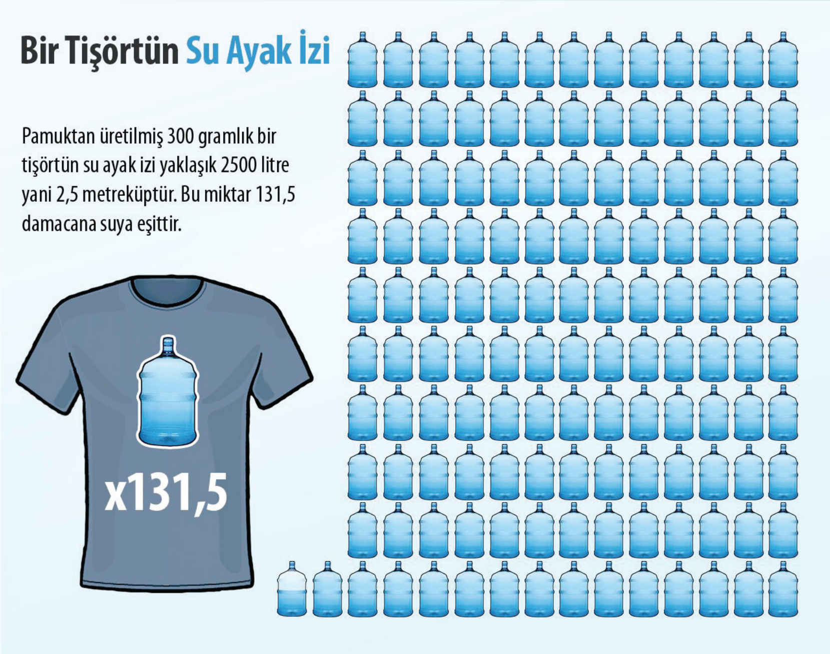
Dünya dışındaki gezegenlerde yaşam belirtisi ararken bakılan ilk şeyin su olduğunu biliyor musunuz? Suyun insan yaşamı için vazgeçilmez olduğu konusuna kimsenin itirazı olmayacaktır. Dünyanın %70 ini kaplayan su, insan bedeninin de önemli bir kısmını oluşturmaktadır. En küçük mikroplardan en büyük hayvanlara, dünya üzerindeki tüm canlıların yaşamları suya bağlıdır.

Bir insanın günlük su tüketimi ortalama 150 litredir. Bu insanların doğrudan su tüketimidir. Peki dolaylı olarak ne kadar su tüketimi yapıldığını biliyor musunuz? Örneğin giydiğimiz bir tişörtün üretilmesi için ne kadar su harcanıyor? Yani pamuğun tarlada üretilmesinden fabrikada ipliğe ve tişörte dönüşmesine, satılacağı mağazaya nakliyesinden bize ulaşana kadar geçen süreçte ne kadar su kullanılıyor? Bu sorunun cevabı "su ayak izi" kavramında bulunur.

Bir ürünün veya hizmetin üretimi için kullanılan su kaynaklarının toplam miktarına su ayak izi denir. Bu kavram ilk kez 2002 yılında Hollanda'daki UNESCO-IHE Su Eğitimi Enstitüsü'nde görev yapan Prof. Dr. Arjen Hoekstra tarafından kayda geçirilmiştir.

Su ayak izi; bir birey, bir ürün, bir ülke ya da bir iş kolu için hesaplanabilir. Su ayak izi, bir ürün elde etmek için doğrudan veya dolaylı olarak sarf edilen suyun hacminin metreküp cinsinden ölçülmesidir.

Pamuktan üretilmiş 300 gramlık bir tişörtün su ayak izi yaklaşık 2500 litredir. Düşünüldüğünde 2500 litre yüksek bir miktardır. Bu miktardaki su sarfiyatının yaşama olan negatif etkisi, kullanılan suyun kaynağının neresi olduğuna ve ne zaman kullanıldığına bağlı olarak değişir. Örneğin, bir insanın doğrudan kullandığı 16 günlük su miktarına karşılık gelir. Bu ortalama bir hesaptır. Su kıtlığı olan bir yer için bu hesap daha da üzücü bir sayıya dönüşebilir.



Üretimin su ayak izi; **Mavi Su Ayak İzi, Yeşil Su Ayak İzi** ve **Gri Su Ayak İzi** olarak üzere üçe ayrılır.

Mavi su ayak izi özellikle tarım, sanayi ve evsel amaçlarla bir ürünün ya da hizmetin üretim sürecinde doğrudan ya da dolaylı olarak kullanılan yüzey veya yeraltı tatlı su kaynaklarının toplam miktarıdır.

Yeşil su ayak izi özellikle tarım, bahçecilik ve ormancılık faaliyetlerinde, bir ürünün ya da hizmetin üretim sürecinde doğrudan ya da dolaylı olarak kullanılan toplam yağmur suyu miktarıdır.

Gri su ayak izi, belli bir su kalitesi kriterini sağlamak amacıyla su kaynaklarına (örneğin göl, akarsu, deniz suyu) doğrudan boşaltılan ya da dolaylı olarak karışan atık sulardaki kirletici derişiminin seyreltme yoluyla sınır değerlere düşürülmesi için gereken tatlı su miktarıdır.

Aşağıdaki tabloda bazı ürünlerin üretimi için kullanılan su ayak izi gösterilmiştir.

Ürün çeşidi	Birim (kg)	Global ortalama su ayak izi (Litre)
Elma/Armut	1	700
Muz	1	860
Sığır eti	1	15500
Ekmek	1	1300
Lahana	1	200
Peynir	1	5000
Tavuk	1	3900
Çikolata	1	24000
Salatalık	1	240
Hurma	1	3000
Marul	1	130
Mısır	1	900
Zeytin	1	4400
Portakal	1	460
Şeftali	1	1200
Patates	1	250
Pirinç	1	3400
Domates	1	180

Su ayak izini düşürmek için neler yapılabilir?

- Duş süresi kısaltılmalıdır.
- Bulaşıkları makineye koymadan önce sudan geçirme işlemi yapılmamalıdır.
- Çamaşır yıkarken makinenin ön yıkama programları kullanılmamalıdır.
- Gıda harcamaları azaltılmalıdır.
- Tekstil harcamaları azaltılmalıdır.
- Araçların yakıt ve yıkama harcamaları azaltılmalıdır.
- Musluk kullanırken su israf edilmemelidir.
- Elektrik ve doğal gaz benzeri kaynaklarının kullanımından tasarruflu olunmalıdır.
- Su kirliliğine sebep olunmamalıdır.
- Bireysel olarak su tüketimini azaltacak hedefler belirlenmelidir.

Su ayak izini azaltmak hem doğaya hem de ekonomik olarak insanlara güç verir.

Kaynakça:
www.yarininsuyu.com
Bilim Genç Tübitak Dergisi Doç. Dr. Gökşen Çapar , Prof.Dr.Belgin ÇAKMAK Su Ayak İzi Ders notları

Çarpma işlemi, matematiğin temel işlemlerinden bir tanesidir. Belirli çokluktaki aynı sayının toplanmasının kısa yolu çarpma işlemi olarak düşünülebilir. Örneğin 12 adet 16 sayısını toplamanın kısa yolu 12·16 işlemidir.

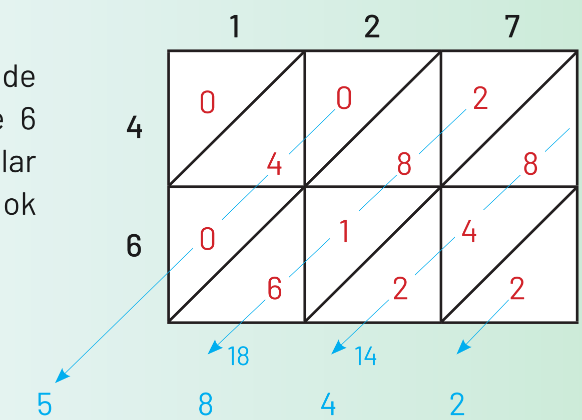
Çarpma işlemi yapılırken genelde ilkokulda öğretilen çarpma işlemi kullanılmaktadır. Acaba bu yöntemin dışında da başka yöntemler var mıdır?

Aşağıdaki yazıda bu yöntemlerden iki tanesi anlatılmıştır.

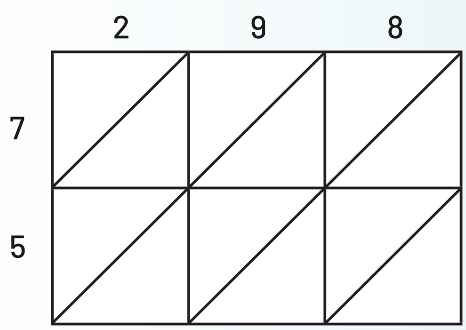
Hint Yöntemi

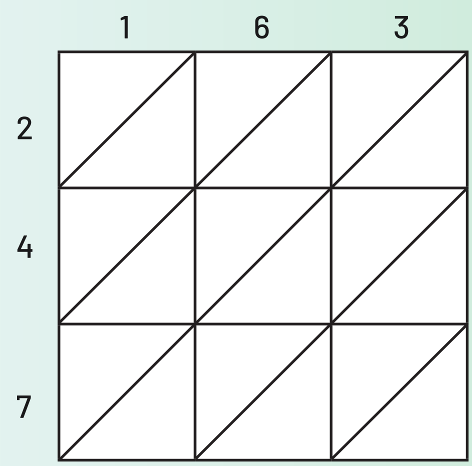
Bu yöntemde çarpılan sayılardan biri satıra soldan sağa doğru, diğeri ise sütuna yukarıdan aşağıya doğru sayılar basamaklarına ayrılarak satır ve sütunların oluşturduğu kutuların başlarına yazılır. Bu kutular sol alt köşeden sağ üst köşeye doğru çizilen köşegenle iki bölmeye ayrılır. Satır ve sütunlardaki sayıların çarpımları iki basamaklı sayılar şeklinde düşünülüp kutulara birler basamağı köşegenin altında onlar basamağı köşegenin üstünde olacak şekilde yazılır. Daha sonra bulunan sayılar çapraz olarak klasik bir şekilde toplanır.

Yandaki görselde 46·127=5842 işlemi verilmiştir. Bu işlemde 46 sayısı sütun 127 sayısı satır olarak yazılmıştır. 4 ve 6 rakamları sırasıyla 1, 2 ve 7 rakamları ile çarpılarak sonuçlar basamaklara ayrılarak kutulara yazılıyor. Daha sonra ok yönünde klasik toplama işlemi yapılıyor.



75·298 ve 247·163 işlemlerini aşağıda verilen tablo üzerinde yapınız.

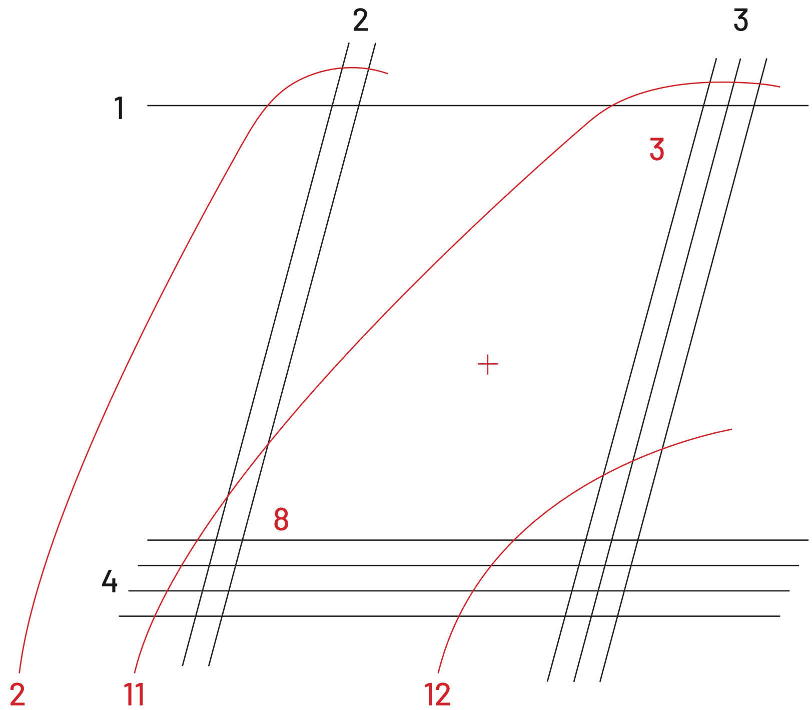




Japon Yöntemi

Çarpım tablosunu bilmeden çarpma işlemi yapılıyor. Nasıl olur demeyin. Japonya'da çarpma işlemleri öğretilirken paralel çizgiler kullanılıyor. Çarpılan sayıların yerine çizgiler kullanılıyor.

Aşağıda 14·23=322 işleminin Japon yöntemi ile çarpılması gösterilmiştir. Burada 14 sayısı basamaklarına ayrılarak sütun olarak yazılır. 23 sayısı da basamaklarına ayrılarak satır olarak yazılır. Basamakların sayı değeri kadar paralel çizgiler çizilir. Bu çizgilerin kesişme sayıları sayılarak çapraz olarak toplanır. Elde edilen toplamlar birer kaydırılarak alt alta toplanarak çarpma işleminin sonucu bulunur.



$$\begin{array}{r} 12 \\ 11 \\ +\ 2 \\ \hline 322 \end{array}$$

45·63 ve 154·32 işlemlerini bu yöntemle yapabilir misiniz?

Ebû Ca'fer Muhammed bin Mûsâ el-Hârezmî (780-847) Bağdat'ta doğmuş, ilk dönem İslam filozoflarından birisi olup aynı zamanda bir matematikçi ve astronomdur. Hârezmî'nin isminin Latince karşılığı olan Alkhorizmi, bugün kullandığımız "**algoritma**" ifadesinin ve en bilinen eseri olan Kitâbü'l-Muhtasar fî Hisâbi'l-Cebr ve'l-Mukâbele (Tamamlama ve Dengeleme ile Hesaplama Üzerine Özlü Kitap) kitabındaki al-jabr ifadesi de matematikteki "**cebir**" kelimesinin kökenlerini oluşturmaktadır. Bu eser aynı zamanda bilim tarihinde cebirin kendi başına konu edildiği ilk kitaptır. Hârezmî, matematik alanında yaptığı çalışmalarda, kendinden önce ancak sözlü olarak bilinen cebiri geliştirip, sistemleştirerek bunun matematiğin ayrı bir dalı olarak var olmasını sağlamıştır.

Hârezmî, "0" (sıfır) ve bilinmeyen işareti "x" in mucidi olarak bilinir. 10 rakamdan oluşan basamaklı sayı sistemi üzerine bir eser yazarak bu rakamların İslam dünyası ve batıda tanınıp kullanılmasını sağlamıştır.

Hârezmî, kendisinden önce sözel olarak kelimelerle ifade edilen ikinci dereceden denklemlerin çözümünü oldukça basit bir mantığı olan kareye tamamlama yöntemiyle çözmüştür.

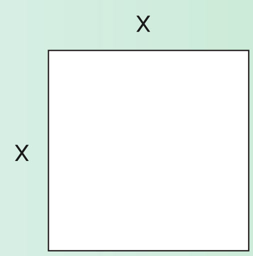
Örneğin

$x^2 + 10 \cdot x = 39$ denklemi günümüz modern matematiğindeki diskriminant formülü kullanılarak çözülürse

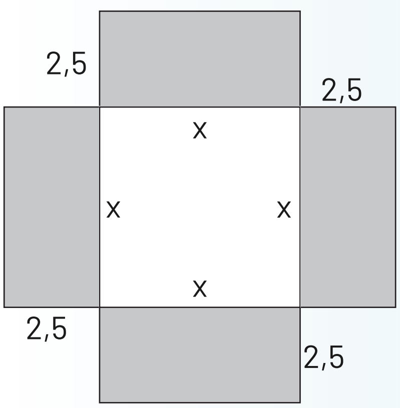
$$x = \frac{-10 \mp \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-39) \cdot 1}}{2} = \frac{-10 \mp \sqrt{256}}{2} = \frac{-10 \mp 16}{2}$$

3 ve -13 olarak iki farklı kök bulunur.

Hârezmî, kareye tamamlama yönteminde x^2 terimini temsil etmesi için Şekil 1 deki gibi bir kenarı x birim uzunluğunda olan bir kareyi kullanmıştır.
Bu karenin alanı x^2 birimkaredir.



Şekil 1

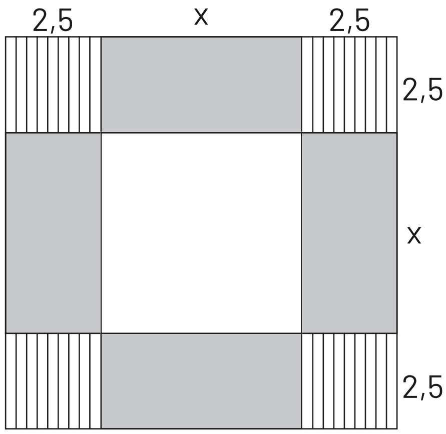


Şekil 2

Alanları toplamı 10·x terimine eşit olacak şekilde dört eş dikdörtgen oluşturulmuştur. Bu dikdörtgenlerin karenin her bir kenarına Şekil 2 de görüldüğü gibi eklenmesi için bir kenarı x birim diğer kenarı 2,5 br olması gerekir ki bu şekilde alanı 2,5·x olsun. Şekil 2 nin alanı x^2+10·x birimkaredir ve verilen denklemde 39 birimkareye eşit olmalıdır.

Şekil 2 nin köşelerindeki boş alanlar taranarak Şekil 3 teki gibi daha büyük bir kare elde edildiğinde her bir köşedeki taralı alan 2,5·2,5= 6,25 birimkare ve sonradan taranan toplam alan 4·6,25=25 birimkareye eşit olur.

Şekil 2 de alanı 39 birimkare olan şekle Şekil 3 te görüldüğü gibi 25 birimkare alan daha eklenerek oluşturulan büyük karenin alanı 64 birimkare olmuştur. Böylece alanı 64 birimkare olan karenin bir kenarını 8 birim olacağından 2,5+2,5+x =8 denkleminin çözümünden x in pozitif kökü 3 bulunur.



Şekil 3

Kaynakça:
An Episodic History of Mathematics, Mathematical Culture through Problem Solving by Steven G. Krantz, September 23, 2006

ARAŞTIRMA SORULARI

1. $x^2 + 5 \cdot x = 15$ denkleminin pozitif kökünü kareye tamamlama yöntemiyle bulunuz.

2. Kareye tamamlama yöntemiyle eğer varsa denklemin pozitif kökleri bulunabilir. Bu yöntemle $a \cdot x^2 + b \cdot x = c$ denkleminde b katsayısı negatif değerli olduğunda kareye tamamlama yönteminin nasıl uygulanabileceğini düşününüz.