2010-2024

MA PYQs

2024

Q1. (a) मान लीजिए कि कोटि mn का एक परिमित समूह G है, जहाँ m और n, (m > n) अभाज्य संख्याएँ हैं । दर्शाइए कि G का कोटि m का अधिक-से-अधिक एक उपसमूह है ।

Let G be a finite group of order mn, where m and n are prime numbers with m > n. Show that G has at most one subgroup of order m. *10*

(b) दर्शाइए कि एक आबेली समूह का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब आबेली है, लेकिन इसका विपरीत आवश्यक रूप से सत्य नहीं है ।

Show that every homomorphic image of an abelian group is abelian, but the converse is not necessarily true. *15*

outbt

(a) पूर्णांकों के वलय Z पर बहुपद वलय Z[x] का विचार कीजिए । मान लीजिए x द्वारा जनित Z[x] की एक गुणजावली S है । दर्शाइए कि S, Z[x] की एक अभाज्य गुणजावली है लेकिन उच्चिष्ठ गुणजावली नहीं है ।

Consider the polynomial ring Z[x] over the ring Z of integers. Let S be an ideal of Z[x] generated by x. Show that S is prime but not a maximal ideal of Z[x]. 15

2023

1. *(a)* मान लीजिए कोटि 10 का एक समूह G है तथा कोटि 6 का एक समूह G' है। जाँच कीजिए कि क्या G से G' पर एक आच्छादक समाकारिता का अस्तित्व है।

Let G be a group of order 10 and G' be a group of order 6. Examine whether there exists a homomorphism of G onto G'. 10

(b) गुणजावली $4Z + 6Z$ को पूर्णांकीय प्रांत Z में एक मुख्य गुणजावली के रूप में व्यक्त कीजिए।

Express the ideal $4Z + 6Z$ as a principal ideal in the integral domain Z. 10

2. *(a)* सिद्ध कीजिए कि $2p$ कोटि के एक अक्रमविनिमेय समूह, जहाँ p एक विषम अभाज्य संख्या है, में p कोटि का एक उपसमूह होना आवश्यक है।

Prove that a non-commutative group of order $2p$, where p is an odd prime, must have a subgroup of order p. 15

3. *(a)* सिद्ध कीजिए कि x^2+1, $Z_3[x]$ में एक अखंडनीय बहुपद है। यह भी दर्शाइए कि विभाग वलय $\frac{Z_3[x]}{\langle x^2+1 \rangle}$, 9 अवयवों का एक क्षेत्र है।

Prove that x^2+1 is an irreducible polynomial in $Z_3[x]$. Further show that the quotient ring $\frac{Z_3[x]}{\langle x^2+1 \rangle}$ is a field of 9 elements. 15

2022

1. *(a)* दर्शाइये कि गुणनात्मक समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$, जहाँ $i = \sqrt{(-1)}$ है, समूह $G' = (\{0, 1, 2, 3\}, +_4)$ के तुल्याकारी है।

Show that the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$, where $i = \sqrt{(-1)}$, is isomorphic to the group $G' = (\{0, 1, 2, 3\}, +_4)$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि एक समूह G का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब, G के किसी विभाग समूह के तुल्याकारी है।

Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G. 15

4. *(a)* मान लीजिये कि R वास्तविक संख्याओं का एक क्षेत्र है तथा S, उन सभी बहुपदों $f(x) \in R[x]$, जिनके लिये $f(0) = 0 = f(1)$ है, का क्षेत्र है। सिद्ध कीजिये कि S, $R[x]$ की एक गुणजावली है। क्या अवशेष वर्ग वलय $R[x]/S$ एक पूर्णांकीय प्रांत है? अपने उत्तर का स्पष्टीकरण दीजिये।

Let R be a field of real numbers and S, the field of all those polynomials $f(x) \in R[x]$ such that $f(0) = 0 = f(1)$. Prove that S is an ideal of $R[x]$. Is the residue class ring $R[x]/S$ an integral domain? Give justification for your answer. 15

2021

1. *(a)* मान लीजिए कि $m_1, m_2, \cdots, m_k$ धनात्मक पूर्णांक हैं तथा $d > 0$, $m_1, m_2, \cdots, m_k$ का महत्तम समापवर्तक है। दर्शाइए कि ऐसे पूर्णांक $x_1, x_2, \cdots, x_k$ अस्तित्व में हैं ताकि

$$d = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k$$

Let $m_1, m_2, \cdots, m_k$ be positive integers and $d > 0$ the greatest common divisor of $m_1, m_2, \cdots, m_k$. Show that there exist integers $x_1, x_2, \cdots, x_k$ such that

$$d = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k$$ 10

(c) यदि एक फलन f, अन्तराल $[a, b]$ में एकदिष्ट है, तब सिद्ध कीजिए कि f, $[a, b]$ में रीमान समाकलनीय है।

If a function f is monotonic in the interval $[a, b]$, then prove that f is Riemann integrable in $[a, b]$. 10

(b) मान लीजिए कि F एक क्षेत्र है तथा $f(x) \in F[x]$, क्षेत्र F के ऊपर घात >0 का एक बहुपद है। दर्शाइए कि एक क्षेत्र F' तथा एक अंतःस्थापन $q : F \to F'$ इस प्रकार से अस्तित्व में हैं कि बहुपद $f^q \in F'[x]$ का एक मूल F' में है, जहाँ f^q, f के प्रत्येक गुणांक a को $q(a)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने से प्राप्त होता है।

Let F be a field and $f(x) \in F[x]$ a polynomial of degree >0 over F. Show that there is a field F' and an imbedding $q : F \to F'$ s.t. the polynomial $f^q \in F'[x]$ has a root in F', where f^q is obtained by replacing each coefficient a of f by $q(a)$. 15

4. (a) दर्शाइए कि परिमेय संख्याओं के योज्य समूह $\mathbb{Q}$ के अपरिमित रूप से अनेक उपसमूह हैं।

Show that there are infinitely many subgroups of the additive group $\mathbb{Q}$ of rational numbers. 15

2020

SECTION A

1.(a) मान लीजिए कि S_3 व Z_3 क्रमश: 3 प्रतीकों का क्रमचय समूह एवं मॉड्यूल 3 अवशिष्ट वर्गों के समूह हैं। दर्शाइए कि S_3 का Z_3 में तुच्छ समाकारिता के अतिरिक्त कोई भी समाकारिता नहीं है।

Let S_3 and Z_3 be permutation group on 3 symbols and group of residue classes module 3 respectively. Show that there is no homomorphism of S_3 in Z_3 except the trivial homomorphism.

10

10

1.(b) मान लीजिए R मुख्य गुणजावली प्रान्त है। दर्शाइए कि R के विभाग-वलय की प्रत्येक गुणजावली, मुख्य गुणजावली है तथा R/P, R के अभाज्यगुणजावली P के लिए मुख्य गुणजावली प्रान्त है।

Let R be a principal ideal domain. Show that every ideal of a quotient ring of R is principal ideal and R/P is a principal ideal domain for a prime ideal P of R.

10

10

2.(a) मान लीजिए G, n समूहांक का परिमित चक्रीय समूह है । तब सिद्ध कीजिए कि G के $\phi(n)$ जनक हैं (जहाँ पर ϕ ऑयलर ϕ-फलन है) ।

Let G be a finite cyclic group of order n. Then prove that G has $\phi(n)$ generators (where ϕ is Euler's ϕ-function).

15

3.(a) मान लीजिए $R, p(>0)$ अभिलक्षण का एक परिमित क्षेत्र है । दर्शाइए कि $f(a) = a^p, \forall a \in R$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण $f: R \to R$ एकैक समाकारी है ।

Let R be a finite field of characteristic $p(>0)$. Show that the mapping $f: R \to R$ defined by $f(a) = a^p, \forall a \in R$ is an isomorphism. 15

2019

1.(a) मान लीजिए कि G एक परिमित समूह है और H तथा K, G के उप-समूह हैं, ऐसा कि $K \subset H$। दर्शाइए $(G : K) = (G : H)(H : K)$ ।

Let G be a finite group, H and K subgroups of G such that $K \subset H$. Show that $(G : K) = (G : H)(H : K)$. 10

2.(a) यदि G और H परिमित समूह हैं जिनकी कोटियां सापेक्षत: अभाज्य हैं, तो सिद्ध करें कि G से H तक केवल एक ही समाकारिता होमोमोर्फिज्म है जो कि तुच्छ है ।

If G and H are finite groups whose orders are relatively prime, then prove that there is only one homomorphism from G to H, the trivial one. 10

2.(b) समूह Z_{12} के सभी विभाग समूह लिखिए ।

Write down all quotient groups of the group Z_{12}. 10

3.(d) मानिए कि a, यूक्लिडीयन वलय R का एक अखंडनीय अवयव है तब सिद्ध करें कि $R/(a)$ एक क्षेत्र है ।

Let a be an irreducible element of the Euclidean ring R, then prove that $R/(a)$ is a field. 10

2018

1.(a) मान लीजिए R तत्समक अवयव सहित एक पूर्णांकीय प्रांत है । दर्शाइए कि $R[x]$ में कोई भी एकक R में एक एकक है ।

Let R be an integral domain with unit element. Show that any unit in $R[x]$ is a unit in R. 10

2.(a) दर्शाइए कि $(\mathbb{R}, +)$ मोड्यूलो $\mathbb{Z}$ का विभाग समूह, सम्मिश्र तल में एकांक वृत्त पर सम्मिश्र संख्याओं के गुणनात्मक समूह से तुल्यकारी होता है । यहां पर $\mathbb{R}$, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा $\mathbb{Z}$ पूर्णांकों का समुच्चय है ।

Show that the quotient group of $(\mathbb{R}, +)$ modulo $\mathbb{Z}$ is isomorphic to the multiplicative group of complex numbers on the unit circle in the complex plane. Here $\mathbb{R}$ is the set of real numbers and $\mathbb{Z}$ is the set of integers. 15

3.(a) क्षेत्र $(\mathbb{Z}_{13}, +_{13}, \times_{13})$, जहाँ पर $+_{13}$ तथा $\times_{13}$ क्रमशः योग मोड्यूलो 13 व गुणन मोड्यूलो 13 निरूपित करते हैं, के गुणनात्मक समूह के सभी उचित उपसमूहों को ज्ञात कीजिए ।

Find all the proper subgroups of the multiplicative group of the field $(\mathbb{Z}_{13}, +_{13}, \times_{13})$, where $+_{13}$ and $\times_{13}$ represent addition modulo 13 and multiplication modulo 13 respectively. 20

2017

(b) मान लीजिए कि G कोटि n का एक समूह है । दर्शाइए कि G क्रमचय समूह S_n के एक उपसमूह के समरूपी है ।

Let G be a group of order n. Show that G is isomorphic to a subgroup of the permutation group S_n. *10*

(c) मान लीजिए कि F एक क्षेत्र है और F[X] सभी बहुपद, जो F में एकल चर X में हैं, का वलय द्योतित करता है । $f(X), g(X) \in F[X]$ बशर्ते $g(X) \neq 0$ के लिए, दर्शाइए कि ऐसे $q(X), r(X) \in F(X)$ हैं जिनके लिए (r(X)) का घात (g(X)) के घात से छोटा है और

$$f(X) = q(X) \cdot g(X) + r(X).$$

Let F be a field and F[X] denote the ring of polynomials over F in a single variable X. For $f(X), g(X) \in F[X]$ with $g(X) \neq 0$, show that there exist $q(X), r(X) \in F[X]$ such that degree $(r(X)) <$ degree $(g(X))$ and

$$f(X) = q(X) \cdot g(X) + r(X).$$ *20*

2016

(a) मान लीजिए $\mathbb{K}$ एक क्षेत्र है तथा $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}$ पर एक एकल चर X में बहुपदों का वलय है । एक बहुपद $f \in \mathbb{K}[X]$ के लिए मान लीजिए (f), f द्वारा जनित $\mathbb{K}[X]$ में गुणजावली को निर्दिष्ट करता है । दर्शाइए कि (f), $\mathbb{K}[X]$ में एक उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि और केवल यदि f, $\mathbb{K}$ पर अखंडनीय बहुपद है ।

Let $\mathbb{K}$ be a field and $\mathbb{K}[X]$ be the ring of polynomials over $\mathbb{K}$ in a single variable X. For a polynomial $f \in \mathbb{K}[X]$, let (f) denote the ideal in $\mathbb{K}[X]$ generated by f. Show that (f) is a maximal ideal in $\mathbb{K}[X]$ if and only if f is an irreducible polynomial over $\mathbb{K}$. *10*

(b) मान लीजिए p एक अभाज्य संख्या है तथा $\mathbb{Z}_p$ पूर्णांक मॉड्यूलो p के योज्य समूह को निर्दिष्ट करता है । दर्शाइए कि $\mathbb{Z}_p$ का प्रत्येक शून्येतर अवयव $\mathbb{Z}_p$ का जनन करता है ।

Let p be a prime number and $\mathbb{Z}_p$ denote the additive group of integers modulo p. Show that every non-zero element of $\mathbb{Z}_p$ generates $\mathbb{Z}_p$. *15*

Q3. (a) मान लीजिए K, क्षेत्र F का एक विस्तार है । सिद्ध कीजिए कि K के अवयव, जो कि F पर बीजीय हैं, K का उपक्षेत्र बनाते हैं । आगे, यदि $F \subset K \subset L$ क्षेत्र हैं, L, K पर बीजीय है तथा K, F पर बीजीय है, तब सिद्ध कीजिए कि L, F पर बीजीय है ।

Let K be an extension of a field F. Prove that the elements of K, which are algebraic over F, form a subfield of K. Further, if $F \subset K \subset L$ are fields, L is algebraic over K and K is algebraic over F, then prove that L is algebraic over F. *20*

2015

1. *(a)* *(i)* कोटि 8 के चक्रीय समूह G के कितने जनक होते हैं? व्याख्या कीजिए।

How many generators are there of the cyclic group G of order 8? Explain.

(ii) कोटि 4 के एक समूह $\{e, a, b, c\}$ को लेते हुए, जहाँ e तत्समक (आइडेंटिटि) है, संयोजन सारणियाँ बनाइए यह दर्शाते हुए कि एक चक्रीय है जबकि दूसरी नहीं है।

Taking a group $\{e, a, b, c\}$ of order 4, where e is the identity, construct composition tables showing that one is cyclic while the other is not.

5+5=10

(b) वलय का एक ऐसा उदाहरण दीजिए, जिसका तत्समक है परन्तु जिसके एक उपवलय का भिन्न तत्समक है।

Give an example of a ring having identity but a subring of this having a different identity. 10

2. *(a)* यदि R एक वलय है, जिसका तत्समक अवयव 1 है तथा R आच्छादक R' (R onto R') की एक समाकारिता ϕ है, तो सिद्ध कीजिए R' का तत्समक अवयव $\phi(1)$ है।

If R is a ring with unit element 1 and ϕ is a homomorphism of R onto R', prove that $\phi(1)$ is the unit element of R'. 15

4. *(a)* क्या निम्नलिखित समुच्चय साधारण योग तथा गुणन के अन्तर्गत पूर्णांकीय प्रांत बनाते हैं? यदि ऐसा है, तो बताइए कि क्या वे क्षेत्र हैं :

Do the following sets form integral domains with respect to ordinary addition and multiplication? If so, state if they are fields : 5+6+4=15

(i) $b\sqrt{2}$ के रूप की संख्याओं का समुच्चय, जहाँ b परिमेय संख्या है

The set of numbers of the form $b\sqrt{2}$ with b rational

(ii) सम पूर्णांकों का समुच्चय

The set of even integers

(iii) धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय

The set of positive integers

2014

1. (a) मान लीजिए G सभी 2×2 के वास्तविक आव्यूहों $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ का समुच्चय है, जहाँ कि $xz \neq 0$. दर्शाइए कि G आव्यूह गुणन के अन्तर्गत एक समूह है। मान लीजिए N उपसमुच्चय $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ को द्योतित करता है। क्या N समूह G का सामान्य (नॉर्मल) उपसमूह है? अपने उत्तर का तर्क प्रस्तुत कीजिए।

Let G be the set of all real 2×2 matrices $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$, where $xz \neq 0$. Show that G is a group under matrix multiplication. Let N denote the subset $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$. Is N a normal subgroup of G? Justify your answer. 10

2. *(a)* दर्शाइए कि $\mathbb{Z}_7$ एक क्षेत्र है। तब $\mathbb{Z}_7$ में $([5]+[6])^{-1}$ तथा $(-[4])^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

Show that $\mathbb{Z}_7$ is a field. Then find $([5]+[6])^{-1}$ and $(-[4])^{-1}$ in $\mathbb{Z}_7$. 15

20

3. *(a)* दर्शाइए कि समुच्चय $\{a + b\omega : \omega^3 = 1\}$, जहाँ a तथा b वास्तविक संख्याएँ हैं, सामान्य योग तथा गुणन के अन्तर्गत एक क्षेत्र है।

Show that the set $\{a + b\omega : \omega^3 = 1\}$, where a and b are real numbers, is a field with respect to usual addition and multiplication. 15

4. *(a)* सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ तत्समक सहित एक क्रमविनिमेय वलय है।

Prove that the set $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ is a commutative ring with identity. 15

2013

(a) Show that the set of matrices $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$ is a field under the usual binary operations of matrix addition and matrix multiplication. What are the additive and multiplicative identities and what is the inverse of $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$? Consider the map $f : \mathbb{C} \to S$ defined by $f(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Show that f is an isomorphism. (Here $\mathbb{R}$ is the set of real numbers and $\mathbb{C}$ is the set of complex numbers.) *10*

(b) Give an example of an infinite group in which every element has finite order. 10

(a) What are the orders of the following permutations in S_{10} ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 7 & 3 & 10 & 5 & 4 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ and } (1\,2\,3\,4\,5)\,(6\,7).$$ *10*

(b) What is the maximal possible order of an element in S_{10} ? Why ? Give an example of such an element. How many elements will there be in S_{10} of that order ? *13*

(a) Let $J = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ be the ring of Gaussian integers (subring of $\mathbb{C}$). Which of the following is J : Euclidean domain, principal ideal domain, unique factorization domain ? Justify your answer. *15*

(b) Let R^C = ring of all real valued continuous functions on [0, 1], under the operations

$$(f + g)\,x = f(x) + g(x)$$

$$(fg)\,x = f(x)\,g(x).$$

Let $M = \left\{ f \in R^C \;\middle|\; f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}.$

Is M a maximal ideal of R ? Justify your answer. 15

(d) Let [x] denote the integer part of the real number x, i.e., if $n \leq x < n + 1$ where n is an integer, then $[x] = n$. Is the function $f(x) = [x]^2 + 3$ Riemann integrable in $[-1, 2]$? If not, explain why. If it is integrable, compute $\int_{-1}^{2} ([x]^2 + 3)\, dx$. 10

2012

1. (a) How many elements of order 2 are there in the group of order 16 generated by a and b such that the order of a is 8, the order of b is 2 and $bab^{-1} = a^{-1}$. 12

2. (a) How many conjugacy classes does the permutation group S_5 of permutations 5 numbers have ? Write down one element in each class (preferably in terms of cycles). 15

3. (a) Is the ideal generated by 2 and X in the polynomial ring $\mathbb{Z}[X]$ of polynomials in a single variable X with coefficients in the ring of integers $\mathbb{Z}$, a principal ideal ? Justify your answer. 15

4. (a) Describe the maximal ideals in the ring of Gaussian integers $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

20

2011

1. (a) Show that the set

$$G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

of six transformations on the set of Complex numbers defined by

$$f_1(z) = z, \; f_2(z) = 1 - z$$

$$f_3(z) = \frac{z}{(z-1)}, \; f_4(z) = \frac{1}{z}$$

$$f_5(z) = \frac{1}{(1-z)} \text{ and } f_6(z) = \frac{(z-1)}{z}$$

is a non-abelian group of order 6 w.r.t. composition of mappings. 12

(e) (i) Prove that a group of Prime order is abelian. 6

(ii) How many generators are there of the cyclic group $(G, \cdot)$ of order 8 ? 6

3. (a) Let F be the set of all real valued continuous functions defined on the closed interval [0, 1]. Prove that $(F, +, \cdot)$ is a Commutative Ring with unity with respect to addition and multiplication of functions defined pointwise as below :

$$\left.\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \text{and} \quad (f \,.\, g)(x) &= f(x) \,.\, g(x) \end{aligned}\right\} \quad x \in [0, 1]$$

where $f, g \in F$. 15

4. (a) Let a and b be elements of a group, with $a^2 = e$, $b^6 = e$ and $ab = b^4a$.

Find the order of ab, and express its inverse in each of the forms $a^m b^n$ and $b^m a^n$. 20

2010

1. Attempt any *five* of the following :

(a) Let $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ be the set of all real numbers omitting -1. Define the binary relation $*$ on G by $a * b = a + b + ab$. Show $(G, *)$ is a group and it is abelian 12

(b) Show that a cyclic group of order 6 is isomorphic to the product of a cyclic group of order 2 and a cyclic group of order 3. Can you generalize this ? Justify. 12

2. (a) Let $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ be the multiplicative group of non-zero reals and $(GL(n, \mathbb{R}), X)$ be the multiplicative group of $n \times n$ non-singular real matrices. Show that the quotient group $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R})$ and $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ are isomorphic where

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}$.

What is the centre of $GL(n, \mathbb{R})$? 15

(b) Let $C = \{f : I = [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$.

Show C is a commutative ring with 1 under pointwise addition and multiplication.

Determine whether C is an integral domain. Explain. 15

3. (a) Consider the polynomial ring $Q[x]$. Show $p(x) = x^3 - 2$ is irreducible over Q. Let I be the ideal in $Q[x]$ generated by $p(x)$. Then show that $Q[x]/I$ is a field and that each element of it is of the form $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ with a_0, a_1, a_2 in Q and $t = x + I$. 15

(b) Show that the quotient ring $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$ is isomorphic to the ring $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ where $\mathbb{Z}[i]$ denotes the ring of Gaussian integers. 15