2010 - 2023

2023

8.(c) एक अदिश बिन्दु फलन ϕ और सदिश बिन्दु फलन $\vec{f}$ के लिये निम्नलिखित सर्वसमिका सिद्ध कीजिए

$$\nabla\cdot(\phi\vec{f})=\nabla\phi\cdot\vec{f}+\phi(\nabla\cdot\vec{f})$$

$\nabla\cdot\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right)$ का मान भी ज्ञात कीजिए और तब उल्लेखित सर्वसमिका का सत्यापन कीजिए।

For a scalar point function ϕ and vector point function $\vec{f}$, prove the identity $\nabla\cdot(\phi\vec{f})=\nabla\phi\cdot\vec{f}+\phi(\nabla\cdot\vec{f})$. Also find the value of $\nabla\cdot\left(\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right)$ and then verify stated identity.

15

6.(c) समाकल $\iint_S \left(3y^2z^2\,\hat{i} + 4z^2x^2\,\hat{j} + z^2y^2\,\hat{k}\right)\cdot\hat{n}\,dS$ का मान ज्ञात कीजिए; जहाँ S समतल $z = 0$ के ऊपर पृष्ठ $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ का ऊपरी भाग है और xy-समतल द्वारा परिबद्ध है। अतैव गॉस-अपसरण प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Evaluate the integral $\iint_S \left(3y^2z^2\,\hat{i} + 4z^2x^2\,\hat{j} + z^2y^2\,\hat{k}\right)\cdot\hat{n}\,dS$, where S is the upper part of the surface $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ above the plane $z = 0$ and bounded by the xy-plane. Hence, verify Gauss-Divergence theorem. 20

5.(c) यदि $\vec{a} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} + \theta\,\hat{k}$

$$\vec{b} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

तो सदिश फलन $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ के θ के सापेक्ष अवकलज के मान, $\theta = \frac{\pi}{2}$ और $\theta = \pi$ पर ज्ञात कीजिए।

If $\vec{a} = \sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} + \theta\,\hat{k}$

$$\vec{b} = \cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} - 3\hat{k}$$

$$\vec{c} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k}$$

then find the values of the derivative of the vector function $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ w.r.t. θ at $\theta = \frac{\pi}{2}$ and $\theta = \pi$.

10

7.(c) अगर एक वक्र की स्पर्श रेखा एक नियत रेखा के साथ एक स्थिर [illegible] सिद्ध कीजिए कि वक्रता की त्रिज्या के साथ व्यावर्तन त्रिज्या का अनुपात $\tan\theta$ के समानुपाती है। और आगे सिद्ध कीजिए कि अगर यह अनुपात एक स्थिरांक है, तो स्पर्श रेखा एक नियत दिशा के साथ एक स्थिर कोण बनाती है।

If the tangent to a curve makes a constant angle θ with a fixed line, then prove that the ratio of radius of torsion to radius of curvature is proportional to $\tan\theta$. Further prove that if this ratio is constant, then the tangent makes a constant angle with a fixed direction. 15

2022

(c) गाउस के अपसरण प्रमेय का उपयोग करके $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ का मान निकालिए, जहाँ $\vec{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ तथा S, पृष्ठों $z = 0,\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 4$ द्वारा बना हुआ बेलन है ।

Using Gauss' divergence theorem, evaluate $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, where $\vec{F} = x\hat{i} - y\hat{j} + (z^2 - 1)\hat{k}$ and S is the cylinder formed by the surfaces $z = 0,\ z = 1,\ x^2 + y^2 = 4$.

280 80

15

(c) समतल में ग्रीन के प्रमेय को $\oint_C (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$ के लिए सत्यापित कीजिए, जहाँ C, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ द्वारा परिभाषित क्षेत्र का सीमा वक्र है ।

Verify Green's theorem in the plane for $\oint_C (3x^2 - 8y^2)\,dx + (4y - 6xy)\,dy$, where C is the boundary curve of the region defined by $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. *15*

Q7. (a) स्टोक्स प्रमेय को $\vec{F} = x\hat{i} + z^2\hat{j} + y^2\hat{k}$ के लिए प्रथम अष्टांशक में स्थित समतल पृष्ठ : $x + y + z = 1$ पर सत्यापित कीजिए ।

Verify Stokes' theorem for $\vec{F} = x\hat{i} + z^2\hat{j} + y^2\hat{k}$ over the plane surface : $x + y + z = 1$ lying in the first octant. *20*

(e) दर्शाइए कि $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ अघूर्णी है । ϕ को भी ज्ञात कीजिए जबकि $\vec{A} = \nabla\phi$.

Show that $\vec{A} = (6xy + z^3)\hat{i} + (3x^2 - z)\hat{j} + (3xz^2 - y)\hat{k}$ is irrotational. Also find ϕ such that $\vec{A} = \nabla\phi$. *10*

2021

8.(c) स्टोक्स प्रमेय का उपयोग करते हुए $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$ का मान निकालिए, जहाँ पर $\vec{F} = (x^2 + y - 4)\hat{i} + 3xy\hat{j} + (2xy + z^2)\hat{k}$ तथा S, परवलयज $z = 4 - (x^2 + y^2)$ का xy-समतल से ऊपर का पृष्ठ है। यहाँ $\hat{n}$, S पर एकक बहिर्मुखी अभिलंब सदिश है।

Using Stokes' theorem, evaluate $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$,

where $\vec{F} = (x^2 + y - 4)\hat{i} + 3xy\hat{j} + (2xy + z^2)\hat{k}$ and S is the surface of the paraboloid $z = 4 - (x^2 + y^2)$ above the xy-plane. Here, $\hat{n}$ is the unit outward normal vector on S. 15

6.(c) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ का मान निकालिए,

जहाँ C, xy-समतल में एक स्वैच्छिक संवृत वक्र है तथा $\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$ है।

Evaluate $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, where C is an arbitrary closed curve in the xy-plane and 15

$$\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}.$$

7.(a) प्रथम अष्टांशक में $y^2 + z^2 = 9$ तथा $x = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर $\vec{F} = 2x^2y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}$ के लिए गाउस अपसरण प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Gauss divergence theorem for $\vec{F} = 2x^2y\hat{i} - y^2\hat{j} + 4xz^2\hat{k}$ taken over the region in the first octant bounded by $y^2 + z^2 = 9$ and $x = 2$. 20

5.(e) दर्शाइए कि $\nabla^2\left[\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right]=\frac{2}{r^4}$, जहाँ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ है।

Show that $\nabla^2\left[\nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right]=\frac{2}{r^4}$, where $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$. 10

2020

(c) $a,\ b,\ c$ के किस मान के लिए सदिश क्षेत्र

$$\overline{V} = (-4x - 3y + az)\hat{i} + (bx + 3y + 5z)\hat{j} + (4x + cy + 3z)\hat{k}$$

अघूर्णी है? तब $\overline{V}$ को अदिश फलन ϕ की प्रवणता के रूप में व्यक्त कीजिए। ϕ को ज्ञात कीजिए।

For what value of $a,\ b,\ c$ is the vector field

$$\overline{V} = (-4x - 3y + az)\hat{i} + (bx + 3y + 5z)\hat{j} + (4x + cy + 3z)\hat{k}$$

irrotational? Hence, express $\overline{V}$ as the gradient of a scalar function ϕ. Determine ϕ. 10

(b) दिए गए सदिश फलन $\overline{A}$, जहाँ $\overline{A} = (3x^2 + 6y)\hat{i} - 14yz\,\hat{j} + 20xz^2\,\hat{k}$, के लिए $\int_C \overline{A} \cdot d\overline{r}$ का मान निकालिए, जहाँ C बिंदु (0, 0, 0) से (1, 1, 1) तक निम्न पथों से निर्देशित है :

(i) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

5, 23/3, 13/3

(ii) सरल रेखा (0, 0, 0) से (1, 0, 0) तक जोड़ने पर, फिर (1, 1, 0) तक तथा फिर (1, 1, 1) तक

(iii) सरल रेखा (0, 0, 0) से (1, 1, 1) तक जोड़ने पर

क्या सभी स्थितियों में परिणाम समान हैं? कारण की व्याख्या कीजिए।

For the vector function $\overline{A}$, where $\overline{A} = (3x^2 + 6y)\hat{i} - 14yz\,\hat{j} + 20xz^2\,\hat{k}$, calculate $\int_C \overline{A} \cdot d\overline{r}$ from (0, 0, 0) to (1, 1, 1) along the following paths :

(i) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(ii) Straight lines joining (0, 0, 0) to (1, 0, 0), then to (1, 1, 0) and then to (1, 1, 1)

(iii) Straight line joining (0, 0, 0) to (1, 1, 1)

Is the result same in all the cases? Explain the reason. 15

7. (a) स्टोक्स प्रमेय को सत्यापित कीजिए, जबकि सदिश क्षेत्र $\overline{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + xz\hat{k}$ एक सतह S पर है जो कि एक बेलन $z = 1 - x^2$, $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$ का हिस्सा है, जहाँ S उपरिमुखी अभिविन्यस्त है।

Verify the Stokes' theorem for the vector field $\overline{F} = xy\hat{i} + yz\hat{j} + xz\hat{k}$ on the surface S which is the part of the cylinder $z = 1 - x^2$ for $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$; S is oriented upwards.

20

(b) पृष्ठ समाकल $\iint_S \nabla \times \overline{F} \cdot \hat{n}\, dS$ का मान निकालिए, जहाँ $\overline{F} = y\hat{i} + (x - 2xz)\hat{j} - xy\hat{k}$ तथा S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ की सतह है, जो xy-तल के ऊपर है।

Evaluate the surface integral $\iint_S \nabla \times \overline{F} \cdot \hat{n}\, dS$ for $\overline{F} = y\hat{i} + (x - 2xz)\hat{j} - xy\hat{k}$ and S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ above the xy-plane. 15

2019

(c) (i) गाउस के अपसरण प्रमेय का कथन लिखिए। इस प्रमेय को $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ के लिए $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$ और $z = 3$ से घिरे हुए क्षेत्र में सत्यापित कीजिए।

(ii) स्टोक्स प्रमेय के द्वारा $\oint_C e^x dx + 2y dy - dz$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C, वक्र $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ है।

(i) State Gauss divergence theorem. Verify this theorem for $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$, taken over the region bounded by $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0$ and $z = 3$. 15

(ii) Evaluate by Stokes' theorem $\oint_C e^x dx + 2y dy - dz$, where C is the curve $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$. 5

(b) कुंडलिनी $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = au\tan\alpha$ के लिए वक्रता की त्रिज्या तथा विमोटन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

Find the radius of curvature and radius of torsion of the helix $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = au\tan\alpha$. 15

(b) वक्र C के चारों तरफ $\vec{F}$ का परिसंचरण ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{F} = (2x + y^2)\hat{i} + (3y - 4x)\hat{j}$ और C, बिंदु (0, 0) से बिंदु (1, 1) तक वक्र $y = x^2$ के द्वारा तथा बिंदु (1, 1) से बिंदु (0, 0) तक वक्र $y^2 = x$ के द्वारा परिभाषित है।

Find the circulation of $\vec{F}$ round the curve C, where $\vec{F} = (2x + y^2)\hat{i} + (3y - 4x)\hat{j}$ and C is the curve $y = x^2$ from (0, 0) to (1, 1) and the curve $y^2 = x$ from (1, 1) to (0, 0). 15

(e) वक्र $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ के बिंदु (1, 1, 1) पर स्पर्श-रेखा की दिशा में फलन $xy^2 + yz^2 + zx^2$ का दिशात्मक अवकलज ज्ञात कीजिए।

Find the directional derivative of the function $xy^2 + yz^2 + zx^2$ along the tangent to the curve $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ at the point (1, 1, 1). 10

2018

8. *(a)* मान लीजिये कि $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ है। दर्शाइये कि $\text{curl}(\text{curl}\,\vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{v}) - \nabla^2\vec{v}$.

Let $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. Show that $\text{curl}(\text{curl}\,\vec{v}) = \text{grad}(\text{div}\,\vec{v}) - \nabla^2\vec{v}$. 12

(b) स्टोक्स प्रमेय का इस्तेमाल करते हुये रेखा समाकल $\int_C -y^3dx + x^3dy + z^3dz$ का मान निकालिये। यहाँ सिलिन्डर $x^2 + y^2 = 1$ और समतल $x + y + z = 1$ का प्रतिच्छेद C है। C पर अभिविन्यास xy-समतल में वामावर्त गति के संगत है।

Evaluate the line integral $\int_C -y^3dx + x^3dy + z^3dz$ using Stokes' theorem. Here C is the intersection of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the plane $x + y + z = 1$. The orientation on C corresponds to counterclockwise motion in the xy-plane. 13

(c) मान लीजिये कि $\vec{F} = xy^2\vec{i} + (y + x)\vec{j}$ है। ग्रीन के प्रमेय का इस्तेमाल करते हुये प्रथम चतुर्थांश में वक्रों $y = x^2$ और $y = x$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k}$ का समाकलन कीजिये।

Let $\vec{F} = xy^2\vec{i} + (y + x)\vec{j}$. Integrate $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k}$ over the region in the first quadrant bounded by the curves $y = x^2$ and $y = x$ using Green's theorem. 13

(b) वक्र

$$\vec{r} = a(u - \sin u)\vec{i} + a(1 - \cos u)\vec{j} + bu\,\vec{k}$$

की वक्रता और विमोटन ज्ञात कीजिये।

Find the curvature and torsion of the curve

$$\vec{r} = a(u - \sin u)\vec{i} + a(1 - \cos u)\vec{j} + bu\,\vec{k}$$ 12

(d) अगर गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ का पृष्ठ S है, तो गाउस के अपसरण प्रमेय का इस्तेमाल करते हुये

$$\iint_S [(x+z)\,dydz + (y+z)\,dzdx + (x+y)\,dxdy]$$

का मान निकालिये।

If S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, then evaluate

$$\iint_S [(x+z)\,dydz + (y+z)\,dzdx + (x+y)\,dxdy]$$

using Gauss' divergence theorem. 12

2017

8.(c) (i) समाकलन $\iint_S \overline{F}\cdot\hat{n}ds$ का अभिसरण प्रमेय से हल कीजिए :

जहाँ पर $\overline{F} = 3xy^2\,\hat{i} + (yx^2 - y^3)\,\hat{j} + 3zx^2\,\hat{k}$

तथा S बेलन $y^2 + z^2 \leq 4, -3 \leq x \leq 3$ का पृष्ठ है ।

(i) Evaluate the integral : $\iint_S \overline{F}\cdot\hat{n}ds$ where $\overline{F} = 3xy^2\,\hat{i} + (yx^2 - y^3)\,\hat{j} + 3zx^2\,\hat{k}$ and S is a surface of the cylinder $y^2 + z^2 \leq 4, -3 \leq x \leq 3$, using divergence theorem. 9

8.(c) (ii) ग्रीन्स प्रमेय का प्रयोग कर $\int_C F(\overline{r})\cdot d\overline{r}$ का वामावर्त्ती दिशा में मूल्यांकन कीजिए :

जहाँ पर $F(\overline{r}) = (x^2 + y^2)\,\hat{i} + (x^2 - y^2)\,\hat{j}$

तथा $d\overline{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ और वक्र C, क्षेत्र $R = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2 - x^2\}$ की परिधि है ।

(ii) Using Green's theorem, evaluate the $\int_C F(\overline{r})\cdot d\overline{r}$ counterclockwise where $F(\overline{r}) = (x^2 + y^2)\,\hat{i} + (x^2 - y^2)\,\hat{j}$ and $d\overline{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ and the curve C is the boundary of the region $R = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2 - x^2\}$. 8

7.(a) वक्र $\bar{r} = (a\cos\theta, a\sin\theta, a\theta)$ के किसी भी बिन्दु $\bar{r} = (\theta)$ पर वक्रता-सदिश व इसका परिमाण निकालिए। दर्शाइये कि मूल बिन्दु से स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्बपाद का बिन्दु-पथ एक वक्र है जो पूर्णरूप से अतिपरवलयज $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ पर स्थित है।

Find the curvature vector and its magnitude at any point $\bar{r} = (\theta)$ of the curve $\bar{r} = (a\cos\theta, a\sin\theta, a\theta)$. Show that the locus of the feet of the perpendicular from the origin to the tangent is a curve that completely lies on the hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$. 16

5.(e) समय t पर एक गतिमान बिन्दु का स्थिति सदिश $\bar{r} = \sin t\,\hat{i} + \cos 2t\,\hat{j} + (t^2 + 2t)\,\hat{k}$ है। इसके त्वरण $\bar{a}$ के अवयव वेग-सदिश $\bar{v}$ के समान्तर दिशा में तथा $\bar{r}$ व $\bar{v}$ के तल के लम्बवत् दिशा में समय $t = 0$ पर ज्ञात कीजिए।

The position vector of a moving point at time t is $\bar{r} = \sin t\,\hat{i} + \cos 2t\,\hat{j} + (t^2 + 2t)\,\hat{k}$. Find the components of acceleration $\bar{a}$ in the directions parallel to the velocity vector $\bar{v}$ and perpendicular to the plane of $\bar{r}$ and $\bar{v}$ at time $t = 0$. 10

5.(d) स्थिरांकों a, b व c के किन मानों के लिए सदिश $\overline{V} = (x + y + az)\,\hat{i} + (bx + 2y - z)\,\hat{j} + (-x + cy + 2z)\,\hat{k}$ अघूर्णी है। इन मानों के साथ इस सदिश के बेलनी-निर्देशांकों में अपसारिता ज्ञात कीजिए।

For what values of the constants a, b and c the vector $\overline{V} = (x + y + az)\,\hat{i} + (bx + 2y - z)\,\hat{j} + (-x + cy + 2z)\,\hat{k}$ is irrotational. Find the divergence in cylindrical coordinates of this vector with these values. 10

5.(e) समय t पर एक गतिमान बिन्दु का स्थिति सदिश $\overline{r} = \sin t\,\hat{i} + \cos 2t\,\hat{j} + (t^2 + 2t)\,\hat{k}$ है। इसके त्वरण $\overline{a}$ के अवयव वेग-सदिश $\overline{v}$ के समान्तर दिशा में तथा $\overline{r}$ व $\overline{v}$ के तल के लम्बवत् दिशा में समय $t = 0$ पर ज्ञात कीजिए।

The position vector of a moving point at time t is $\overline{r} = \sin t\,\hat{i} + \cos 2t\,\hat{j} + (t^2 + 2t)\,\hat{k}$. Find the components of acceleration $\overline{a}$ in the directions parallel to the velocity vector $\overline{v}$ and perpendicular to the plane of $\overline{r}$ and $\overline{v}$ at time $t = 0$. 10

2016

(*d*) दर्शाइये कि कार्डिऑइड (cardioid) $r = a(1 + \cos\theta)$ के किसी बिन्दु (r, θ) पर वक्रता-त्रिज्या (radius of curvature) का वर्ग r के समानुपाती है। $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ पर वक्रता-त्रिज्या भी ज्ञात कीजिये।

For the cardioid $r = a(1 + \cos\theta)$, show that the square of the radius of curvature at any point (r, θ) is proportional to r. Also find the radius of curvature if $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. 15

8. *(a)* $f(r)$ निकालिये, इस प्रकार कि $\nabla f = \frac{\vec{r}}{r^5}$ तथा $f(1) = 0$ हो।

Find $f(r)$ such that $\nabla f = \frac{\vec{r}}{r^5}$ and $f(1) = 0$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि

Prove that

$$\oint_C f\, d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \times \nabla f$$

10

(b) सिद्ध कीजिये कि सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ एक त्रिभुज की भुजाएँ बना सकते हैं। इस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाई निकालिये।

Prove that the vectors $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{c} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}$ can form the sides of a triangle. Find the lengths of the medians of the triangle. 10

2015

Q. 8(c) निम्नलिखित का मान निकालिए

$$\int_C e^{-x}(\sin y\,dx + \cos y\,dy)$$

जहाँ C एक आयत है, जिसके $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ शीर्ष हैं।

Evaluate $\int_C e^{-x}(\sin y\,dx + \cos y\,dy)$, where C is the rectangle with vertices $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 12

Q. 7(c) एक सदिश क्षेत्र

$$\vec{F} = (x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2y)\hat{j}$$

के दिया गया है। सत्यापित कीजिए कि यह क्षेत्र $\vec{F}$ अघूर्णी है या नहीं। अत: अदिश विभव ज्ञात कीजिये।

A vector field is given by

$$\vec{F} = (x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2y)\hat{j}$$

Verify that the field $\vec{F}$ is irrotational or not. Find the scalar potential. 12

Q. 6(c) यदि दो पृष्ठ $\lambda x^2 - \mu yz = (\lambda + 2)x$ तथा $4x^2y + z^3 = 4$ बिन्दु (1, –1, 2) पर लम्बवत् काटती हों, तो λ व μ का मान निकालिए।

Find the value of λ and μ so that the surfaces $\lambda x^2 - \mu yz = (\lambda + 2)x$ and $4x^2y + z^3 = 4$ may intersect orthogonally at (1, –1, 2). 12

Q. 5(e) निम्न दो सतहों $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ तथा $z = x^2 + y^2 - 3$ के बीच बिन्दु (2, –1, 2) पर कोण ज्ञात कीजिये।

Find the angle between the surfaces $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ and $z = x^2 + y^2 - 3$ at (2, –1, 2).

2014

(c) स्टोक्स के प्रमेय के द्वारा मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_{\Gamma} (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$$

जहाँ Γ वक्र है $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0$, $x + y = 2a$, जो कि $(2a, 0, 0)$ से शुरू होता है और फिर z-समतल के नीचे से होकर जाता है ।

Evaluate by Stokes' theorem

$$\int_{\Gamma} (y\,dx + z\,dy + x\,dz)$$

where Γ is the curve given by $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2ay = 0$, $x + y = 2a$, starting from $(2a, 0, 0)$ and then going below the z-plane. *20*

(e) वक्र $\bar{r}(t) = t \cos t \, \hat{i} + t \sin t \, \hat{j}, \; 0 \le t \le 2\pi$ के किसी भी बिन्दु पर वक्रता सदिश ज्ञात कीजिए । उसका परिमाण भी बताइए ।

Find the curvature vector at any point of the curve

$\bar{r}(t) = t \cos t \, \hat{i} + t \sin t \, \hat{j}, \; 0 \le t \le 2\pi.$

Give its magnitude also. *10*

2013

10

5.(e) Show that the curve

$$\vec{x}(t) = t\hat{i} + \left(\frac{1+t}{t}\right)\hat{j} + \left(\frac{1-t^2}{t}\right)\hat{k}$$ lies in a plane.

10

8.(a) Calculate $\nabla^2(r^n)$ and find its expression in terms of r and n, r being the distance of any point (x, y, z) from the origin, n being a constant and ∇^2 being the Laplace operator. 10

8.(b) A curve in space is defined by the vector equation $\vec{r} = t^2\hat{i} + 2t\hat{j} - t^3\hat{k}$. Determine the angle between the tangents to this curve at the points $t = +1$ and $t = -1$. 10

8.(c) By using Divergence Theorem of Gauss, evaluate the surface integral

$\iint\left(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right)^{-\frac{1}{2}} dS$, where S is the surface of the ellipsoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, a, b and c being all positive constants. 15

8.(d) Use Stokes' theorem to evaluate the line integral $\int_C\left(-y^3dx + x^3dy - z^3dz\right)$, where C is the intersection of the cylinder $x^2 + y^2 = 1$ and the plane $x + y + z = 1$. 15

2012

(e) If

$$\vec{A} = x^2yz\vec{i} - 2xz^3\vec{j} + xz^2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2z\vec{i} + y\vec{j} - x^2\vec{k}$$

find the value of $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\vec{A} \times \vec{B})$ at $(1, 0, -2)$. 12

(b) Verify Green's theorem in the plane for

$$\oint_C [(xy + y^2)\, dx + x^2 dy]$$

where C is the closed curve of the region bounded by $y = x$ and $y = x^2$. 20

(c) If $\vec{F} = y\vec{i} + (x - 2xz)\vec{j} - xy\vec{k}$, evaluate

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, d\vec{s}$$

where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ above the xy-plane. 20

8. *(a)* Derive the Frenet-Serret formulae. Define the curvature and torsion for a space curve. Compute them for the space curve

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = \frac{2}{3}t^3$$

Show that the curvature and torsion are equal for this curve. 20

2011

15

(b) If $\vec{u} = 4y\hat{i} + x\hat{j} + 2z\hat{k}$, calculate the double integral

$$\iint (\nabla \times \vec{u}) \cdot d\vec{s}$$

over the hemisphere given by

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad z \geq 0.$$ 15

(c) If $\vec{r}$ be the position vector of a point, find the value(s) of n for which the vector

$$r^n \, \vec{r}$$

is (i) irrotational, (ii) solenoidal. 15

(d) Verify Gauss' Divergence Theorem for the vector

$$\vec{v} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$$

taken over the cube

$$0 \leq x, y, z \leq 1.$$ 15

Examrace

8. (a) Examine whether the vectors ∇u, ∇v and ∇w are coplanar, where u, v and w are the scalar functions defined by :

$$u = x + y + z,$$

$$v = x^2 + y^2 + z^2$$

and $w = yz + zx + xy.$ 15

10

(e) For two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ given respectively by

$$\vec{a} = 5t^2\hat{i} + t\,\hat{j} - t^3\hat{k}$$

and $\vec{b} = \sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j}$

determine :

(i) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

and (ii) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. 10

(f) If u and v are two scalar fields and $\vec{f}$ is a vector field, such that

$$u\,\vec{f} = \text{grad } v,$$

find the value of

$\vec{f}\cdot\text{curl }\vec{f}$ 10

Examrace

2010

(c) Verify Green's theorem for

$$e^{-x} \sin y \, dx + e^{-x} \cos y \, dy$$

the path of integration being the boundary of the square whose vertices are $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ and $(0, \pi/2)$. 20

(c) Use the divergence theorem to evaluate

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

where $\vec{V} = x^2 z \vec{i} + y \vec{j} - xz^2 \vec{k}$ and S is the boundary of the region bounded by the paraboloid $z = x^2 + y^2$ and the plane $z = 4y$. 20

falling down the second half. 20

(c) Prove that

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f(\operatorname{div}\vec{V}) + (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{V}$$

where f is a scalar function. 20

(e) Find the directional derivative of

$$f(x, y) = x^2y^3 + xy$$

at the point (2, 1) in the direction of a unit vector which makes an angle of $\pi/3$ with the x-axis. 12

(f) Show that the vector field defined by the vector function

$$\vec{V} = xyz(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$$

is conservative. 12

(c) Find κ / τ for the curve

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$$ 12