Calculus PYQs 2010-21

2021

done

1.(c) दिया गया है :

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} f(x+\alpha) & f(x+2\alpha) & f(x+3\alpha) \\ f(\alpha) & f(2\alpha) & f(3\alpha) \\ f'(\alpha) & f'(2\alpha) & f'(3\alpha) \end{vmatrix}$$

जहाँ f एक वास्तविक-मान अवकलनीय फलन है तथा α एक अचर है।

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Delta(x)}{x}$ को ज्ञात कीजिए।

Given :

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} f(x+\alpha) & f(x+2\alpha) & f(x+3\alpha) \\ f(\alpha) & f(2\alpha) & f(3\alpha) \\ f'(\alpha) & f'(2\alpha) & f'(3\alpha) \end{vmatrix}$$

where f is a real valued differentiable function and α is a constant.

Find $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Delta(x)}{x}$.

done

1.(d) दर्शाइए कि $e^x \cos x = 1$ के किन्हीं दो मूलों के बीच में $e^x \sin x - 1 = 0$ का कम से कम एक मू[ल] विद्यमान है।

Show that between any two roots of $e^x \cos x = 1$, there exists at least one root [of] $e^x \sin x - 1 = 0$.

done

2.(b) दिया गया है : $f(x, y) = |x^2 - y^2|$, तब $f_{xy}(0, 0)$ तथा $f_{yx}(0, 0)$ ज्ञात कीजिए। अत: दर्शाइए कि $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$।

Given that $f(x, y) = |x^2 - y^2|$. Find $f_{xy}(0, 0)$ and $f_{yx}(0, 0)$.

Hence show that $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$.

2.(c) दर्शाइए कि $S = \{(x, 2y, 3x) : x, y$ वास्तविक संख्याएँ हैं$\}$ $R^3(R)$ का एक उपसमष्टि है। S के दो आधार ज्ञात कीजिए। S की विमा भी ज्ञात कीजिए।

Show that $S = \{(x, 2y, 3x) : x, y$ are real numbers$\}$ is a subspace of $R^3(R)$. Find two bases of S. Also find the dimension of S. 15

done 3.(a)(i) यदि $u = x^2 + y^2, v = x^2 - y^2$, जहाँ पर $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ हैं, तब $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}$ ज्ञात कीजिए।

If $u = x^2 + y^2, v = x^2 - y^2$, where $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, then find $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(r,\theta)}$. 7

done 3.(a)(ii) यदि $\int_0^x f(t)\,dt = x + \int_x^1 t f(t)\,dt$ है, तो $f(1)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\int_0^x f(t)\,dt = x + \int_x^1 t f(t)\,dt$, then find the value of $f(1)$. 5

3.(a)(iii) $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n\,dx$ को बीटा-फलन के रूप में व्यक्त कीजिए।

Express $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n\,dx$ in terms of Beta function. 8

Vector Analysis 4.(b) दर्शाइए कि ऐस्ट्रॉइड : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का पूरा क्षेत्रफल $\frac{3}{8}\pi a^2$ है।

Show that the entire area of the Astroid : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ is $\frac{3}{8}\pi a^2$. 15

2020

2. (a) $\int_0^1 \tan^{-1}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$ का मान निकालिए।

Evaluate $\int_0^1 \tan^{-1}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$.

done

done (d) वक्र $(2x+3)y=(x-1)^2$ के सभी अनंतस्पर्शी निकालिए।

Find all the asymptotes of the curve $(2x+3)y=(x-1)^2$.

3. (a) निम्न फलन पर विचार कीजिए :

$$f(x)=\int_0^x (t^2-5t+4)(t^2-5t+6)\,dt$$

done

(i) फलन $f(x)$ के क्रांतिक बिंदु निकालिए।

(ii) वे बिंदु निकालिए, जहाँ $f(x)$ का स्थानीय न्यूनतम होगा।

(iii) वे बिंदु निकालिए, जहाँ $f(x)$ का स्थानीय अधिकतम होगा।

(iv) फलन $f(x)$ के $[0, 5]$ में कितने शून्यक होंगे, निकालिए।

Consider the function $f(x)=\int_0^x (t^2-5t+4)(t^2-5t+6)\,dt$.

(i) Find the critical points of the function $f(x)$. 1, 2, 3, 4

(ii) Find the points at which local minimum occurs. 2, 3, 4

(iii) Find the points at which local maximum occurs. 1, 3

(iv) Find the number of zeros of the function $f(x)$ in $[0, 5]$. — 5 20

done (c) लाग्रांज की अनिर्धारित गुणक विधि का प्रयोग करके फलन $u=x^2+y^2+z^2$ का चरम मान ज्ञात कीजिए, जो $2x+3y+5z=30$ शर्त द्वारा प्रतिबंधित है।

Find an extreme value of the function $u=x^2+y^2+z^2$, subject to the condition $2x+3y+5z=30$, by using Lagrange's method of undetermined multiplier. 20

$\lambda = -\frac{30}{19}$ $u = \frac{450}{19}$

2019

1\. (a) माना कि $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन है, जैसा कि

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{4x^2 - \pi^2}, \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

Let $f:\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{4x^2 - \pi^2}, \quad 0 \le x < \frac{\pi}{2}$$

Find the value of $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. $\frac{1}{16}$ 10

done

(b) माना कि $f: D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ एक फलन है और $(a, b) \in D$. अगर $f(x, y)$ बिंदु (a, b) पर संतत है, तो दर्शाइए कि फलन $f(x, b)$ और $f(a, y)$ क्रमशः $x = a$ और $y = b$ पर संतत हैं।

Let $f: D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ be a function and $(a, b) \in D$. If $f(x, y)$ is continuous at (a, b), then show that the functions $f(x, b)$ and $f(a, y)$ are continuous at $x = a$ and at $y = b$ respectively. 10

2\. (a) क्या $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$, $x = \frac{\pi}{2}$ पर अवकलनीय है? अगर आपका उत्तर हाँ है, तो $f(x)$ का अवकलज $x = \frac{\pi}{2}$ पर ज्ञात कीजिए। अगर आपका उत्तर ना है, तो अपने उत्तर का प्रमाण दीजिए।

Is $f(x) = |\cos x| + |\sin x|$ differentiable at $x = \frac{\pi}{2}$? If yes, then find its derivative at $x = \frac{\pi}{2}$. If no, then give a proof of it. 15

done

3. (a) फलन $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$ का अंतराल [2, 3] पर अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

Find the maximum and the minimum value of the function $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$ on the interval [2, 3]. 15

max at 3

done

2018

(c) निर्धारित कीजिये कि $\lim_{z \to 1} (1 - z) \tan \frac{\pi z}{2}$ का अस्तित्व है या कि नहीं। अगर यह सीमा विद्यमान है, तो इसका मान ज्ञात कीजिये।

Determine if $\lim_{z \to 1} (1 - z) \tan \frac{\pi z}{2}$ exists or not. If the limit exists, then find its value. 10

done

(b) मान लीजिये कि

$$f(x, y) = xy^2, \quad \text{यदि} \quad y > 0$$
$$= -xy^2, \quad \text{यदि} \quad y \leq 0$$

निर्धारित कीजिये कि $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ और $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ में से किसका अस्तित्व है और किसका अस्तित्व नहीं है।

Let

$$f(x, y) = xy^2, \quad \text{if} \quad y > 0$$
$$= -xy^2, \quad \text{if} \quad y \leq 0$$

Determine which of $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ and $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ exists and which does not exist. 12

done

4. (a) अन्तराल [2, 3] पर $x^4 - 5x^2 + 4$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिये।

Find the maximum and the minimum values of $x^4 - 5x^2 + 4$ on the interval [2, 3]. 13

done

(b) समाकल $\int_0^a \int_{x/a}^x \frac{x\,dy\,dx}{x^2 + y^2}$ का मान निकालिये।

Evaluate the integral $\int_0^a \int_{x/a}^x \frac{x\,dy\,dx}{x^2 + y^2}$. 12

done

(c) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ x-अक्ष के चारों तरफ परिभ्रमण कर रहा है। परिक्रमित घन का आयतन ज्ञात कीजिये।

The ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ revolves about the x-axis. Find the volume of the solid of revolution. 13

done

2017

1.(c) प्रान्त $R:\{-3\leq x^2-y^2\leq 3,\ 1\leq xy\leq 4\}$ पर फलन $f(x,\ y)=xy\,(x^2+y^2)$ का समाकलन कीजिए।

Integrate the function $f(x,\ y)=xy\,(x^2+y^2)$ over the domain $R:\{-3\leq x^2-y^2\leq 3,$ $1\leq xy\leq 4\}$. 10

done

2.(a) xy-तल के ऊपर के और ठीक नीचे के दीर्घवृत्तीय पैराबोलौएड $x^2+\frac{y^2}{4}=z$, जो समतल $z=9$ से कटा हुआ है, का आयतन मालूम कीजिए।

Find the volume of the solid above the xy-plane and directly below the portion of the elliptic paraboloid $x^2+\frac{y^2}{4}=z$ which is cut off by the plane $z=9$. 15

done

3.(c) यदि $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,\ 0)\\ 0, & (x,y)=(0,\ 0),\end{cases}$

तब $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ व $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ की $(0,\ 0)$ का परिकलन कीजिए।

If $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,\ 0)\\ 0, & (x,y)=(0,\ 0),\end{cases}$

calculate $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ and $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ at $(0,\ 0)$. 15

done

4.(c) परीक्षण कीजिए कि क्या अनंत समाकल $\int_0^3 \frac{2x\,dx}{(1-x^2)^{2/3}}$ का अस्तित्व है।

Examine if the improper integral $\int_0^3 \frac{2x\,dx}{(1-x^2)^{2/3}}$ exists. 10

4.(d) सिद्ध कीजिए कि $\frac{\pi}{3} \leqslant \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \leqslant \pi$ जहाँ पर D एकक डिस्क है।

Prove that $\frac{\pi}{3} \leqslant \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}} \leqslant \pi$ where D is the unit disc. 10

done

2016

(c) मान निकालिये :

Evaluate : 10

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{x \log\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx$$

3. (a) $x^2+y^2+z^2$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान निकालिये, जहाँ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ तथा $x+y-z=0$ हो।

Find the maximum and minimum values of $x^2+y^2+z^2$ subject to the conditions $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ and $x+y-z=0$. 20

done

(b) मान लीजिये

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y-5x^2y^2+y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

done

$\delta > 0$ प्राप्त कीजिये इस प्रकार कि $|f(x, y) - f(0, 0)| < \cdot 01$, जब $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ हो।

Let

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4 y - 5x^2 y^2 + y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Find a $\delta > 0$ such that $|f(x, y) - f(0, 0)| < \cdot 01$, whenever $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. 15

done

(c) $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ का मान निकालिये, जहाँ आयत $R = [0, 1; 0, 1]$ तथा

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{यदि } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 \quad , & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है।

Evaluate $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ over the rectangle $R = [0, 1; 0, 1]$ where

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{if } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 \quad , & \text{elsewhere} \end{cases}$$

15

done

(c) तल $x + 2y + 2z = 12$ के $x = 0,\ y = 0$ तथा $x^2 + y^2 = 16$ द्वारा काटे गये क्षेत्र का पृष्ठीय क्षेत्रफल (surface area) निकालिये।

Find the surface area of the plane $x + 2y + 2z = 12$ cut off by $x = 0,\ y = 0$ and $x^2 + y^2 = 16$. 15

done

2015

Q. 1(c) निम्नलिखित सीमा का मान निकालिए :

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}.$$

Evaluate the following limit :

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}.$$ 10

done

Q. 1(d) निम्नलिखित समाकल का मान निकालिए :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}}\, dx.$$

done

Evaluate the following integral :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}}\, dx.$$ 10

Q. 2(b) एक शंक्वाकार टेंट एक दत्त क्षमता का है। यदि उस टेंट में न्यूनतम कैनवास लगाना हो, तो उसकी ऊँचाई का उसके आधार की त्रिज्या पर अनुपात मालूम कीजिये।

A conical tent is of given capacity. For the least amount of Canvas required, for it, find the ratio of its height to the radius of its base. 13

done

Q. 3(b) गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ पर स्थित बिन्दु निकालिए जो बिन्दु (2, 1, 3) से अधिकतम दूरी पर है।

Which point of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ is at the maximum distance from the point (2, 1, 3) ? 13

done

Q. 3(d) निम्न समाकलन का मूल्यांकन करें :

$$\iint_R (x-y)^2 \cos^2(x+y)\, dx\, dy$$

जहाँ R एक समचतुर्भुज है, जिसके शीर्ष क्रमवार $(\pi, 0)$ $(2\pi, \pi)$ $(\pi, 2\pi)$ $(0, \pi)$ हैं।

Evaluate the integral

done

$$\iint_R (x-y)^2 \cos^2(x+y)\, dx\, dy$$

where R is the rhombus with successive vertices as $(\pi, 0)$ $(2\pi, \pi)$ $(\pi, 2\pi)$ $(0, \pi)$. 12

Q. 4(a) निम्नलिखित का मान निकालिए :

$$\iint_R \sqrt{|y-x^2|}\, dx\, dy$$

जहाँ R = [–1, 1 ; 0, 2].

Evaluate $\iint_R \sqrt{|y-x^2|}\, dx\, dy$

where R = [–1, 1 ; 0, 2]. 13

done

Q. 4(d) दिए गए फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x\sqrt{y}}{x^2 + y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए सांतत्य एवं अवकलनीयता का परीक्षण कीजिये।

For the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x\sqrt{y}}{x^2 + y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Examine the continuity and differentiability. 12

done

2014

(c) सिद्ध कीजिए कि $e^x \cos x + 1 = 0$ के दो वास्तविक मूलों के बीच $e^x \sin x + 1 = 0$ का एक वास्तविक मूल स्थित है ।

Prove that between two real roots of $e^x \cos x + 1 = 0$, a real root of $e^x \sin x + 1 = 0$ lies. *10*

done

(d) मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{\log_e (1+x)}{1+x^2}\, dx$$

Evaluate : *10*

$$\int_0^1 \frac{\log_e (1+x)}{1+x^2}\, dx$$

done

(c) रूपांतर $x + y = u$, $y = uv$ का प्रयोग करते हुए, समाकल $\iint \{xy(1 - x - y)\}^{1/2}\, dx\, dy$ का सीधी रेखाएँ $x = 0$, $y = 0$ तथा $x + y = 1$ के द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर मूल्यांकन कीजिए ।

By using the transformation $x + y = u$, $y = uv$, evaluate the integral $\iint \{xy(1 - x - y)\}^{1/2}\, dx\, dy$ taken over the area enclosed by the straight lines $x = 0$, $y = 0$ and $x + y = 1$. *15*

done

(a) एक ऐसे महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जो कि a त्रिज्या के गोले के भीतर आ सके ।

Find the height of the cylinder of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius a. *15*

done

2013

1.(c) Evaluate $\int_0^1 \left(2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) dx$. 10

10

3.(a) Using Lagrange's multiplier method, find the shortest distance between the line $y = 10 - 2x$ and the ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. 20

done

3.(b) Compute $f_{xy}(0, 0)$ and $f_{yx}(0, 0)$ for the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Also, discuss the continuity of f_{xy} and f_{yx} at (0, 0). 15

3.(c) Evaluate $\iint xy\, dA$, where D is th...

... continuity of f_{xy} and f_{yx} at (0, 0). 15

3.(c) Evaluate $\iint_D xy\, dA$, where D is the region bounded by the line $y = x - 1$ and the parabola $y^2 = 2x + 6$. 15

4.(a) Show that three mutually perpendicul...

2012

1. *(a)* Define a function f of two real variables in the xy-plane by

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos\frac{1}{y} + y^3 \cos\frac{1}{x}}{x^2 + y^2} & \text{for } x, y \neq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Check the continuity and differentiability of f at $(0, 0)$. 12

(b) Let p and q be positive real numbers such that $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Show that for real numbers $a, b \geq 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$ 12

3. *(a)* Find the points of local extrema and saddle points of the function f of two variables defined by

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 63(x + y) + 12xy$$ 20

(c) Find all the real values of p and q so that the integral $\int_0^1 x^p (\log \frac{1}{x})^q \, dx$ converges. 20

4. *(a)* Compute the volume of the solid enclosed between the surfaces $x^2 + y^2 = 9$ and $x^2 + z^2 = 9$. 20

2011

(c) Find $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^3 + y^3}$ if it exists. 10

(d) Let f be a function defined on $\mathbb{R}$ such that $f(0) = -3$ and $f'(x) \le 5$ for all values of x in $\mathbb{R}$. How large can f(2) possibly be ? 10

3. (a) Evaluate :

(i) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, where $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ \pi, & x = 2 \end{cases}$

(ii) $\int_0^1 \ell n\, x\, dx$. (8, 12)

(b) Find the points on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ that are closest to and farthest from the point (3, 1, −1). 20

(c) Find the volume of the solid that lies under the paraboloid $z = x^2 + y^2$ above the xy-plane and inside the cylinder $x^2 + y^2 = 2x$. 20

2010

(d) Does the integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\, dx$ exist?

If so, find its value. 12

(f) Show that the function

$$f(x) = [x^2] + |x - 1|$$

is Riemann integrable in the interval $[0, 2]$, where $[\alpha]$ denotes the greatest integer less than or equal to α. Can you give an example of a function that is not Riemann integrable on $[0, 2]$? Compute $\int_0^2 f(x)\, dx$, where $f(x)$ is as above. 12

(b) Show that a box (rectangular parallelopiped) of maximum volume V with prescribed surface area is a cube. 20

(b) Let D be the region determined by the inequalities $x > 0$, $y > 0$, $z < 8$ and $z > x^2 + y^2$. Compute

$$\iiint_D 2x\, dx\, dy\, dz$$ 20

(b) If $f(x, y)$ is a homogeneous function of degree n in x and y, and has continuous first- and second-order partial derivatives, then show that

(i) $x \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$

(ii) $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$= n(n-1)f$$

20