

**EXERCICE 1**

Une petite bille métallique est lachée sans vitesse initiale d'une hauteur  $h_0$  au dessus du plancher. Elle arrive sur le plancher avec une vitesse  $V_0$ , rebondit avec une vitesse verticale  $V_1$  telle que

$V_1 = r.V_0$ . Elle remonte alors d'une hauteur  $h_1$ , retombe au plancher et remonte avec une vitesse verticale  $V_2$  telle que

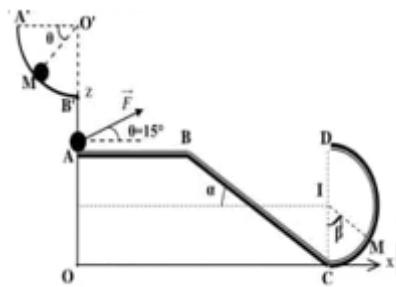
$V_2 = r.V_1$ . Elle remonte d'une hauteur  $h_2$ , puis retombe au plancher et rebondit avec une vitesse verticale  $V_3$  telle que  $V_3 = r.V_2$ . . . et ainsi de suite.  $r$  est une constante positive appelé coefficient de restitution.

1. Donner les expressions de  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4$ , .....  $h_n$  en fonction de  $r$  et  $h_0$ .
2. Déterminer la valeur de  $r$  sachant que  $h_{10} = 10^{-2}h_0$ .

**EXERCICE 2**

Une bille assimilable à un point matériel de masse  $m = 100\text{g}$  glisse sur un circuit A'B'ABCD :

- Une partie A'B' circulaire de rayon  $r = 20\text{cm}$
  - Une partie AB rectiligne et  $AB = 40\text{cm}$
  - Une partie BC incliné d'un angle  $\alpha = 30^\circ$
  - Une partie CD circulaire de centre I et de rayon  $r = 10\text{cm}$
- 1) On lâche le solide S sans vitesse initiale en A'. On néglige les frottements le long du circuit
    - a) Exprimer le travail du poids en M en fonction de  $r, \theta$  et  $m$
    - b) Exprimer et calculer la vitesse  $V_B$
    - c) Au point B' la bille quitte la partie A'B' et arrive en A avec une vitesse  $V_A = 4 \text{ m.s}^{-1}$ . Calculer la hauteur  $H$  entre A' et A.
  - 2) Sur la partie AB la bille est en mouvement rectiligne uniforme
    - a) Calculer le travail de  $\vec{F}$  au cours de déplacement AB. On donne  $F = 6 \text{ N}$ .
    - b) Quelle est la nature de ce contact entre la bille et le plan AB
    - c) Calculer la vitesse  $V_C$  de la bille en C. on donne  $BC = 60\text{cm}$
    - d) Exprimer le travail du poids entre C et M en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $\beta$ . En déduire le travail de poids entre C et D.
    - e) En réalité il y'a frottement entre B et C et la bille arrive en C avec une vitesse  $V'_C = 2,6\text{m.s}^{-1}$ . Calculer dans ce cas l'intensité des forces de frottements  $f$ .



### EXERCICE 3

Un solide ponctuel de masse  $m$ , initialement au repos en  $A$ , est lancé sur la piste  $ABD$  située dans le plan vertical. Sur toute la partie  $AB$  de longueur  $L$ , le solide est soumis à une force  $\vec{F}$  horizontale d'intensité constante  $F$ . La partie  $AB$  de la piste est horizontale et la partie  $BD$  est un demi-cercle de centre  $C$  et de rayon  $r$ . On suppose que la piste est parfaitement lisse et la résistance de l'air est négligeable.

1. Déterminer la vitesse  $V_B$  du solide en  $B$  en fonction de  $F$ ,  $m$  et  $L$ .
2. Le solide aborde maintenant la partie circulaire de la piste.
  - 2.1 Par application du théorème de l'énergie cinétique, exprimer la vitesse  $V$  du solide en un point  $M$  en fonction de  $F$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $L$ ,  $\theta$  et  $g$ .
  - 2.2 En déduire l'expression de la vitesse  $V_D$  du solide au point  $D$
  - 2.3 L'intensité  $R$  de la réaction de la piste sur le solide est donnée par la relation :

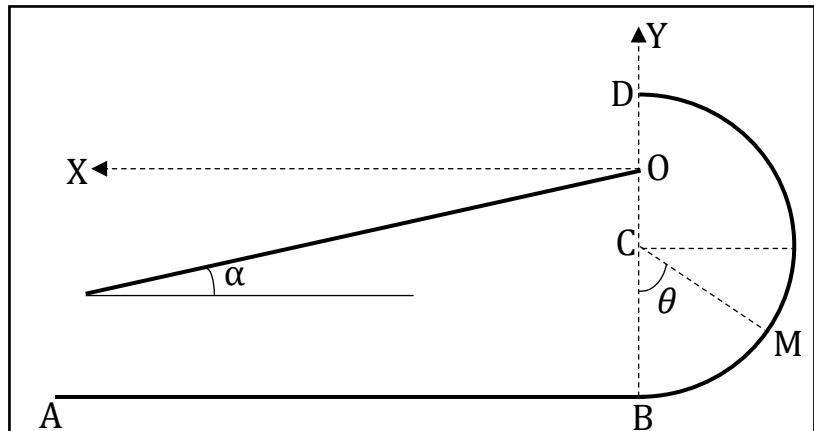
$$R = m \frac{V^2}{r} + mg \cos \theta .$$

Pour quelle minimale  $F_0$  de  $F$  le solide quitte-t-il la piste en  $D$  ?  
Calculer  $F_0$  pour  $m = 0,5 \text{ kg}$ ,  $r = 1 \text{ m}$ ,  $L = 1,5 \text{ m}$  et  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

3. Lancé entre  $A$  et  $B$  avec une force  $F_0 = 8,17 \text{ N}$ , le solide quitte la piste en  $D$  avec une vitesse  $V_D$  et retombe en un point  $I$  sur une piste inclinée d'un angle  $\alpha = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale.

- 3.1 Calculer la valeur de la vitesse  $V_D$ .
- 3.2 L'équation de la trajectoire du solide entre le point  $D$  et le point  $I$  est donnée par la relation :  $y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_D^2} + h$ . A quelle distance  $L' = OI$  le solide retombe-t-il sur la piste inclinée ?

On donne :  $h = OD = 0,5 \text{ m}$



### EXERCICE 4

On rappelle que le moment d'inertie d'une tige homogène de masse  $m$  et de longueur  $2l$  par rapport à un axe passant par son centre O est  $J_0 = \frac{1}{3} ml^2$

Une tige homogène de longueur  $AB = 2l$ , de masse  $m = 12m_0$  est mobile autour d'un axe horizontal ( $\Delta$ ) passant par son centre d'inertie O. La barre est munie à chacune de ses extrémités d'une masselotte quasi ponctuelle de valeurs

$$\mu_A = 3m_0 \text{ et } \mu_B = 7m_0.$$

1. Le système (tige + masselottes), écartée de la verticale d'un angle  $\theta_0 = 60^\circ$  est lâchée sans vitesse initiale.

1.1 Exprimer le moment d'inertie  $J_0$  de la tige en fonction de  $m_0$  et  $l$ .

1.2 Montrer que le moment d'inertie  $J_\Delta$  de l'ensemble (tige + masselottes) est donnée par la relation :

$$J_\Delta = 14 m_0 l^2$$

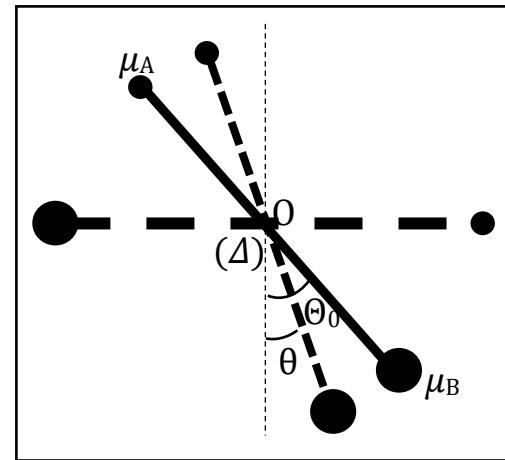
1.3 Par application du T.E.C, montrer que la vitesse angulaire du système (tige + masselottes), lors de son passage par la position où elle fait un angle  $\theta$  avec la verticale a pour expression :  $\omega =$

$$\sqrt{\frac{4g(\cos\theta - \cos\theta_0)}{7l}}$$

1.4 En déduire la valeur de la vitesse angulaire du système (tige + masselottes) lors de son passage par la verticale

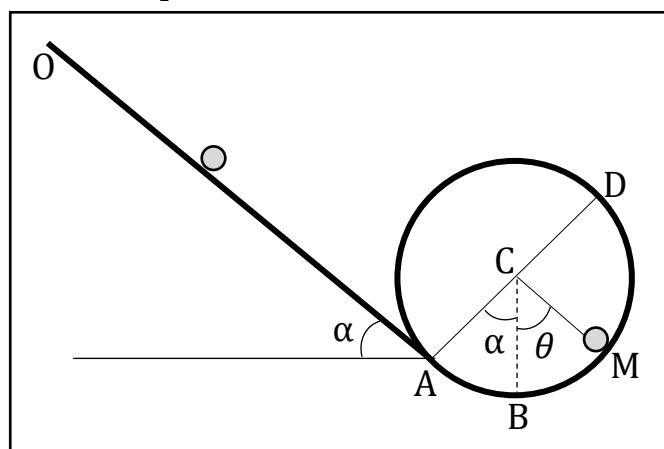
1. Le système (tige + masselottes) est à nouveau écartée de la verticale du même angle  $\theta_0 = 60^\circ$ . Avec quelle vitesse angulaire  $\omega_0$  doit-on lancer le système pour que la tige puisse atteindre la position horizontale avec une vitesse angulaire nulle ?

**Données :**  $m_0 = 100 \text{ g}$  ;  $l = 25 \text{ cm}$  ;  $g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$



### EXERCICE 5

On considère une bille de masse  $m = 50 \text{ g}$ , de rayon  $r = 5 \text{ cm}$  et de moment d'inertie  $J$ . La bille part du point O d'un plan incliné OA avec une vitesse  $V_0 = 2 \text{ m.s}^{-1}$  et arrive en A au bas du plan incliné avec une vitesse  $V_A$ . Puis sans perdre de vitesse, la bille aborde une piste circulaire ABD de centre C et de rayon R. Quelques instants après, la bille passe par le point M repéré par l'angle  $\theta$  par rapport à la verticale (BC). Le plan incliné fait un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec l'horizontale et a une longueur  $OA = 1 = 5 \text{ m}$ . Les forces de frottement sur la bille sont équivalentes à une force  $\vec{f}$  d'intensité constante  $f = 0,1 \text{ N}$  sur toute la longueur du trajet



OA-ABD-DA. Notons que le tronçon OA se trouve en plein air alors que l'intérieur de la portion circulaire est un vide poussé (absence d'air). Par ailleurs on ne négligera pas la poussée d'Archimède. Le rayon  $r$  de la bille est négligeable devant celui  $R$  de la portion circulaire ; ainsi sur la portion circulaire la bille peut être assimilée à un point matériel dépourvu d'énergie cinétique de rotation.

1. Exprimer l'énergie cinétique de la bille en un point quelconque du plan incliné en fonction de  $m$ ,  $J$ ,  $r$  et  $V$  où  $V$  est la vitesse linéaire de la bille en un point quelconque du plan incliné.
2. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, montrer que la vitesse linéaire de la bille au bas du plan incliné est donnée par la relation :

$$V_A = \sqrt{V_0^2 + \frac{2\left[\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)gsin\theta - f\right]l}{\frac{J}{r^2} + \frac{4}{3}\pi r^3\rho}} \quad \text{où } \rho \text{ et } \rho_0 \text{ sont respectivement les}$$

masses volumiques de la bille et de l'air. Calculer alors la valeur de  $V_A$

3. Donner l'expression de la vitesse  $V$  de la bille au point M en fonction de  $V_A$ ,  $a$ ,  $\theta$ ,  $f$ ,  $m$ ,  $g$  et  $R$ .
4. Quelle est la valeur minimale de la vitesse que doit avoir la bille à son premier passage en A pour atteindre le point D ?

Données :  $\theta = 30^\circ$  ;  $R = 1\text{m}$  ;  $\rho = 8900 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $\rho_0 = 1,3 \text{ g.L}^{-1}$  ; volume de la bille :  $v = \frac{4}{3}\pi r^3$  ; intensité de la poussée d'Archimède :  $F = \rho_{\text{fluide}} \cdot v_{\text{bille}} \cdot g$

### **EXERCICE 6**

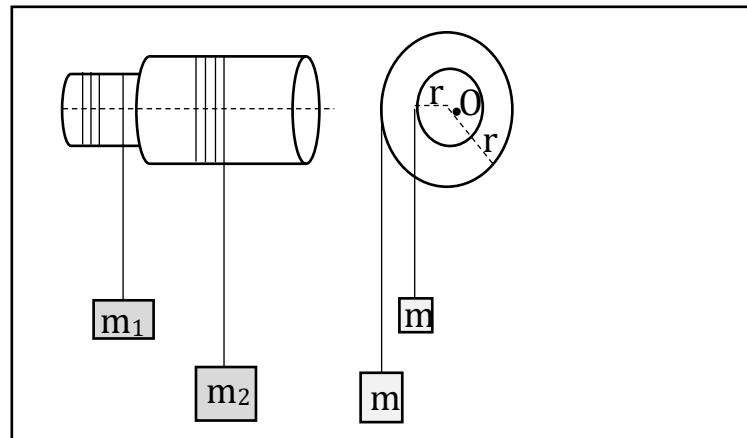
On rappelle que le moment d'inertie d'un cylindre homogène de masse  $m$  et de rayon  $r$  par rapport à son axe de révolution est  $J_\Delta = \frac{1}{2}m \cdot r^2$ . On négligera tous les frottements et on prendra  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Le dispositif de la figure suivant comprend un treuil qui est formé de deux cylindres solidaires  $C_1$  et  $C_2$  de même axe de révolution ( $\Delta$ ). Les cylindres  $C_1$  et  $C_2$  ont respectivement pour rayons  $r_1 = r$  et  $r_2 = 2r$  et pour masses  $\mu_1 = m$  et  $\mu_2 = 3m$ . Sur les cylindres sont enroulées dans le même sens deux cordes de masses négligeables. Ce treuil permet de soulever simultanément deux charges  $S_1$  et  $S_2$  de masses respectives  $m_1 = 5\text{m}$  et  $m_2 = 6\text{m}$ .

Les deux charges se trouvant initialement à la même hauteur  $H$  au-dessus du sol horizontal, on libère le système sans vitesse initiale à l'instant initial  $t = 0$ .

1. Montrer que le moment d'inertie de la poulie est  $J_\Delta = \frac{13}{2}mr^2$

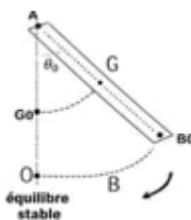
2. Exprimer l'énergie cinétique du système  $S = \{Poulie + S_1 + S_2\}$ , en fonction de  $m$ , et  $V_2$  (vitesse instantanée du solide  $S_2$ ).
3. Par application du T.E.C au système  $S$  donner l'expression de  $V_2$  en fonction de  $g$  et de  $h_2$ , hauteur de chute du solide  $S_2$ . Calculer la valeur de  $V_2$  à la date  $t_1$  où  $S_2$  arrive au sol.
4. En déduire la valeur de la vitesse  $V_1$  de  $S_1$  et celle de la vitesse angulaire  $\omega$  de la poulie à la date  $t_1$   
Données :  $m = 10 \text{ kg}$  ;  $r = 20 \text{ cm}$  ;  $H = 2m$



### EXERCICE 7

Une barre AB homogène de masse  $m = 400\text{g}$  et de longueur  $L = 1\text{m}$ , est mobile autour d'un axe horizontal passant par son extrémité A. On écarte la barre de sa position d'équilibre stable d'un angle  $\theta_0 = 60^\circ$  et on le lance, à l'instant  $t = 0$  avec une vitesse angulaire  $\omega_0 = 2 \text{ rad.s}^{-1}$ . Les frottements sont négligeables et on prendra  $g = 10 \text{ N.kg}^{-1}$ .

- 1) Calculer la vitesse linéaire  $V_B$  du point B à l'instant  $t = 0\text{s}$
- 2) Trouver l'expression de la variation de l'énergie cinétique de la barre entre sa position initiale et sa position où elle est écartée d'un angle  $\theta$  en fonction de  $L, m, g, \theta_0$  et  $\theta$ .
- 3) Montrer que l'expression de la vitesse angulaire lorsque la barre passe par la position d'angle  $\theta$  est donné par la relation suivante  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{L}}$
- 4) Déterminer la vitesse linéaire  $V_B$  lorsque la barre passe par sa position d'équilibre stable.
- 5) A partir de sa position d'équilibre stable, quelle vitesse minimale  $V_0$  doit-on appliquer à l'extrémité libre de la barre pour que celle-ci effectue une demi-tour.
- 6) Dans sa position d'équilibre stable, la tige est mise en rotation autour de l'axe ( $\Delta$ ) avec une vitesse de 150 tours/s. Elle effectue 5 tours et demi avant de s'arrêter sous l'action d'un couple de forces de frottement. Calculer le moment de ce couple de forces de frottement.



### **EXERCICE 8**

Le cylindre ( $C_1$ ) soutient un corps ( $A_1$ ) de masse  $m_1 = 100\text{g}$ , par l'intermédiaire d'un fil inextensible, de masse négligeable, fixé au cylindre. Le cylindre ( $C_2$ ) soutient, de la même façon, un corps ( $A_2$ ) de masse  $m_2 = 120\text{g}$  (figure ci-contre). Les fils étant verticaux et leur sens d'enroulement tel que ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ) se déplacent en sens contraire, on libère ce dispositif sans vitesse initiale.

**1.** Dans quel sens va tourner le système (S) ?

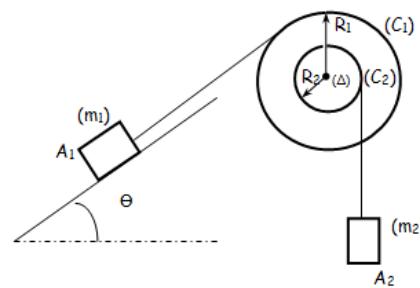
Justifier.

**3.** Exprimer l'énergie cinétique du système formé par (S) - ( $A_1$ ) - ( $A_2$ ) en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $J_\Delta$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  et  $V_1$  vitesse de ( $A_1$ ) à l'instant  $t$ .

**3.** Exprimer le travail des forces de pesanteur entre l'instant initial et l'instant  $t$  où la hauteur de ( $A_1$ ) à varier de  $h_1$  en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $g$ ,  $\theta$  et  $h_1$ .

**4.** En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au système (S) - ( $A_1$ ) - ( $A_2$ ) entre l'instant de départ et l'instant où la vitesse de ( $A_1$ ) est  $V_1 = 2\text{m/s}$ , Déterminer la hauteur  $h_1$ .

On prendra :  $R_1=2\text{ 0cm}$ ,  $R_2=1\text{ 0cm}$ ,  $\theta=30^\circ$  et  $J_\Delta=4,5.10^{-3}\text{kg.m}^2$



### **EXERCICE 9**

Un dispositif est constitué d'une barre AB de masse négligeable, de longueur  $3a$  portant à ses extrémités des solides  $S_A$  et  $S_B$  de masses respectives  $m_A = m$  et  $m_B = 2m$  assimilables à des points matériels pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal  $\Delta$  passant par O et à une distance de  $2a$  du point B.

À  $t = 0\text{s}$  le pendule est lancé sans vitesse initiale à partir d'un angle  $\theta_0 = \theta$  par rapport à vertical. La liaison pivot est supposé non idéal : le mobile subit des frottements linéaires traduits par un couple de frottements de moment  $M = -0,5N.m$ . On donne  $m = 0,5\text{kg}$  ;  $\theta_0 = 1\text{rad}$  ;  $OA = a = 20\text{cm}$  ;  $g = 9,8\text{N.kg}^{-1}$ .

- 1) Le centre de gravité G du dispositif est donné par la relation barycentrique suivante :  $m_A\vec{GA} + m_B\vec{GB} = \vec{0}$ . En déduire l'expression de la distance OG en fonction de a.
- 2) Montrer que le moment d'inertie du dispositif par rapport à l'axe  $\Delta$  vaut  $J_\Delta = 180.10^{-3}\text{kg.m}^2$
- 3) Exprimer la vitesse  $V_A$  du solide  $S_A$  lorsque la tige fait un angle  $\theta$  avec la vertical, en fonction de  $J_\Delta, m, g, a, \theta_0, \theta$  et  $M$ .
- 4) Calculer la vitesse  $V_B$  du point B lorsque la tige passe par l'horizontale.
- 5) Déterminer la vitesse angulaire de la barre lorsque la tige passe par la position pour laquelle le centre de gravité G est à  $5\text{cm}$  au-dessus de

l'horizontale passant par O. Le graissage de l'axe permet maintenant de négliger les frottements :

- 6) Soit  $V_{G\max}$  la vitesse maximale du centre de gravité G. Trouver la valeur de  $\theta$  pour lequel la vitesse  $V_G$  du centre de gravité est égale à la moitié de  $V_{G\max}$

