DEVOIR N°3 DE SCIENCES PHYSIQUES – DUREE: 4 HEURES

Exercice 1: influence des proportions initiales de réactifs dans une réaction d'estérification

On utilise en parfumerie des esters odorants en particulier le benzoate de méthyle de formule C_6H_5-COO-CH_3. On obtient celui-ci par une réaction d'estérification entre l'acide benzoïque et un alcool A en présence d'acide sulfurique.

Données :

Composés	Masse molaire ($g.mol^{-1}$)
Benzoate de méthyle	136
Acide benzoïque	122
Alcool A	32

La constante d'équilibre K_E associée à cette estérification K = 4

1. Donner le nom de l'alcool A
2. Donner la formule semi-développée de l'acide benzoïque.
3. Ecrire l'équation de la réaction d'estérification.
4. Dans le cas d'une estérification qui serait réalisée à partir d'un mélange équimolaire de réactifs (0,20 mol d'alcool A et 0,20 mol d'acide benzoïque) :
   - 4.1. Ecrire l'expression littérale de la constante d'équilibre K_E en fonction du nombre de mole d'alcool estérifié $x_{éq}$ à l'équilibre. Calculer la valeur de $x_{éq}$.
   - 4.2. Quel est le rendement de la réaction d'estérification?
   - 4.3. Déterminer la composition du mélange final.
5. On réalise un nouveau mélange initial (0,50 mol d'alcool A et 0,20 mol d'acide benzoïque).
   - 5.1. Calculer la valeur du nombre de mole d'alcool estérifié $x'_{éq}$ à l'équilibre.
   - 5.2. Déterminer la nouvelle valeur du rendement de la réaction.
   - 5.3. Que peut-on conclure de l'influence des proportions initiales des réactifs sur le déplacement de l'équilibre ?

Exercice 2: cinétique de la réaction des ions iodure sur les ions peroxodisulfate

On donne les masses molaires atomiques :

$$M(H) = 1{,}0\ g.mol^{-1} ; M(N) = 14\ g.mol^{-1} ; M(O) = 16\ g.mol^{-1} ;\ M(S) = 32\ g.mol^{-1}.$$

On donne les demi-équations électroniques:

$$S_2O_8^{2-} + 2\,e^- = 2\,SO_4^{2-} \quad E_1 = 2{,}00\ V; \qquad I_2 + 2\,e^- = 2\,I^- \quad E_2 = 0{,}536\ V;$$

$$S_4O_6^{2-} + 2\,e^- = 2\,S_2O_3^{2-} \quad E_3 = 0{,}09\ V$$

1. Préparation des solutions.
   - 1.1. Quelle masse de peroxodisulfate d'ammonium, $(NH_4)_2S_2O_8$, faut-il utiliser pour préparer 100mL de solution (S) de concentration molaire volumique : $1{,}00.10^{-1}$ $mol.L^{-1}$?
   - 1.2. On dispose d'eau distillée et d'une solution d'iodure de potassium ($K^+ + I^-$) de concentration molaire volumique C = 1,00 $mol.L^{-1}$. Quel volume de cette solution faut-il utiliser pour obtenir 100 mL d'une solution (**S'**) d'iodure de potassium de concentration 0,200 $mol.L^{-1}$?
2. Etude de la réaction.
   - 2.1. À l'instant t = 0, on réalise le mélange (M) de 100 mL de solution (S) et de 100 mL de solution (S'). Une réaction lente se produit.
     - 2.1.1. Ecrire l'équation bilan de la réaction qui a eu lieu.
     - 2.1.2. Quelle est, à t = 0, la concentration molaire volumique en ions $S_2O_8^{2-}$, notée $[S_2O_8^{2-}]_0$, dans le mélange (M) ?
   - 2.2. On prélève, à différentes dates t, des volumes : V_1 = 10,0 mL de ce mélange (M) que l'on refroidit immédiatement dans de l'eau glacée.
     - 2.2.1. Dans chacun des prélèvements, on dose le diiode I_2 formé par une solution de thiosulfate de sodium ($2Na^+ + S_2O_3^{2-}$) de concentration molaire volumique : $C_2 = 1{,}00.10^{-2}$ $mol.L^{-1}$, en présence d'empois d'amidon.

2.2.1.1. Ecrire l'équation-bilan de la réaction rapide et totale du dosage.

Dans le tableau ci-après, on a regroupé les différentes valeurs V_2 du volume de solution de thiosulfate de sodium nécessaire au dosage des différents prélèvements

t en min	0	4,5	8	16	20	25	30	36	44	54	69
V_2 en mL	0	1,8	2,4	4	4,8	5,6	6,1	6,9	7,4	8,4	9,2
$[I_2]$ en $mmol \cdot L^{-1}$											
$[S_2O_8^{2-}]$ en $mmol \cdot L^{-1}$											

2.2.1.2. Exprimer la relation entre la quantité de diiode I_2, notée n_{I_2}, présent dans le prélèvement et la quantité d'ions thiosulfate $S_2O_3^{2-}$, notée $n_{S_2O_3^{2-}}$, nécessaire à son dosage.

2.2.1.3. En déduire, en fonction de C_2, V_1 et V_2, la relation donnant la concentration $[I_2]$ de diiode contenu dans chaque prélèvement de volume V_1.

2.2.2. Montrer qu'à l'instant t, la concentration en ions peroxodisulfate $[S_2O_8^{2-}]$ vaut : $[S_2O_8^{2-}] = [S_2O_8^{2-}]_0 - [I_2]$.

2.2.3. Recopier et compléter le tableau proposé ci-dessus.

2.3. Tracer le graphe : $[S_2O_8^{2-}] = f(t)$.

2.4. Définir et calculer la vitesse moyenne de disparition des ions $S_2O_8^{2-}$ entre les dates : t = 20 min et t = 44 min.

2.5. Définir et calculer la vitesse instantanée de disparition des ions $S_2O_8^{2-}$ à la date : t = 20 min. En déduire celle de formation de I_2 à cette même date.

2.6. Déterminer le temps de demi-réaction.

Exercice 3: distance Terre-Lune

Données : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ *S.I. ; Masse de la Terre :* $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ *kg ; vitesse de la lumière dans le vide* $C = 3.10^8 \ m \cdot s^{-1}$; *Rayon de la Terre :* $R_T = 6380$ *km ; Rayon de la Lune :* $R_L = 1740$ *km*

On suppose que la Terre de centre O et la Lune de centre L ont une distribution de masse à symétrie sphérique. Dans le référentiel géocentrique, la Lune n'est soumise, en première approximation, qu'à la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre et son centre décrit une trajectoire circulaire de centre O. Soit $r = OL$ la distance du centre de la Terre au centre de la Lune.

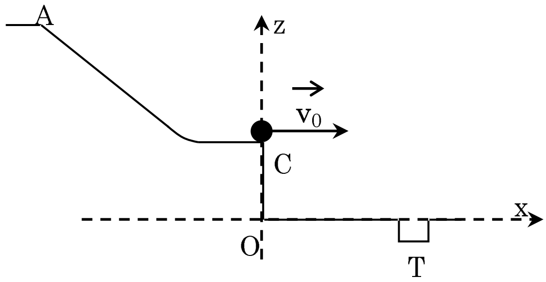
1. Montrer que le mouvement circulaire du centre de la Lune est uniforme.
2. Déterminer l'expression de la vitesse v_L du centre de la Lune en fonction de la constante de gravitation universelle G, de la distance r et de la masse M_T de la Terre.
3. En déduire l'expression de la période de révolution de la Lune en fonction de G, r et M_T.
4. Montrer alors que la troisième loi de Kepler est bien vérifiée dans le cas de la Lune.
5. Calculer la valeur de cette constante en précisant les unités.
6. Sachant que la période de révolution de la Lune vaut 27 jours 7 heures et 30 minutes, en déduire une valeur approchée de la distance du centre de la Lune au centre de la Terre.
7. On émet depuis la surface de la Terre un signal laser qui est alors réfléchi par un miroir posé sur le sol lunaire vers la station émettrice terrestre. La durée entre l'émission et la réception du signal est égale à $\Delta t = 2{,}563$ s. En déduire une nouvelle valeur approchée de OL.
8. On désire placer en orbite autour de la Terre un satellite dont la période de révolution soit égale à 41 heures exactement. A quelle altitude h faut-il le positionner ?

Exercice 4: mini-golf

Une balle B de mini-golf est poussée en A à l'aide d'un club. La balle, supposée ponctuelle, dévale la pente AC et décolle en C où elle commence alors un mouvement aérien vers le trou noté T. On se propose d'étudier le mouvement de la balle B dans le repère (O, x, z) supposé galiléen.

Dans tout l'exercice, on ne considèrera aucune force liée à l'atmosphère.

On précise que $z_C = 40$ cm et $g = 9{,}8 \ N \cdot kg^{-1}$.



1. La trajectoire balistique de C vers T.

La balle quitte le point C de la rampe à la date t = 0 s avec une vitesse v_0 horizontale égale à 2,0 m·s^{-1}.

1.1. Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ?
1.2. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur la balle lors de cette phase. Conclure.
1.3. Etablir les équations horaires de la vitesse et de la position de la balle B.
1.4. En déduire l'équation $z(x)$ de la trajectoire de la balle B.
1.5. Quel doit être alors l'abscisse x_T du trou T pour que la balle tombe directement dedans ?
1.6. Déterminer la date t_F à laquelle la balle B tombe dans le trou.

2. Le mouvement sur la rampe.

La balle quitte le point A avec une vitesse de 0,80 m·s^{-1}.

2.1. Déterminer la hauteur z_A de A pour que la balle arrive en C avec la vitesse de 2,0 m·s^{-1}
2.2. Expliquer pourquoi la vitesse v_0 est parfaitement horizontale lorsque la balle quitte le point C.

Exercice 4: la bulle d'air

Une bulle d'air produite par un plongeur au fond d'un lac d'eau calme remonte verticalement à la surface. Cette petite bulle s'est formée sans vitesse initiale à l'origine du temps. Elle possède un volume noté V et un rayon noté R tous deux supposés constants durant la remontée. La bulle d'air est soumise, entre autre, à une force de frottement fluide $\vec{f}$ d'intensité $f = k \times v$ avec v la vitesse de la bulle. La masse volumique de l'air sera notée ρ' et celle de l'eau ρ.

1. Préciser la direction, le sens et l'expression de toutes les forces s'exerçant sur la bulle durant sa remontée en fonction de g, V, v, k, ρ' et ρ.
2. Etablir l'équation différentielle régissant la vitesse de la bulle d'air et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot v = B$

   Exprimer τ et B en fonction de g, V, k, ρ' et ρ.
3. Rechercher à l'aide de cette équation différentielle l'expression de la vitesse limite v_L de la bulle en fonction de τ et B. Détailler les explications et les calculs.
4. Déterminer l'expression donnant le rayon R de la bulle d'air en fonction de η, v_L, g, ρ' et ρ et calculer ce rayon sachant que la vitesse limite atteinte par la bulle lors de sa remontée est de 15,0 m·min^{-1}.
5. La solution de cette équation différentielle peut se mettre sous la forme : $v(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} + \beta$

Montrer que cette solution peut s'écrire : $v(t) = v_L \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t}\right)$.

On précise que $e^0 = 1$ *et que* $\lim_{x \to \infty} (e^{-x}) = 0$

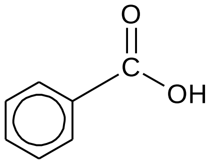
6. A l'aide de cette expression de la vitesse en fonction du temps, retrouver, en détaillant le calcul, la valeur initiale de la vitesse de la bulle d'air.
7. Montrer que l'expression de $v(t)$ conduit à la vitesse limite v_L après une durée importante.
8. A l'aide des observations précédentes tracer l'allure de la courbe représentative de v = f(t).
9. Montrer que pour une durée t = 5 ×τ on peut considérer que la bulle a atteint sa vitesse limite v_L.

Données :
$k = 6\pi \times \eta \times R$
viscosité de l'eau $\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}$ *S.I.*
Intensité du champ de pesanteur $g = 9{,}8$ *N·kg*$^{-1}$
Masse volumique de l'air : ρ' = 1,3 *kg·m*$^{-3}$
Masse volumique de l'eau : ρ = 1000 *kg·m*$^{-3}$
Volume d'une sphère : $V = 4/3 \times \pi \times R^3$

CORRECTION DU DEVOIR D3 – TS2 – 2011- ACLIM

Exercice 1:

1. L'alcool utilisé est le **méthanol** (le nom de l'ester formé :
2. benzoate de méthyle dérive de l'acide carboxylique (acide benzoïque $C_6H_5CO_2H$) et de l'alcool.
   Formule semi-développée de l'acide benzoïque:



3. $C_6H_5-COOH_{\,(l)} + CH_3-OH_{\,(l)} = C_6H_5-COO-CH_{3\,(l)} + H_2O_{\,(l)}$

4.

4.1. Dressons le tableau d'avancement de la réaction

Equation		C_6H_5-COOH +	CH_3-OH =	$C_6H_5-COO-CH_3$ +	H_2O
Etat du système	Avancement				
Etat initial	0	n = 0,20 mol	n	0	0
En cours de transformation	x	n – x	n – x	x	x
Etat final	$x_{éq}$	n – $x_{éq}$	n – $x_{éq}$	$x_{éq}$	$x_{éq}$

$$K = \frac{[C_6H_5-COO-CH_3]_{éq} \times [H_2O]_{éq}}{[C_6H_5-COOH]_{éq} \times [CH_3OH]_{éq}} = \frac{\frac{x_{éq}}{V} \times \frac{x_{éq}}{V}}{\frac{n-x_{éq}}{V} \times \frac{n-x_{éq}}{V}} = \frac{x_{éq}^2}{(n-x_{éq})^2} = \mathbf{4}$$

Valeur de $x_{éq}$: Il faut pour cela résoudre l'équation du second degré, $x_{éq}^2 = 4\times(n - x_{éq})^2$

$$x_{éq}^2 = 4n^2 - 8nx_{éq} + 4x_{éq}^2$$
$$0 = 3x_{éq}^2 - 8nx_{éq} + 4n^2$$
$$0 = 3x_{éq}^2 - 8\times0,20\times x_{éq} + 4\times0,20^2$$
$$0 = 3\,x_{éq}^2 - 1,6x_{éq} + 0,16$$
$$\Delta = 1,6^2 - 4\times3\times0,16 = 0,64 \text{ donc } \sqrt{\Delta} = 0,80$$
$$x_{éq1} = \frac{1,6+0,8}{6} = 0,40 \text{ mol} \qquad x_{éq2} = \frac{1,6-0,8}{6} = 0,13 \text{ mol}$$

Une seule solution est chimiquement possible. La réaction d'estérification est limitée, il reste des réactifs dans l'état final d'équilibre: $n - x_{éq} > 0$. Donc $x_{éq} < n$, la solution est donc $\mathbf{x_{éq2} = 0,13}$ **mol**.

4.2. $\tau = \dfrac{x_{éq}}{x_{max}}$. Si la transformation était totale, les réactifs seraient totalement consommés: $n - x_{max} = 0$

Donc $x_{max} = n$, soit $\tau = \dfrac{x_{éq}}{n} = \dfrac{0,13}{0,20} = \mathbf{67\%}$ *(calcul effectué avec la valeur non arrondie de $x_{éq}$.)*

4.3. Il s'est formé $x_{éq}$ = **0,13 mol** d'eau et de benzoate de méthyle. Il reste ($n - x_{éq}$) = **0,067 mol** d'acide benzoïque et de méthanol.

5.

5.1. Soient n_1 la quantité de matière d'acide benzoïque et n_2 la quantité de matière d'alcool,

$$K = \frac{[C_6H_5-COO-CH_3]_{éq} \times [H_2O]_{éq}}{[C_6H_5-COOH]_{éq} \times [CH_3OH]_{éq}} = \frac{\frac{x'_{éq}}{V} \times \frac{x'_{éq}}{V}}{\frac{n_1 - x'_{éq}}{V} \times \frac{n_2 - x'_{éq}}{V}} = \frac{x'^2_{éq}}{(n_1 - x'_{éq}) \times (n_2 - x'_{éq})}$$

Soit à résoudre : $K \times (n_1 - x'_{éq}) \times (n_2 - x'_{éq}) = x'^2_{éq}$

$$4 \times (0,20 - x'_{éq}) \times (0,50 - x'_{éq}) = x'^2_{éq}$$

$$4 \times (0,20 \times 0,50 - 0,20x'_{éq} - 0,50x'_{éq} + x'^2_{éq}) = x'^2_{éq}$$

$$0,4 - 2,8\, x'_{éq} + 4\, x'^2_{éq} = x'^2_{éq}$$

équation du second degré : $3x'^2_{éq} - 2,8\, x'_{éq} + 0,4 = 0$

$$\Delta = 2,8^2 - 4 \times 3 \times 0,4 = 3,04$$

$$x'_{éq1} = \frac{2,8 - \sqrt{3,04}}{6} = 0,18 \text{ mol} \quad \text{ou } x'_{éq2} = \frac{2,8 + \sqrt{3,04}}{6} = 0,76 \text{ mol}$$

5.2. La valeur de l'avancement à l'équilibre ne peut dépasser celle de l'avancement maximal. Il faut déterminer le réactif limitant :

- si l'acide b96+enzoïque est le réactif limitant : $n_1 - x_{max} = 0$ $\quad x_{max} = 0,20$ mol
- si l'alcool est le réactif limitant : $n_2 - x_{max} = 0$ $\quad x_{max} = 0,50$ mol

Le réactif limitant est celui qui conduit à l'avancement maximal le plus faible, c'est l'acide benzoïque et $\mathbf{x_{max}} = 0,20$ mol.

On retient la valeur $x_{éq} < x_{max}$, soit $\mathbf{x_{éq1}} = 0,18$ mol et donc $\tau' = \frac{x_{éq}}{x_{max}}$

Soit $\boldsymbol{\tau'} = \frac{x'_{éq}}{n_1} = \frac{0,18}{0,20} = \mathbf{88\%}$ (*calcul effectué avec la valeur non arrondie de* $x'_{éq1}$)

5.3. Le fait de mettre en excès un des deux réactifs déplace l'équilibre dans le sens direct (dans le sens de la consommation de ce réactif).

Exercice 2:

1. Préparation de solutions

1.1. $m = CVM = 10^{-1} \times 0,1 \times 132 = 1,32g$

1.2. $V = \frac{C'V'}{C} = \left(0,2 \times \frac{100}{1}\right) = 20mL$

2. Etude de la réaction

2.1.

2.1.1. Equation de la réaction

$$S_2O_8^{2-} + 2\, e^- = 2\, SO_4^{2-}$$
$$2\, I^- = I_2 + 2\, e^-$$
$$S_2O_8^{2-} + 2I^- = I_2 + 2SO_4^{2-}$$

2.1.2. $[S_2O_8^{2-}]_0 = \frac{0,1 \times 100}{200} = 0,05 \text{ mol}\cdot L^{-1}$

2.2.

2.2.1.

2.2.1.1. Equation du dosage: $2S_2O_3^{2-} + I_2 \rightarrow S_4O_6^{2-} + 2I^-$

2.2.1.2. $n_{I_2} = \frac{1}{2} n_{S_2O_3^{2-}}$

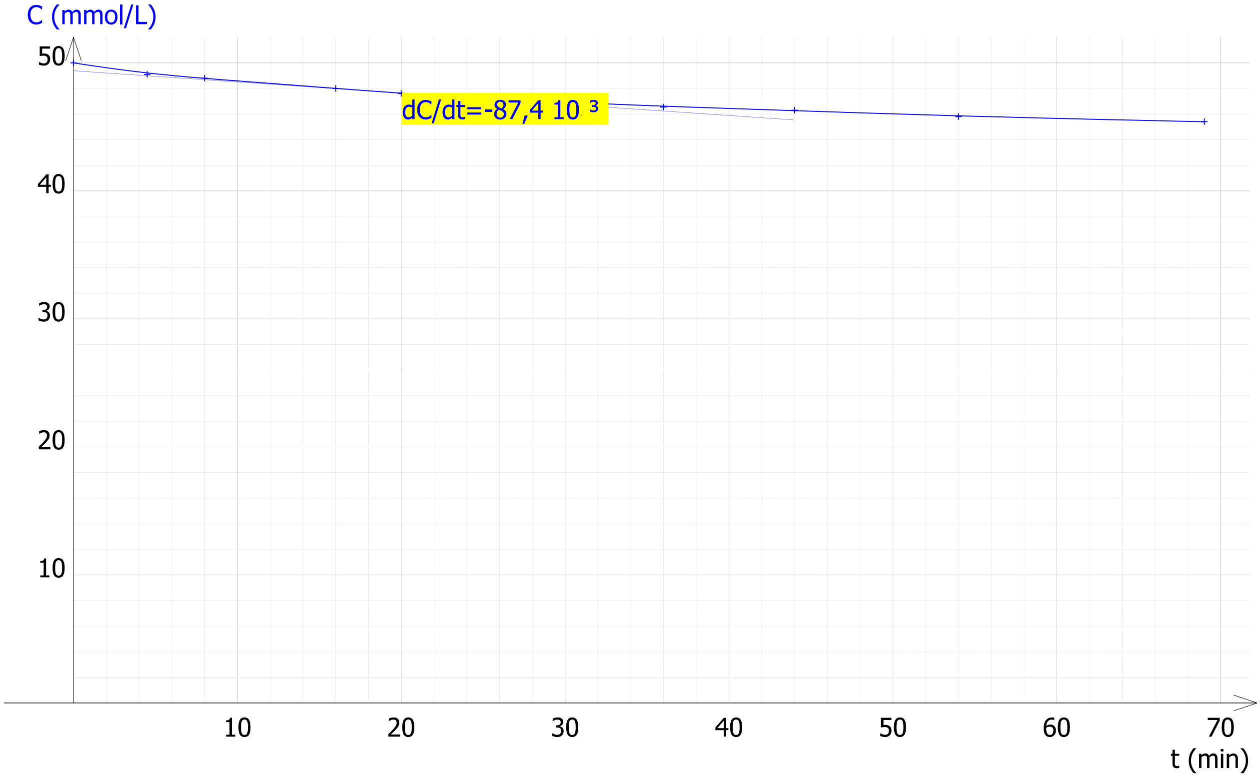
2.2.1.3. $[I_2] = \frac{1}{2}\frac{C_2V_2}{V_1}$

2.2.2. D'après l'équation: $n(I_2) = n(S_2O_8^{2-})_{réagi}$ donc $[S_2O_8^{2-}] = [S_2O_8^{2-}]_0 - [I_2]$.

2.2.3. Tableau

t en min	0	4,5	8	16	20	25	30	36	44	54	69
V_2 en mL	0	1,8	2,4	4	4,8	5,6	6,1	6,9	7,4	8,4	9,2
$[I_2]$ en $mmol\cdot L^{-1}$	0	0,9	1,2	2	2,4	2,8	3,05	3,45	3,7	4,2	4,6
$[S_2O_8^{2-}]$ en $mmol\cdot L^{-1}$	50	49,1	48,8	48	47,6	47,2	46,95	46,55	46,3	45,8	45,4

2.3. Courbe $[S_2O_8^{2-}] = f(t)$



2.4. $V = \dfrac{\Delta[S_2O_8^{2-}]}{\Delta t} = -\dfrac{1{,}3-2{,}6}{44-20} = 5{,}4.10^{-2}\ \text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}\text{min}^{-1}$

2.5. $V = -\left(\dfrac{d[S_2O_8^{2-}]}{dt}\right) \Rightarrow A\ \ t = 20\ \text{min}\ V = 8{,}74.10^{-2}\ \text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}\text{min}^{-1}$

$V(I_2) = V(S_2O_8^{2-}) = 8{,}74.10^{-2}\ \text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}\text{min}^{-1}$

2.6. $[I^-]_0 = \dfrac{0{,}2\times100}{200} = 0{,}1\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $[S_2O_8^{2-}]_0 = \dfrac{0{,}1\times100}{200} = 0{,}05\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$

$\begin{cases} \dfrac{[I^-]_0}{2} = \dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}05 \\ \dfrac{[S_2O_8^{2-}]_0}{1} = 0{,}05 \end{cases}$ le mélange est dans les conditions stœchiométriques

A $t = \tau$ on a $[S_2O_8^{2-}] = \dfrac{[S_2O_8^{2-}]_0}{2} = \dfrac{0{,}05}{2} = 0{,}025\ \text{mol}\cdot\text{L}^{-1} = 25\ \text{mmol}\cdot\text{L}^{-1}$

Exercice 3:

1. La seule force qui s'exerce sur la Lune est la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ engendrée par la Terre. Comme la trajectoire de la Lune est supposée circulaire (énoncé), la force d'interaction $\vec{F}$ est portée par le rayon du cercle de l'orbite de la Lune, car la droite d'action de cette force passe par le centre de la Terre et le centre de la Lune.

Donc, d'après la deuxième loi de Newton : $\sum\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow F.\vec{N} = m\vec{a}$ avec $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal dans la base de Frenet.

Comme $\vec{a} = a_T\vec{T} + a_N\vec{N}$, on arrive donc à la relation : $F\cdot\vec{N} = ma_T\vec{T} + ma_N\vec{N}$

Par identification on remarque donc que $ma_T\vec{T} = \vec{0}$ d'où $a_T = 0$. Comme l'accélération tangentielle est nulle, on en déduit que le vecteur vitesse est constant EN NORME, donc que le mouvement de la Lune est uniforme.

2. On sait que $a_N = \dfrac{v_L^2}{R}$, donc $F \cdot \vec{N} = m \times a_N \vec{N}$ devient : $F = ma_N \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{GmM_T}{R^2} = m \times \dfrac{v_L^2}{R}$

$$\text{D'où : } v_L = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$$

3. On sait que vitesse = distance / temps. Or pour parcourir une distance d'une révolution (2πR) il faut à la Lune une durée égale à T. Donc

$$v_L = \frac{2\pi R}{T} \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi R}{v_L} = 2\pi R \times \sqrt{\frac{R}{GM_T}} = 2\pi\sqrt{R^2} \times \sqrt{\frac{R}{GM_T}}$$

$$\Leftrightarrow \; T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}} = \frac{2\pi(R)^{3/2}}{\sqrt{GM_T}}$$

4. Calculons $\dfrac{T^2}{R^3} = \dfrac{\left(\dfrac{2\pi(R)^{3/2}}{\sqrt{GM_T}}\right)^2}{R^3} = \dfrac{\dfrac{4\pi^2 R^3}{GM_T}}{R^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$ Or G est une constante et la masse de la Terre aussi : donc pour tous les corps qui orbitent autour de la Terre, la valeur de $\dfrac{T^2}{R^3}$ est identique. La troisième loi de Kepler est bien vérifiée.

5. $\dfrac{4\pi^2}{GM_T} = \dfrac{4 \times \pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times 5{,}97 \cdot 10^{24}} = 9{,}9 \cdot 10^{-14} s^2 \cdot m^{-3}$

6. Comme $\dfrac{T^2}{R^3} = cste$ donc $R = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{cste}} = \sqrt[3]{\dfrac{(27 \times 24 \times 3600 + 7 \times 3600 + 30 \times 60)^2}{9{,}9 \cdot 10^{-14}}} = 3{,}83 \cdot 10^8 m$

7. La durée Δt est celle d'un aller-retour. Pendant cette durée, la lumière parcourt deux fois la distance séparant la surface de la Terre de la surface de la Lune, soit 2×d.

Donc $2d = v \times \Delta t \Leftrightarrow 2d = c \times \Delta t$ avec c la célérité (vitesse de la lumière dans le vide = 300 000 km.s^{-1})

On trouve d = 384 450 km.

D'où OL = d + R_T + R_L = 392 600 km

Exercice 4:

1. Trajectoire balistique
   1.1. Un référentiel est dit galiléen si le principe de l'inertie y est vérifié.
   1.2. Il n'y a qu'une seule force qui s'applique sur la balle si l'on néglige, comme le demande l'énoncé, les forces liées à l'air. La balle est donc en chute libre dans cette phase.
   1.3. Comme le référentiel est galiléen, d'après la deuxième loi de Newton, on a $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

Sachant que la seule force qui s'applique sur la balle est son poids, on a : $m\vec{g} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \vec{a}$.

$$\vec{a}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}\begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} v_0 \times t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + z_C \end{pmatrix}$$

Les équations horaires sont donc : $\begin{cases} x(t) = v_0 \times t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + z_C \end{cases}$ et pour la vitesse : $\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_z(t) = -gt \end{cases}$

1.4. L'équation de la trajectoire est alors : $x(t) = v_0 \times t \Leftrightarrow t = \dfrac{x(t)}{v_0}$

En remplaçant dans z(t), on obtient : $z(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_0^2}x^2 + z_C$

1.5. Pour que la balle B tombe dans le trou T, il faut que le point T soit sur la trajectoire z(x). En d'autres termes, les coordonnées du point T doivent résoudre l'équation de la courbe z(x).

$$z_T = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2}{x_T}^2 + z_C \Leftrightarrow x_T = \sqrt{\frac{2v_0^2(z_C - z_T)}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 2{,}0^2 \times (0{,}40 - 0)}{9{,}8}} = 0{,}57\ m$$

1.6. Pour déterminer la date t_F à laquelle la balle tombe dans le trou T on utilise l'équation horaire $x(t)$:

$$x_T = v_0 \times t_F \Leftrightarrow t_F = \frac{x_T}{v_0} = \frac{0{,}57}{2{,}0} = 0{,}29\ s$$

2. Mouvement sur la rampe

2.1. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a : $\Delta Ec = \Sigma W(\vec{f})$

$\Leftrightarrow Ec_C - Ec_A = W_{AC}(\vec{P}) + W_{AC}(\vec{R_N})$ avec R_N la réaction normale du support.

Or le poids est la seule force qui travaille car R_N est toujours perpendiculaire au support et donc au déplacement. D'où :

$$\text{D'où : } \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = m\times g\times(z_A - z_C) \Leftrightarrow z_A = \frac{v_C^2 - v_A^2}{2g} + z_C$$

$$\Leftrightarrow z_A = \frac{2{,}0^2 - 0{,}80^2}{2\times 9{,}8} + 0{,}40 = 0{,}57\ m$$

2.2. Comme la vitesse est toujours tangente à la trajectoire et que le support est horizontal avant le saut, la vitesse initiale v_0 de la balle est bien horizontale au départ du saut.

<u>Exercice 5:</u>

1. Il y a trois forces qui s'exercent sur la bulle d'air lors de sa remontée :
   - Son poids $\vec{P}$ dû à la masse d'air qu'elle renferme.
   - La poussée d'Archimède $\vec{P}_A$ due au volume d'eau que la bulle déplace de par son existence.
   - La force de frottement $\vec{f}$ due aux molécules d'eau que la bulle d'air déplace lorsqu'elle remonte vers la surface. Cette force est donc dirigée vers le bas vu qu'elle s'oppose au mouvement ascendant de la bulle.

Les caractéristiques de ces trois forces sont :

<u>Le poids</u> :	<u>Poussée d'Archimède :</u>	<u>Force de frottement :</u>
direction : verticale	direction : verticale	direction : verticale
sens : vers le bas	sens : vers le haut	sens : vers le bas
intensité : $P = \rho' V\cdot g$	intensité : $P_A = \rho\cdot V\cdot g$	intensité : $f = k\cdot v$

Quelques remarques

- *La masse d'air m contenue dans la bulle d'air a pour expression* $m = \rho' \times V$ *car* $\rho' = \dfrac{m}{V}$

- *La poussée d'Archimède est égale au poids du fluide déplacé. Or ici le fluide déplacé par la bulle d'air est l'eau. Donc* $P_A = m_{fluide} \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$
- *Le volume d'eau déplacé correspond logiquement au volume de la bulle d'air, c'est à dire V.*

2. On applique la seconde loi de Newton à la bulle d'air :

$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{f} + \vec{P_A} = m\vec{a}$ avec m la masse d'air contenue dans la bulle.

En projetant cette expression sur l'axe vertical défini par l'énoncé on obtient :

$$-P - f + P_A = m \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad -\rho' Vg - kv + \rho Vg = \rho' V \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{\rho' V} \cdot v = g\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)$$

Par identification avec l'expression donnée par l'énoncé, on obtient :

$$\tau = \frac{\rho' V}{k} \quad \text{et} \quad B = g\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right)$$

3. Lorsque la bulle d'air remonte avec une vitesse égale à la vitesse limite v_L elle ne subit plus aucune accélération car la vitesse limite est par définition constante. En remplaçant v par la vitesse limite dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\frac{dv_L}{dt} + \frac{1}{\tau} \cdot v_L = B$$

Or, comme on vient de l'expliquer plus haut : $\frac{dv_L}{dt} = \dot{v}_L = 0$ d'où : $0 + \frac{1}{\tau} \cdot v_L = B \Leftrightarrow v_L = B \cdot \tau$

4. En remplaçant B et τ dans la relation précédente par leur expression complète, on obtient :

$$v_L = g\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right) \times \frac{\rho' V}{k} \quad \Leftrightarrow \quad v_L = g\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right) \times \frac{\rho' \times \frac{4}{3}\pi \cdot R^3}{6\pi \cdot \eta \cdot R}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_L = g\left(\frac{\rho}{\rho'} - 1\right) \times \frac{2\rho' \cdot R^2}{9\eta} \quad \Leftrightarrow \quad v_L = g\,(\rho - \rho') \times \frac{2R^2}{9\eta}$$

$$\Leftrightarrow \quad R = \sqrt{\frac{9 \cdot v_L \cdot \eta}{2 \cdot g\,(\rho - \rho')}} = \sqrt{\frac{9 \times \frac{15{,}0}{60} \times 1{,}0 \cdot 10^{-3}}{2 \times 9{,}8 \times (1000 - 1{,}3)}} = 3{,}4 \cdot 10^{-4}\ m \quad \text{soit} \quad R = 0{,}34 \text{ mm}$$

5. A l'origine du temps la vitesse de la bulle d'air est nulle d'après l'énoncé. Donc :

$$v(t=0) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \times 0} + \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \times 1 + \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = -\alpha$$

L'expression de $v(t)$ peut donc s'écrire : $v(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} - \alpha = 0$

De plus, pour une date t grande, la vitesse v de la bulle d'air sera égale à la vitesse limite v_L. Donc :

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{t \to +\infty} (\alpha \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} - \alpha) = v_L \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \times 0 - \alpha = v_L \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -v_L$$

La nouvelle expression de $v(t)$ devient alors : $v(t) = -v_L \cdot e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} - (-v_L) \Leftrightarrow v(t) = v_L\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t}\right)$

6. Pour retrouver la vitesse initiale de la bulle à l'aide de l'expression de $v(t)$ il suffit de remplacer la date t par 0, ce qui donne :

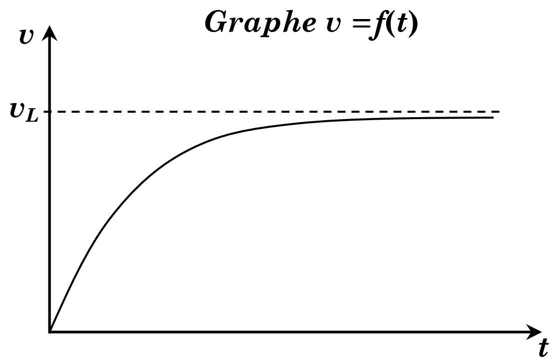
$$v(t=0) = v_L\,(1 - e^0) = v_L\,(1 - 1) = 0$$

Ce résultat est bien en accord avec l'hypothèse d'une vitesse nulle à l'origine du temps.

7. Pour une durée importante, on considère que le temps tend vers l'infini. On recherche alors la limite de la fonction $v(t)$ lorsque la date t tend vers l'infini :

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{t \to +\infty} v_L \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t}\right) = v_L\,(1 - e^{-\infty}) = v_L\,(1-0) = v_L$$

8. En utilisant les deux résultats précédents on peut tracer l'allure de la vitesse de la bulle d'air dans l'eau en fonction du temps :



9. Remplaçons la date t par $5 \times \tau$ dans l'expression de $v(t)$:

$$v(5\tau) = v_L \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} \times 5\tau}\right) = v_L\left(1 - e^{-5}\right) = 0{,}993 \times v_L$$

On remarque donc qu'à la date t $= 5\tau$ la vitesse de la bulle d'air est égale à plus de 99 % de la valeur de la vitesse limite v_L. On peut donc considérer que la bulle d'air a atteint cette vitesse limite.