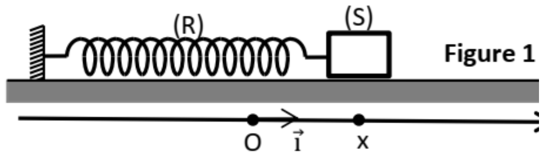
Oscillations mécaniques libres

Exercice n°1 :

Les ressorts sont présents dans la vie quotidienne. Ils sont utilisés, entre autres domaines, dans la mesure de l'intensité d'une force (dynamomètre), le maintien d'un serrage (pince à linge), l'accumulation d'énergie (moteur de jouets, de montres), l'amortissement des chocs (système antisismique des bâtiments), la suspension automobile (oscillateur mécanique) …

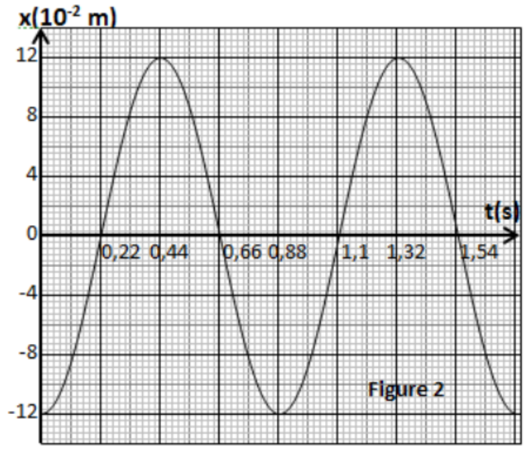


Ils sont utilisés pour restituer l'énergie mécanique emmagasinée quand ils sont déformés.

Un groupe d'élèves réalise un pendule élastique formé d'un solide (S) de masse m = 100 g et d'un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur k. Ce groupe d'élèves décide de déterminer la valeur de la constante k en utilisant deux méthodes : une méthode dynamique et une méthode énergétique.

Le solide est un mobile autoporteur qui peut glisser sans frottement sur une table à coussin d'air horizontale.

Le solide est écarté de sa position d'équilibre O, choisie comme origine des positions, puis lâché sans vitesse initiale. Il se met à osciller ; la position de son centre d'inertie est repérée par l'abscisse x à l'instant t **(figure 1)**.



3.1 Etude dynamique

A l'aide d'un dispositif approprié, le groupe d'élèves a enregistré les variations de l'abscisse x en fonction du temps **(figure 2)**.

3.1.1 Reproduire la **figure 1** sur la copie et représenter les forces qui s'exercent sur le solide (S). **(0,75 pt)**

3.1.2 Par application du théorème du centre d'inertie, établir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x du solide. **(0,25 pt)**

3.1.3 L'équation horaire $x(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est une solution de l'équation différentielle.

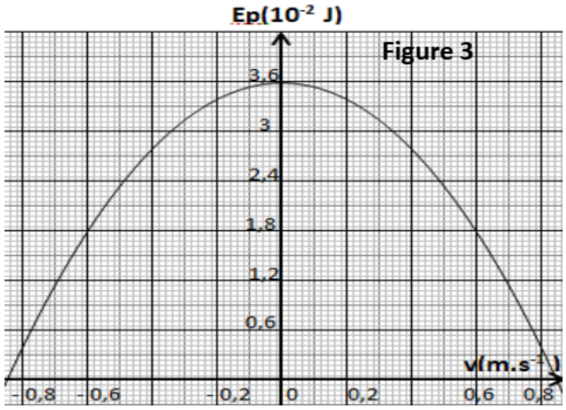
3.1.3.1 Déterminer en exploitant la courbe x = f(t) **(figure 2)**, l'élongation maximale (X_m), la période propre (T_0) et la phase à l'origine (φ). **(0,75 pt)**

3.1.3.2 En déduire l'équation horaire numérique x(t) et la valeur de la constante de raideur k. **(0,5pt)**

3.2 Etude énergétique

Le graphe représentant la variation de l'énergie potentielle Ep du système (solide + ressort) en fonction de la vitesse v du centre d'inertie est donné à la **figure 3**.

La référence pour l'énergie potentielle de pesanteur est la surface de la table et celle de l'énergie potentielle élastique est la position d'équilibre O choisie comme origine du repère.



3.2.1 Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système en fonction de la constante de raideur k, de la masse m, de l'abscisse x et de la vitesse v. **(0,25 pt)**

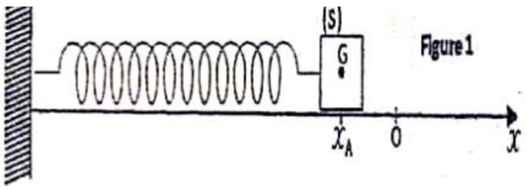
3.2.2 Etablir l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de k et X_m. **(0,25 pt)**

3.2.3. A partir de la courbe Ep = f(v) **(figure 3)**, déduire la valeur de l'énergie mécanique E et déterminer la valeur de la constante de raideur k. **(0,5 pt)**

3.2.4. Déterminer les abscisses x et les vitesses v lorsque l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle (Ep = Ec). **(0,75 pt)**

Exercice n°2 :

Des élèves se proposent d'étudier le mouvement d'un pendule élastique horizontal. Ce dispositif est constitué d'un solide S de masse m = 0,2 kg relié à un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur K inconnue ;



l'autre extrémité du ressort reste fixe.

Le mouvement de l'ensemble (ressort + solide (S)) s'effectue suivant une direction rectiligne.

Le solide est déplacé horizontalement à partir de sa position d'équilibre O, choisie comme origine des positions, vers un point A d'abscisse x_A, puis est abandonné à lui même sans vitesse initiale. Le solide effectue ainsi des oscillations.

3.1 Les frottements sont supposés négligeables.

3.1.1 Reproduire la figure 1 et représenter les forces qui s'exercent sur le solide. **(0,75 pt)**

3.1.2 Par application du théorème du centre d'inertie, établir l'équation différentielle du mouvement du solide **(0,25 pt)**

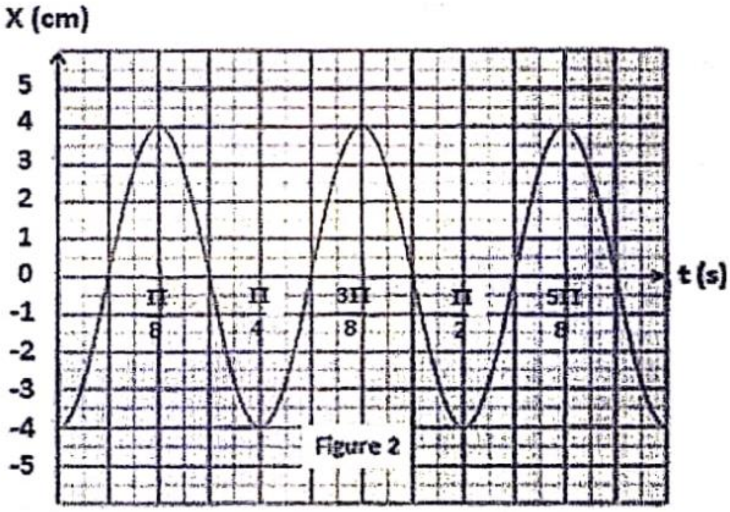


Figure 2

3.1.3 Vérifier que l'équation horaire $x_G = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est une solution de l'équation différentielle. En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0 en fonction de la constante de raideur K et de la masse m. **(0,5 pt)**

3.1.4 Par un système d'acquisition des données, un élève enregistre les variations de l'élongation x_G au cours du temps (figure 2).

En exploitant la courbe $x_G = f(t)$, déterminer les valeurs de X_m, ω_0 et φ **(0,75 pt)**

3.1.5 Déduire la valeur de la raideur K du ressort **(0,25 pt)**

3.1.6 L'énergie mécanique E du système (ressort + solide) se conserve-t-elle sur la durée de l'enregistrement ? Justifier. **(0,25 pt)**

3.1.7 Sous quelle(s) forme(s) apparait cette énergie aux instants $t_1 = 0$ s, $t_2 = \frac{\pi}{16}$ et $t_3 = \frac{\pi}{8}$? **(0,5 pt)**

3.2 Les élèves font déplacer maintenant l'oscillateur horizontal dans un fluide. Des frottements visqueux, équivalents à une force unique $\vec{f}$ colinéaire et de sens opposé au vecteur vitesse $\vec{v_G}$ du centre d'inertie du solide, s'exercent sur lui. Le même système d'acquisition permet aux élèves d'enregistrer les variations de l'élongation $x_G(t)$ représentées par la figure 3.

3.2.1 Donner le nom du régime d'oscillations. **(0,25 pt)**

3.2.2 Comment varie l'énergie mécanique pendant la durée de l'enregistrement ? Calculer le travail de la force de frottement entre les instants $t_1 = 0$ s et $t_2 = \frac{7\pi}{16}$ s. **(0,5 pt)**

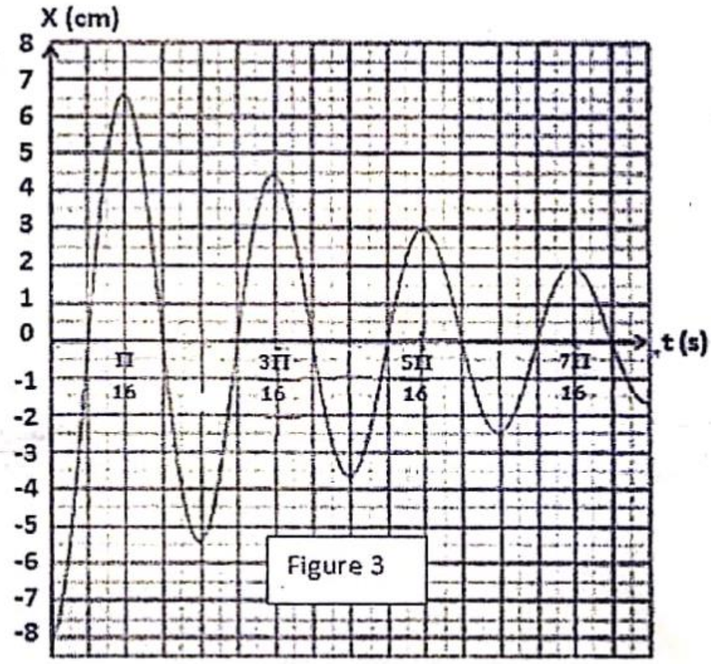


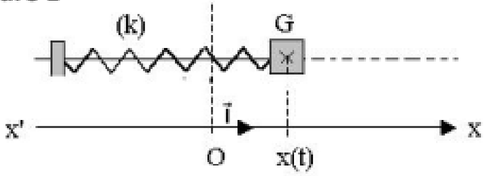
Figure 3

Exercice n°3 :

Pour améliorer le confort des automobilistes on utilise des ressorts comme éléments de suspension. Un de ces ressorts, de masse négligeable, est fixé sur une tige horizontale et peut se déplacer sans frottement. Il est solidaire à un solide S de masse m = 100 kg (figure 1).

A la date $t_0 = 0$, on déplace de sa position d'équilibre, le centre d'inertie G du solide S, jusqu'à la position + x_{max} puis on le lâche

Figure 1



sans vitesse initiale. Par un dispositif approprié, on enregistre les courbes représentant les variations de l'énergie potentielle, E_p, et de l'énergie cinétique, E_c, du système (ressort-solide S) d'une part et de l'accélération du solide S d'autre part (figures 2 et 3). Sur la figure 2, chacune des courbes C_1 et C_2 est une sinusoïde de période T **(Il n'est pas demandé de rendre ces courbes avec la copie).**

3.1 Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique du système "ressort-solide S" en fonction de la constante de raideur k du ressort et de la position x du centre d'inertie G du solide S. **(0,25 pt).**

3.2 Rappeler l'expression de l'énergie mécanique E_m du système "ressort-solide S"(on ne tient pas compte de l'énergie potentielle de pesanteur). Cette énergie mécanique E_m est elle constante ? (réponse à justifier).**(0,75 pt).**

3.3 A partir de l'expression de l'énergie mécanique E_m , établir l'équation différentielle régissant le mouvement du centre d'inertie G du solide S. **(0,5 pt).**

3.4 Retrouver l'équation différentielle régissant le mouvement du centre d'inertie G du solide S à partir d'une étude dynamique de ce mouvement. **(0,5 pt).**

3.5 L'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G du solide S est : $x = 5.10^{-2}\cos(\omega t)$ (x en m).

3.5.1 Sur la figure 2, identifier la courbe représentant les variations de l'énergie potentielle E_p et celle représentant les variations de l'énergie cinétique E_c. **(0,5 pt).**

3.5.2 En utilisant l'équation horaire et l'une des courbes de la figure 2, déterminer la valeur de la constante de raideur k du ressort utilisé. **(0,75 pt).**

3.5.3 Retrouver la valeur de la constante de raideur k du ressort utilisé par exploitation de la courbe de la figure 3. **(0,75 pt).**

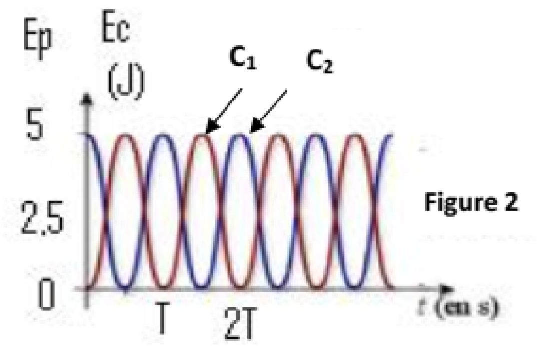


Figure 2

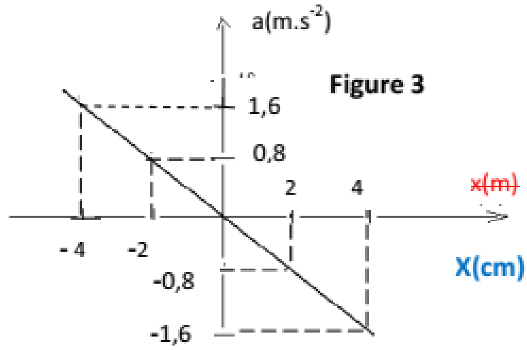
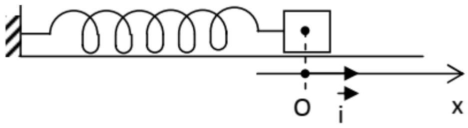


Figure 3

Exercice n°4 :

Un oscillateur mécanique libre est constitué d'un ressort élastique de constante de raideur k, d'axe horizontal, relié à un solide S supposé ponctuel, de masse m. Le solide S peut se déplacer, sans frottement, sur un plan horizontal, le long de l'axe du ressort.



4-1 Schématiser l'oscillateur à un instant où le solide S est écarté de sa position d'équilibre ; représenter à cet instant les forces qui s'exercent sur le solide S **(0,5 point)**

4-2- Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide ponctuel S **(0,5 point)**

4-3 La solution de cette équation différentielle est de la forme $x = X_m \cos(\omega_o t + \varphi)$.
Rappeler la signification des paramètres de cette équation, donner également leurs unités dans le système international. **(0,75 point)**

4-4 : L'énergie potentielle de cet oscillateur est nulle quand le solide S est à sa position d'équilibre.

4-4-1 Exprimer l'énergie potentielle de cet oscillateur en fonction de k, m, x et $\frac{dx}{dt}$. (x est l'abscisse du solide). **(0,5 point)**

4-4-2 En déduire l'expression de son énergie mécanique en fonction des grandeurs k et X_m **(0,25 point)**

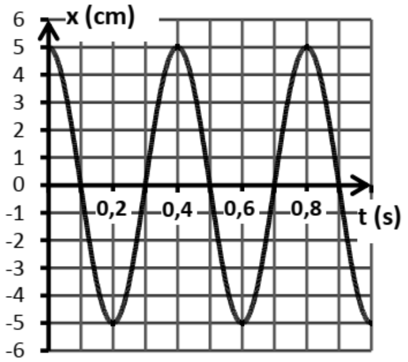
4-5 On réalise une série d'expériences et on enregistre, avec un dispositif approprié, l'évolution de la position x du solide ponctuel au cours du mouvement (courbes C1, C2 et C3) (page suivante)
Pour la courbe C3, l'enregistrement a été fait avec le solide S supportant une surcharge de masse m';
les autres courbes ont été enregistrées avec le solide S sans surcharge.

4-5-1 L'amplitude du mouvement du solide S influence-t-elle la période de ses oscillations ? Justifier. **(0,5 point)**

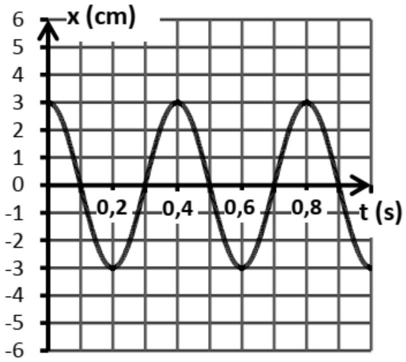
4-5-2 La période des oscillations change-t-elle si on modifie la masse du solide relié au ressort ? Justifier. **(0,5 point)**

LYCEE D'EXCELLENCE PRIVE ROSE DIENG KUNTZ
324 Cité du golf – Cambérène Golf Sud
Tel. 221 33 877 23 31 / 76 266 22 22 -BP: 5018 Dakar Fann – SENEGAL
Email: leprosedieng@ism.edu.sn

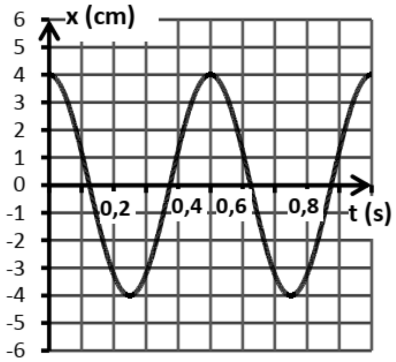
4-5-3 Le solide ponctuel S a une masse m = 650 g. Déterminer la constante de raideur k du ressort élastique et la masse m' de la surcharge. **(0,5 point)**



C1 : Oscillation du solide S seul



C2 : Oscillation du solide S seul

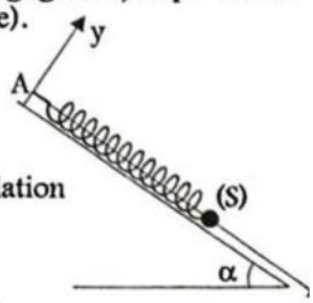


C3 : Oscillation du solide S + la surcharge

Exercice n°5 :

Un solide S, de masse m = 200 g et de centre d'inertie G, peut se déplacer d'un mouvement de translation rectiligne, sans frottement, le long d'un banc à coussin d'air. Celui-ci fait un angle $\alpha = 10°$ avec l'horizontale. Le solide est attaché à l'extrémité inférieure d'un ressort de masse négligeable, à spires non jointives et à réponse linéaire ; l'autre extrémité du ressort est fixée en A (voir figure).

On prendra $g = 10\ m.s^{-2}$.



1/ Le solide S étant en équilibre, son centre d'inertie est en G_0. Le ressort dont l'axe est parallèle à la direction du banc, a subi un allongement $\Delta\ell_0 = 6$ cm.

a/ Représenter les forces qui s'exercent sur le solide S.

b/ Ecrire la condition d'équilibre du solide S sous forme vectorielle et projeter la relation suivant les deux axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$.

c/ Exprimer le coefficient de raideur k du ressort en fonction des données. Calculer sa valeur numérique.

2/ On écarte le solide de sa position d'équilibre vers le bas. Son centre d'inertie est alors en G_1. La distance G_0G_1 mesurée le long du banc vaut d = 5 cm. On abandonne le solide sans vitesse à une date que l'on prendra pour origine des temps. La position G_0 sera prise comme origine des abscisses.

a/ Ecrire la relation de la dynamique (ou théorème du centre d'inertie).

b/ Etablir l'équation différentielle du mouvement.

c/ Déterminer l'équation horaire du mouvement.

3/ On écarte maintenant le solide S de sa position d'équilibre de $x_0 = 8$ cm. Puis on le libère en le lançant vers le haut avec une vitesse $v = 0,3\ m.s^{-1}$. Des oscillations prennent alors naissance.

a/ Déterminer l'énergie mécanique totale du système [ressort - solide S - Terre] à un instant t pendant les oscillations. On prendra l'énergie potentielle de pesanteur nulle au point G_0.

b/ En déduire l'équation différentielle du mouvement et écrire l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G de S, dans le repère $(O, \vec{i})$, l'instant du début des oscillations étant pris comme origine des temps.