SERIE D'EXERCICES SUR P11 : OSCILLATIONS MÉCANIQUES LIBRES

EXERCICE 1: Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort à spires non jointives de raideur $k = 18\ N.m^{-1}$, d'axe horizontal dont une extrémité est fixée à un solide (S) de dimensions telles qu'il peut être assimilé à un solide ponctuel de masse m = 500g. L'autre extrémité du ressort est fixe. Le solide (S) peut se déplacer, sans frottement, sur un plan horizontal, le long de l'axe du ressort.

On écarte le solide de sa position d'équilibre de $X_m = 2$ cm, puis on le libère sans vitesse initiale.

1/ Schématiser l'oscillateur à un instant t quelconque ; faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le solide à cet instant t puis représenter ces forces.

2/ Par application du théorème du centre d'inertie appelé aussi deuxième loi de Newton :

a/ Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide ponctuel (S)

b/ Vérifier que $x(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle.

c/ Rappeler la signification des paramètres de x(t) en donnant également leurs unités dans le système international.

d/ Donner l'expression numérique de x(t). Puis en déduire celles de $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$.

e/ Déterminer la période propre T_0 et la fréquence propre N_0 des oscillations mécaniques.

3/ Déterminer l'énergie mécanique E de cet oscillateur à l'instant t en fonction de k, m, x et $\dot{x}$.

L'état de référence des énergies potentielles élastiques est choisi pour le ressort détendu.

4/ Montrer que cette énergie mécanique E est constante. Exprimer sa valeur en fonction de m, ω_0 et X_m puis en fonction de k et X_m.

5/ Représenter sur le même graphe les allures des énergies (E ; E_c et E_p)

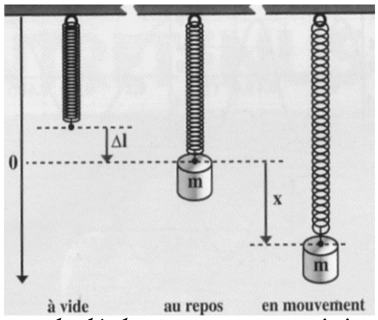
6/ Par la méthode énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement.

7/ On écarte maintenant le solide S de sa position d'équilibre de $x_0 = 2$ cm. Puis on le libère en le lançant vers les abscisses positives avec une vitesse $\overrightarrow{V_0}$ de norme $v = 0{,}207 m/s$. Des oscillations prennent alors naissance.

Etablir l'équation différentielle du mouvement à un instant t puis l'expression numérique de la position du centre d'inertie G de S, dans le repère $(O, \vec{\imath})$ sous la forme $x(t) = X_m.\cos(\omega_0 t + \varphi)$. L'instant du début des oscillations étant pris comme origine des temps.

EXERCICE 2: Dans l'exercice on prendra comme valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 10\ m.s^{-2}$

Un oscillateur harmonique est constitué d'un ressort R de masse négligeable suspendu en un point fixe A et auquel est accroché un solide S de masse m = 200 g et d'inertie G.



1/ La longueur à vide du ressort est $l_0 = 20$ cm. On accroche le solide S, le ressort s'allonge de 8 cm. Etablir la condition d'équilibre, puis calculer la constante de raideur k du ressort.

2/ On tire le solide S verticalement, vers le bas, en donnant un allongement supplémentaire de $X_0 = 1$ cm au ressort, puis on lâche le solide sans vitesse initiale. Il effectue alors des oscillations que l'on supposera non amorties de période T_0.

a/ Etablir l'équation différentielle du mouvement.

b/ Déterminer l'équation horaire x = f(t) en prenant comme origine des temps l'instant du lâcher et comme origine O des déplacements la position d'équilibre du ressort avec solide accroché. On choisira un axe Ox vertical orienté positivement vers le bas.

c/ Calculer la période propre T_0 des oscillations.

EXERCICE 3:

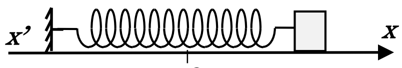


Figure 1

Le pendule élastique horizontal de la figure 1 est constitué par solide (S) de masse m = 0,2 kg soudé à l'une des extrémités d'un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur K, l'autre extrémité est attaché à un support fixe. A l'équilibre le centre d'inertie (G) du solide (S) coïncide avec l'origine O d'un repère espace horizontal $(O,\vec{\imath})$.

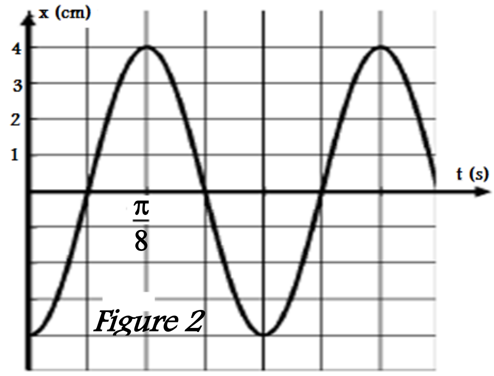


Figure 2

Partie A: A partir du point O, on écarte le solide (S) vers un point A d'abscisse x_A et à la date t = 0s, on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale. Au cours de son mouvement, le solide (S) se déplace sans frottement et son centre d'inertie (G) est repéré par l'élongation OG = x(t).

Un système d'acquisition de données, enregistre les variations de l'élongation x au cours du temps (figure 2).

1/ En utilisant le graphe écrire la loi horaire x = f(t) de mouvement du solide.

2/ Déduire l'équation différentielle du mouvement ainsi que la constante de raideur K du ressort.

3/ L'énergie cinétique du solide varie au cours du temps selon une fonction sinusoïdale de période T. Etablir l'expression de E_C en fonction du temps. Donner la valeur de T.

4/ L'énergie mécanique du système {solide, ressort} est E.

a/ Montrer que cette énergie est constante.

b/ Comment apparait cette énergie aux instants $t_1 = 0s$; $t_2 = \frac{\pi}{16}$ s et $t_3 = \frac{\pi}{8}$ s.

<u>**Partie B:**</u>

L'oscillateur est maintenant soumis à des forces de frottements visqueux équivalents à une force unique $\vec{f} = -h.\vec{v}$, avec h une constante positive.

1/ Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x de (G).

2/ Montrer que l'énergie totale du système {solide, ressort} diminue au cours du temps.

3/ A l'aide d'un dispositif approprié, on a enregistré le diagramme d'espace de mouvement du solide, le résultat est donné par le graphe de la figure 3.

a/ Quel est le nom du régime des oscillations ?

b/ Calculer ce travail entre les instants $t_1 = 0$s et $t_2 = \frac{7\pi}{8}$ s.

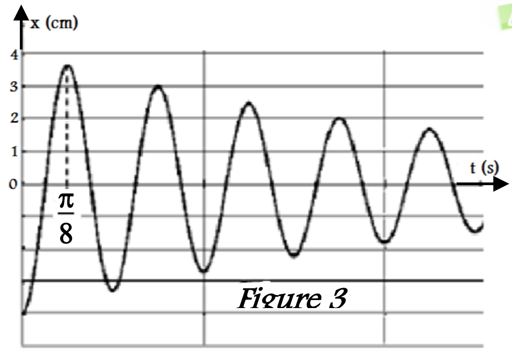


Figure 3

EXERCICE 4:

Un oscillateur mécanique libre est constitué d'un ressort élastique de constante de raideur k, d'axe horizontal, relié à un solide S supposé ponctuel, de masse m. Le solide S peut se déplacer, sans frottement, sur un plan horizontal, le long de l'axe du ressort.

1/ Schématiser l'oscillateur à un instant où le solide S est écarté de sa position d'équilibre ; représenter à cet instant les forces qui s'exercent sur le solide S.

2/ Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide ponctuel S.

3/ L'énergie potentielle de cet oscillateur est nulle quand le solide S est à sa position d'équilibre.

a/ Exprimer l'énergie potentielle de cet oscillateur en fonction de k, m, x et $\frac{dx}{dt}$ (x est l'abscisse du solide).

b/ En déduire l'expression de son énergie mécanique en fonction des grandeurs k et Xm.

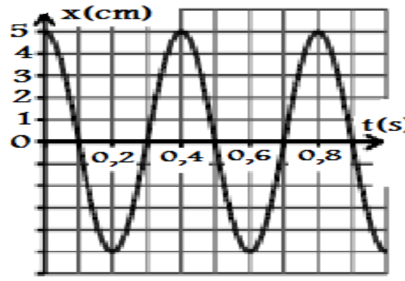
4/ On réalise une série d'expériences et on enregistre, avec un dispositif approprié, l'évolution de la position x du solide ponctuel au cours du mouvement (courbes C1, C2 et C3).

Pour la courbe C3, l'enregistrement a été fait avec le solide S supportant une surcharge de masse m'; les autres courbes ont été enregistrées avec le solide S sans surcharge.

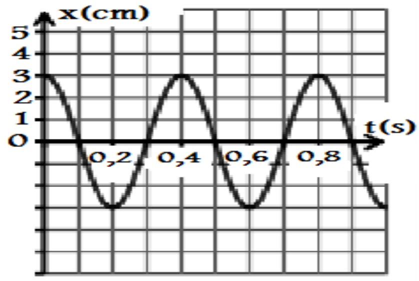
a/ L'amplitude du mouvement du solide S influence-t-elle la période de ses oscillations ? Justifier.

b/ La période des oscillations change-t-elle si on modifie la masse du solide relié au ressort ? Justifier.

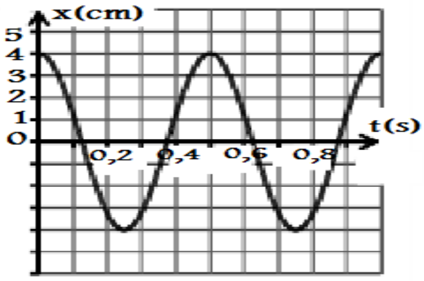
c/ Le solide ponctuel S a une masse m = 650 g. Déterminer la constante de raideur k du ressort élastique et la masse m' de la surcharge.



C1: Oscillation du solide S seul



C2: Oscillation du solide S seul



C3: Oscillation du solide S + la surcharge

EXERCICE 5:

Un pendule élastique horizontal est formé d'un ressort de raideur K = 20 N.m^{-1} et d'un solide de masse m ; à l'instant t = 0, le centre d'inertie G du solide est lancé à partir de la position x_0 = 2cm avec la vitesse initiale de v_0 = 20 cm.s^{-1}.

<u>Partie I, les frottements sont négligeables :</u>

1. a/ Etablir l'équation différentielle en fonction de l'élongation x du mouvement du centre d'inertie G.

b/ Donner la solution générale de cette équation différentielle et en déduire l'expression de la période propre de l'oscillateur.

c/ La durée de 20 oscillations est Δt = 12,56s. Montrer que la masse du solide vaut m = 200g.

2. a/ Calculer la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur à l'instant du lancement.

b/ En déduire l'amplitude X_m des oscillations ainsi que la vitesse de passage par la position d'équilibre.

<u>Partie II: Les frottements ne sont plus négligeables.</u>

Les frottements sont représentés par une force $\vec{f} = -h\vec{V}$, ou h désigne le coefficient de frottement du milieu, et V la mesure algébrique de la vitesse du centre d'inertie du solide.

3/ La figure 2 donne l'enregistrement du mouvement du centre d'inertie du solide.

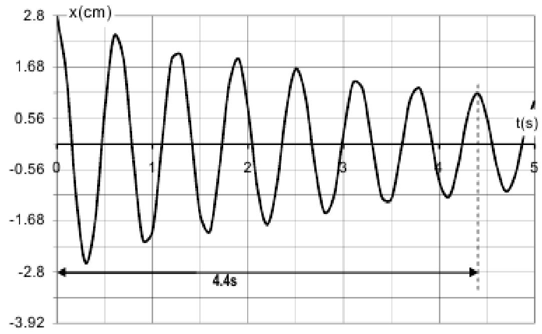
a/ Quelle est la nature des oscillations du centre d'inertie G ? Justifier.

b/ Comment appelle-t-on le régime des oscillations du pendule ?

c/ Déterminer la pseudopériode T.

4/ L'équation différentielle régissant le mouvement du solide est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 10^2 x = 0$$



a/ Déduire la valeur de la pulsation propre et celle du coefficient de frottement h.

b/ Montrer que: $\frac{dE}{dt}$ =- hv² , ou E est l'énergie mécanique du système S = { solide + ressort}. Conclure quant à la conservation de l'énergie mécanique par le système S.