



SERIE D'EXERCICES DE RENFORCEMENT SUR P11 : OSCILLATIONS MECANQUES LIBRES

Exercice 1 :

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort à spires non jointives de raideur $k = 18 \text{ N.m}^{-1}$, d'axe horizontal dont une extrémité est fixée à un solide S de dimensions telles qu'il peut être assimilé à un solide ponctuel de masse $m = 500 \text{ g}$. L'autre extrémité du ressort est fixe. Le solide S peut se déplacer, sans frottement, sur un plan horizontal, le long de l'axe du ressort.

On écarte le solide de sa position d'équilibre de $X_m = 2 \text{ cm}$, puis on le libère sans vitesse initiale.

1/ Etude dynamique :

1-1/ Schématiser l'oscillateur à un instant t quelconque ; faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le solide à cet instant t puis représenter ces forces.

1-2/ Par application du théorème du centre d'inertie appelé aussi deuxième loi de Newton :

a/ Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement du solide ponctuel S

b/ Vérifier que $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle.

c/ Rappeler la signification des paramètres de $x(t)$ en donnant également leurs unités dans le système international.

d/ Donner l'expression numérique de $x(t)$. Puis en déduire celles de $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$.

e/ Déterminer la période propre T_0 et la fréquence propre N_0 des oscillations mécaniques.

2/ Etude énergétique :

2-1/ Déterminer l'énergie mécanique E de cet oscillateur à l'instant t en fonction de k , m , x et $\dot{x}$. (x est l'abscisse du solide).

L'état de référence des énergies potentielles élastiques est choisi pour le ressort détendu.

2-2/ Montrer que cette énergie mécanique E est constante. Exprimer sa valeur en fonction de m , ω_0 et X_m puis en fonction de k et X_m .

2-3/ Représenter sur le même graphe les allures des énergies (E ; E_c et E_p)

2-4/ Par la méthode énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 2 :

Un pendule élastique est constitué d'un solide (S) de masse m pouvant coulisser, sans frottement, sur une tige horizontale (T) et d'un ressort, à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur k . La position du centre d'inertie G de (S) est repérée par son abscisse $x(t)$ sur un axe horizontal $x'Ox$.

L'origine O des abscisses est confondue avec la position de G lorsque le solide (S) est en équilibre. Ecarté de sa position d'équilibre puis abandonné, le solide (S) se met à osciller de part et d'autre du point O.

A un instant de date t , le système est représenté comme indiqué sur la figure 1.

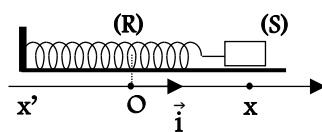


Figure 1

1/ Reproduire la figure 1 puis représenter les forces extérieures qui s'exercent sur (S).

2/ A l'aide d'un dispositif approprié, on enregistre l'évolution de l'abscisse x en fonction du temps. On obtient la courbe de la figure 2 ci-dessous.

a/ Quelle est la nature des oscillations du centre d'inertie G ? Justifier.

b/ Nommer le régime des oscillations du centre d'inertie G.

c/ A partir de la courbe de la figure 2 dire si le solide (S) est abandonné à l'instant de date $t = 0$ s avec une vitesse ou sans vitesse. Justifier la réponse.

3/ Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système [solide (S) et ressort] en fonction de x , v , k et m .

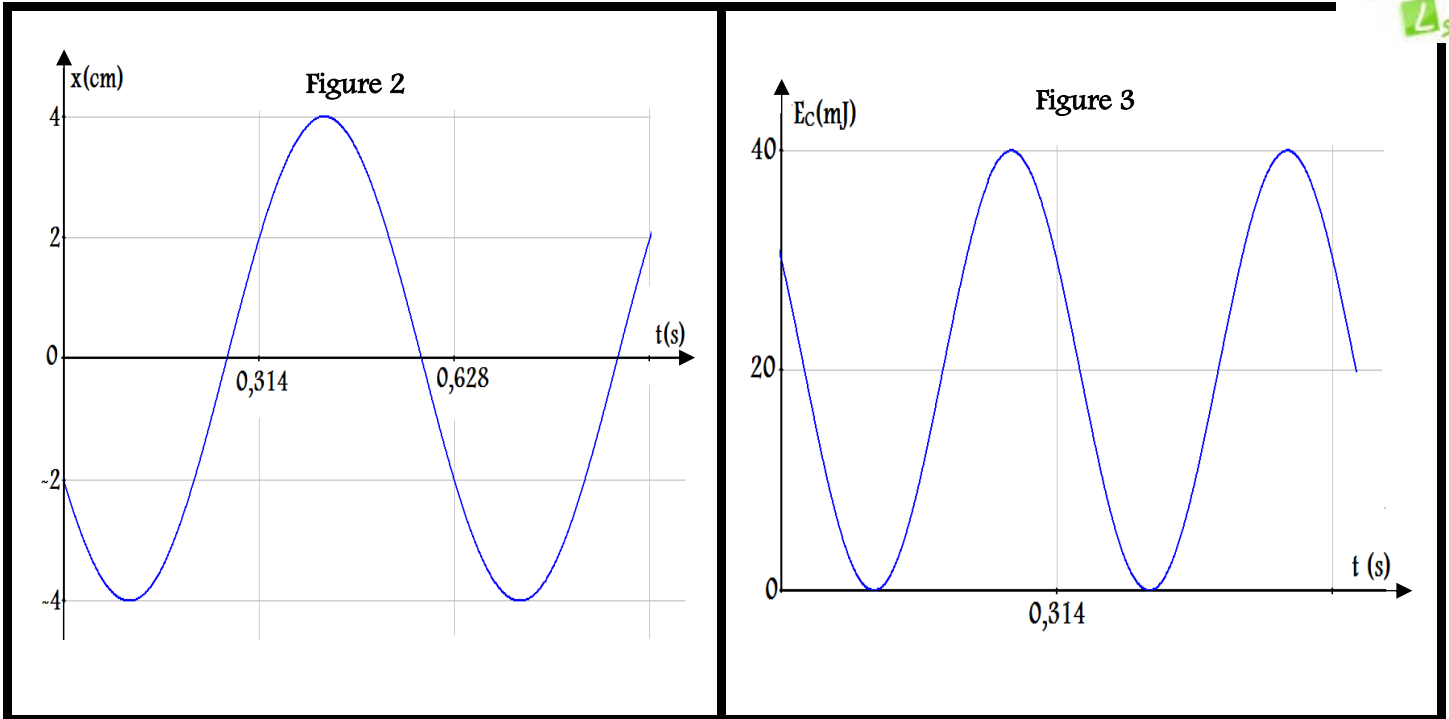
4/ Sachant que: $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Montrer que cette énergie mécanique E est constante. Déduire ensuite l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'abscisse $x(t)$ du centre d'inertie G.

5/ Déterminer à partir de la courbe de la figure 2 l'amplitude X_m , la période propre T_0 , la pulsation propre ω_0 et la phase initiale φ . Déduire l'expression numérique de $x(t)$.

6/ La courbe de la figure 3 ci-dessous représente les variations de l'énergie cinétique E_c du pendule au cours du temps.

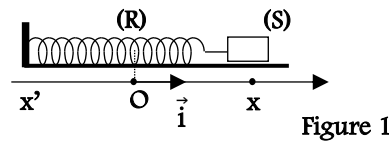
a/ Etablir l'expression de l'énergie cinétique $E_c = m\omega_0^2 X_m^2 \left(\frac{1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)}{4} \right)$.

b/ Déduire les valeurs numériques de la masse m du solide (S) et de la constante de raideur k du ressort.

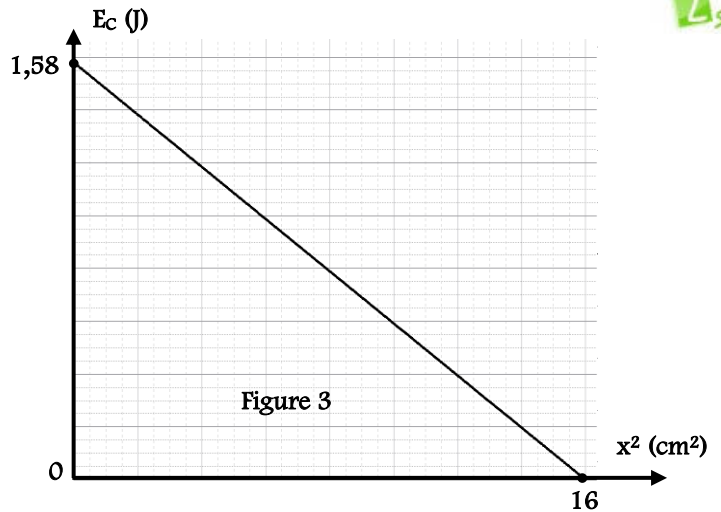
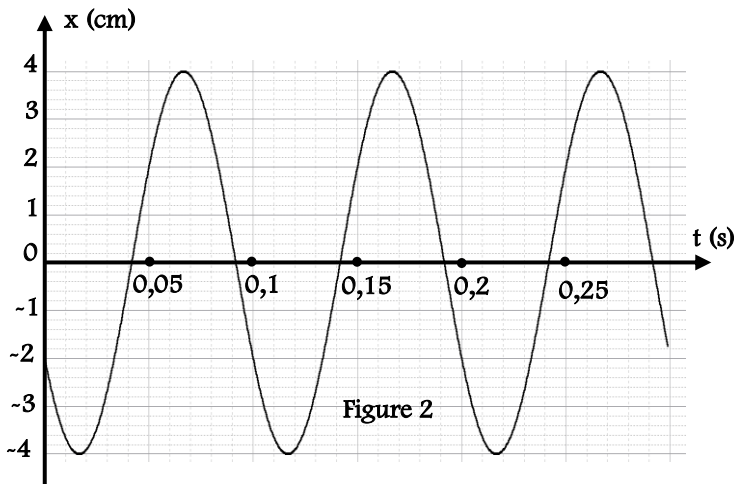


Exercice 3 :

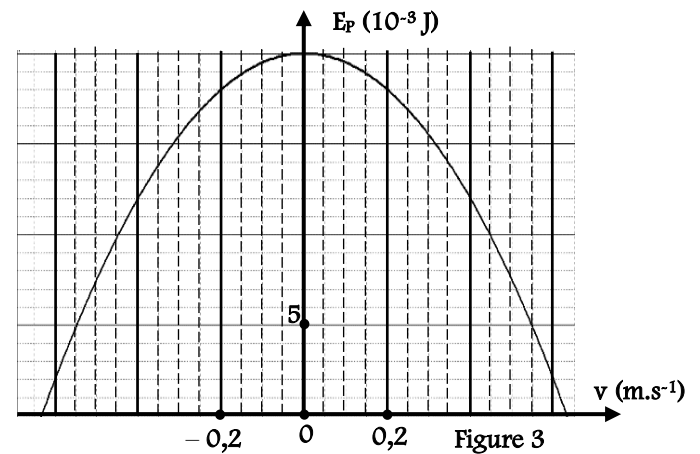
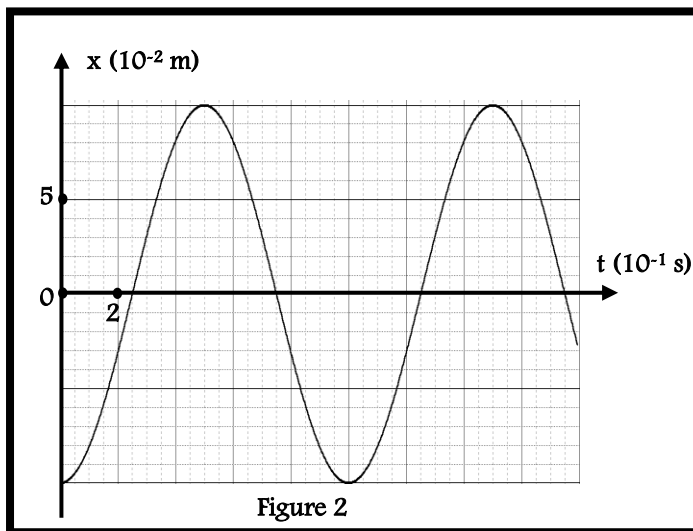
Un solide ponctuel (S) de masse m , est attaché à un ressort, à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur k . La position du centre d'inertie G de (S) est repérée par son abscisse x sur un axe horizontal $x'Ox$. L'origine O des abscisses est confondue avec la position de G lorsque (S) est à l'équilibre. Ecarté de sa position d'équilibre, puis abandonné à l'instant de date $t = 0$ s, le solide (S) se met à osciller de part et d'autre du point O. A un instant de date t , le système est représenté comme l'indique la figure 1 ci-dessous.



- 1/ Représenter sur la figure les forces extérieures exercées sur (S) à l'instant de date t .
- 2/ Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'abscisse $x(t)$ du centre d'inertie G. En déduire la nature de son mouvement.
- 3/ A l'aide d'un dispositif approprié, on enregistre l'évolution de l'abscisse $x(t)$ de G. On obtient la courbe de la figure 2 ci-dessous.
 - a/ Quelle est la nature des oscillations du centre d'inertie G ? Justifier.
 - b/ Nommer le régime des oscillations du centre d'inertie G.
 - c/ A partir de la courbe de la figure 2 dire si le solide (S) est abandonné à l'instant de date $t = 0$ s avec une vitesse ou sans vitesse. Justifier la réponse.
 - d/ Déterminer à partir de la courbe l'abscisse maximale X_m et la période propre T_0 . En déduire la valeur de la pulsation propre ω_0 .
 - e/ Sachant que la solution de l'équation différentielle s'écrit: $x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$. Déterminer la phase initiale φ_x ; puis déduire l'expression numérique de $x(t)$.
- 4/ a/ Exprimer l'énergie mécanique E de cet oscillateur à l'instant t en fonction de k , m , x et $\dot{x}$ (x est l'abscisse du solide).
 - b/ Montrer que cette énergie mécanique E est constante. Exprimer sa valeur en fonction de m , T_0 et X_m .
- 5/ Détermination de la valeur exacte de la masse m du solide (S).
 - a/ Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c en fonction de x^2 .
 - b/ La courbe de la figure 3 ci-dessous représente la variation de l'énergie cinétique du système {(S) ; (R)} en fonction de x^2 . En exploitant cette courbe, déterminer la valeur de la constante de raideur k du ressort.
 - c/ Déduire la valeur de la masse m du solide (S).



Exercice 4 :



Les ressorts sont présents dans la vie quotidienne. Ils sont utilisés, entre autres domaines, dans la mesure de l'intensité d'une force (dynamomètre), le maintien d'un serrage (pince à linge), l'accumulation d'énergie (moteur de jouets, de montres), l'amortissement des chocs (système antisismique des bâtiments), la suspension automobile (oscillateur mécanique) ...

Ils sont utilisés pour restituer l'énergie mécanique emmagasinée quand ils sont déformés.

Un groupe d'élèves réalise un pendule élastique formé d'un solide (S) de masse $m = 100 \text{ g}$ et d'un ressort (R) à spires non jointives de masse négligeable et de constante de raideur k .

Ce groupe d'élèves décide de déterminer la valeur de la constante k en utilisant deux méthodes : une méthode dynamique et une méthode énergétique.

Le solide est un mobile autoporteur qui peut glisser sans frottement sur une table à coussin d'air horizontale.

Le solide est écarté de sa position d'équilibre O, choisie comme origine des positions, puis lâché sans vitesse initiale.

Il se met à osciller ; la position de son centre d'inertie est repérée par l'abscisse x à l'instant t (figure 1).

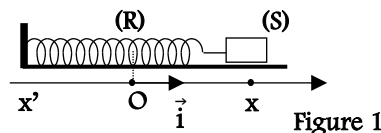


Figure 1

I/ Etude dynamique :

A l'aide d'un dispositif approprié, le groupe d'élèves a enregistré les variations de l'abscisse x en fonction du temps (figure 2 ci-dessus).

1/ Reproduire la figure 1 sur la copie et représenter les forces qui s'exercent sur le solide (S).

2/ Par application du théorème du centre d'inertie, établir l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse x du solide.

3/ L'équation horaire $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ est une solution de l'équation différentielle.

a/ Déterminer en exploitant la courbe $x = f(t)$ (figure 2), l'élongation maximale (X_m), la période propre (T_0) et la phase à l'origine (φ).

b/ En déduire l'équation horaire numérique $x(t)$ et la valeur de la constante de raideur k .

II/ Etude énergétique :

Le graphe représentant la variation de l'énergie potentielle E_p du système (solide + ressort) en fonction de la v du centre d'inertie est donné à la figure 3 ci-dessus.

La référence pour l'énergie potentielle de pesanteur est la surface de la table et celle de l'énergie potentielle élastique est la position d'équilibre O choisie comme origine du repère.

1/ Donner l'expression de l'énergie mécanique E du système en fonction de la constante de raideur k , de la masse m , de l'abscisse x et de la vitesse v .

2/ Etablir l'expression de l'énergie mécanique du système en fonction de k et X_m .

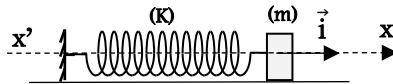
3/ A partir de la courbe $E_p = f(v)$ (figure 3), déduire la valeur de l'énergie mécanique E et déterminer la valeur de la constante de raideur k .

4/ Déterminer les abscisses x et les vitesses v lorsque l'énergie cinétique est égale à l'énergie potentielle ($E_p = E_c$).

Exercice 5 :

A/ Les frottements sont supposés négligeables :

Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort (R) de raideur $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$ et de masse négligeable, enfilé à travers une tige, à l'extrémité duquel est soudé un solide ponctuel (S) de masse $m = 400 \text{ g}$ pouvant coulisser sans frottement.



A l'origine des dates, on écarte le solide (S) de x_0 à partir de sa position d'équilibre dans le sens positif puis on l'abandonne sans vitesse.

A un instant t quelconque, au cours des oscillations, l'élongation du solide est x et sa vitesse est v .

1/ Etablir l'équation différentielle régissant les oscillations du solide (S) et déduire la nature de son mouvement.

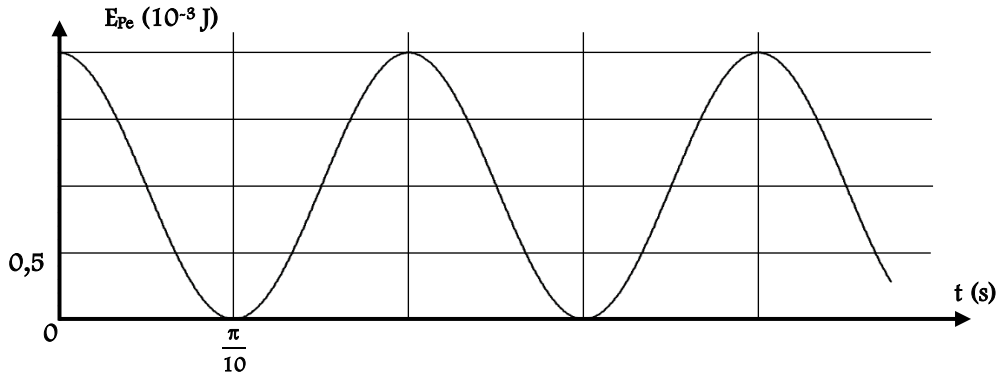
2/ Calculer la période T_0 des oscillations.

3/ Etablir l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_{pe} = kX_{\max}^2 \left(\frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_x)}{4} \right)$, sachant que la solution de l'équation différentielle est $x(t) = X_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$

4/ On donne ci-dessous la courbe de l'énergie potentielle élastique E_{pe} en fonction du temps.

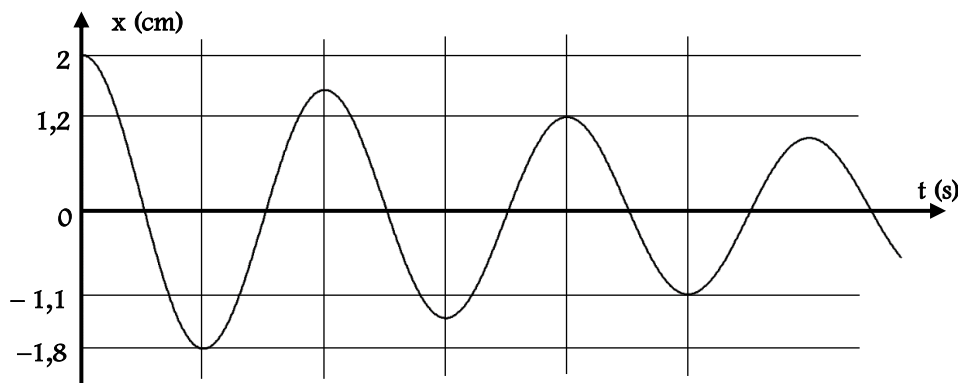
a/ Comparer la période T des variations de l'énergie potentielle élastique et la période T_0 des oscillations.

b/ Déterminer l'amplitude $X_{\max}$ des oscillations et établir l'expression numérique de l'équation horaire du mouvement



B/ Les frottements ne sont plus négligeables :

En réalité, le solide est soumis à des forces de frottement de types visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$ avec h une constante positive appelée coefficient de frottement. L'enregistrement de l'élongation du solide ponctuel (S) en fonction du temps a donné le graphe de la figure ci-dessous.



1/ Justifier que l'oscillateur subit une force de frottement.

2/ Montrer que l'énergie de l'oscillateur diminue au cours du temps.

3/ Calculer la variation de l'énergie mécanique de l'oscillateur entre les instants de dates $t_1 = 0$ et $t_2 = 2T$.