एस.सी.ई.आर.टी., बिहार
द्वारा विकसित

F7

दो वर्षीय सेवापूर्व डिप्लोमा इन एलिमेन्ट्री एजुकेशन

गणित का शिक्षणशास्त्र

भाग–1 (प्राथमिक स्तर)

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् (एस.सी.ई.आर.टी.),
महेन्द्रू, पटना, बिहार

बिहार सरकार

एस.सी.ई.आर.टी., बिहार द्वारा विकसित

दो वर्षीय सेवापूर्व
डिप्लोमा इन एलिमेण्ट्री एजुकेशन (डी.एल.एड)

गणित का शिक्षणशास्त्र–1

(प्राथमिक स्तर)

F-7

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् (एस.सी.ई.
आर.टी.), महेन्द्रू, पटना, बिहार –. 800006

तकनीकी सहायता: Implementation Support Agency, SCERT Bihar

प्रकाशक

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्
(एस.सी.ई.आर.टी.), महेन्द्रू, पटना, बिहार

© एस.सी.ई.आर.टी., बिहार

विश्व बैंक सम्पोशित परियोजना के अन्तर्गत
डी.एल.एड. (फेस–टू–फेस) के साधनसेवियों एवं प्रशिक्षुओं हेतु

आमुख

राश्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा NCF–2005 एवं बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा BCF–2008 के अनुसार अब गणित का ज्ञान केवल क्रियात्मक रूप में सूत्रों को रटा देना एवं प्रश्न को हल करा देना नहीं बल्कि गणित की अवधारणाओं की समझ विकसित करना प्रमुख बात है। NCF–2005 ने जहां एक ओर बच्चों को केंद्र में रखकर एक ऐसी शिक्षण प्रक्रिया की बात की है जिससे शिक्षार्थी स्वयं ज्ञान का सृजन करें वहीं दूसरी ओर BCF–2008 में बिहार के स्थानीय बोध– ज्ञान को विद्यालयीय शिक्षा प्रक्रिया में शामिल करने पर बल दिया गया है।अब अध्यापक की भूमिका एक संचालक एवं मार्गदर्शक की हो गई है।

यद्यपि इस सदी के आरंभ में शिक्षा की गुणवत्ता का सवाल कई स्तरों पर उभरा। गुणवत्ता को बढ़ाने के लिए बड़ी तादाद में प्रशिक्षित एवं योग्य शिक्षकों की जरूरत महसूस की गई।बिहार में प्रारंभिक शिक्षा के लिए अध्यापक शिक्षा एवं शिक्षक प्रशिक्षण की जरूरतों और बिहार विशेष के सांस्कृतिक व सामाजिक संदर्भों में ऐसे शिक्षकों की जरूरत है जिनके लिए सिखाना सांस्कृतिक प्रतिबद्धता हो और जिसे सिखाने में आनंद आए ।अन्य कौशलों की तरह सिखाना विशेषकर गणित तभी मजेदार लगता है जब शिक्षकों को गणित की विषय सामग्री की उच्च कोटि की जानकारी तथा उसको कक्षा में विनमयित करने का कौशल भी उनमें मौजूद हो ।साथ ही वे बच्चों को गणित के संदर्भ में भी बेहतर तरीके से जानते एवं समझते हों जिन्हें वे सिखा रहे हों।

गणित का आरंभ एक अंतर्दृष्टि, रणनीति एवं गतिविधि के रूप में मानव अस्तित्व के साथ – साथ ही हुआ। यह मूलतः व्यक्ति की संज्ञानात्मक तथा विश्लेषणात्मक गतिशीलता एवं उसका परिणाम है। यह अपनी संरचना में तार्किक तथा सांकेतिक है किंतु इसका प्रारंभ तथा प्रयोग अनुभविक है। बच्चा जैसे–जैसे बड़ा होता है उसकी गणितीय परिपक्वता बढ़ती जाती है। वह अब पास पड़ोस की चीजों को अधिक ध्यानपूर्वक देखता है, उसका कारण समझने या फिर जो देखता है उसकी पुष्टि करने की कोशिश करता है। उसकी कोशिश किसी चीज को पहले भौतिक रूप से फिर तार्किक रूप से रखने की होती है। इस अवस्था में शिक्षक से यह अपेक्षा की जाती है कि वे तर्क परीक्षण के मामले में बच्चे को दिशा निर्देश दें और अपना कौशल निखारने में उसकी मदद करें।

प्रस्तुत पुस्तक में दी गई इकाइयाँ गणित के विभिन्न आयामों को हमारे सामने रखती हैं आशा है इन इकाइयों के जरिए गणित शिक्षण में तरीके को तो विस्तार मिलेगा ही साथ ही गणित की कुछ प्राचीन मान्यताएँ यथा डर, भय, भ्रम इत्यादि को भी चुनौती दी जा सकेगी। प्रस्तुत पुस्तक विद्यार्थी, अध्यापकों के लिए तैयार नवीन पाठ्यक्रम के अनुसार विकसित की गई है। इसे और उपयोगी एवं सारगर्भित बनाने के लिए आपके अमूल्य सुझावों को एससीईआरटी आत्मसात करने के लिए सदैव तैयार रहेगा।

निदेशक

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, बिहार, पटना

पाठ्य पुस्तक विकास समूह

पत्र–F-7

(गणित का शिक्षणशास्त्र–1 "प्राथमिक स्तर")

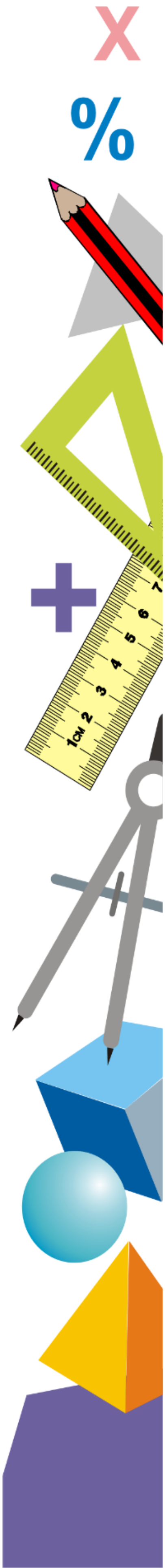
दिशाबोध	श्री दीपक कुमार सिंह, भा.प्र.से., अपर मुख्य सचिव, शिक्षा विभाग, बिहार, पटना श्री सज्जन राजसेकर, भा.प्र.से., निदेशक, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, महेन्द्रू, पटना बिहार डॉ० एस.पी.सिन्हा, सलाहकार, शिक्षा विभाग, बिहार, पटना
समन्वयक	**डॉ०** रश्मि प्रभा, संयुक्त निदेशक (डायट), एस.सी.ई.आर.टी बिहार, पटना
लेखक समूह	डा० राकेश कुमार, प्राचार्य, डायट, भागलपुर
	श्री सुनील तांती, पूर्व प्रतिनियुक्त व्याख्याता, डायट, शेखपुरा
	श्री गोविन्द प्रसाद, प्रधानाध्यापक,उत्क्रमित माध्यमिक विद्यालय जैतिया,चनपटिया, प० चम्पारण
	श्री दिलीप कुमार, प्रधानाध्यापक, उत्क्रमित माध्यमिक विद्यालय, कुंदी, नूरसराय, नालन्दा
	श्री रिजवान रिजवी, मध्य विद्यालय, सिलौता, चांद, कैमूर
समीक्षक	श्रीमती सोनी कुमारी, व्याख्याता, डायट, बाँका
	श्री संजीव कुमार, व्याख्याता, डायट, मधेपुरा

पाठ–सूची

इकाई	इकाई का नाम	पृष्ठ संख्या
1	गणित की समझ	9 - 23
2	प्राथमिक स्तर पर गणित : आधार, उद्देश्य एवं पाठ्यक्रम	24 - 64
3	संख्या एवं संख्या संक्रियाएं	65 - 92
4	मापन एवं आँकड़े	93 - 135
5	संदर्भ सूची	136135

इकाई 1

गणित की समझ



- परिचय
- गणित के बारे में भय, भ्रम और मिथक
- दैनिक जीवन में गणित की आवश्यकता एवं महत्व
- गणितः सबके लिए
- गणित की प्रकृति
    - तार्किकता
    - प्रतीकात्मकता
    - सटीकता
    - अमूर्त्तता
    - क्रमिकता
    - सार्वभौमिकता
- गणितीयकरण
- अभ्यास के प्रश्न
- परियोजना कार्य

परिचय

दैनिक जीवन की गतिविधियों से गणित का अभिन्न संबंध है। सुबह समय पर उठने से लेकर किसी काम को करने में लगने वाले समय के हिसाब–किताब में यहाँ तक कि सुबह की चाय की चुस्की में भी जाने अनजाने हम इसका इस्तेमाल करते हैं। कुछ लोगों को यह पसंद आती है और इसे करने में उन्हें मजा आता है लेकिन कुछ लोग ऐसे भी है जिन्हें गणित खास पसंद नहीं आती और वह इसे अप्रिय आवश्यकता के रूप में देखते हैं। आपने भी अपने आस–पास ऐसे लोगों को देखा होगा जिन्हें गणित का नाम लेते ही डर लगता है या फिर उन्हें यह कठिन लगता है और कुछ ऐसे लोग भी अवश्य होंगे जो इससे लगाव का भाव रखते हैं। गणित में ऐसी क्या विशेषताएँ हैं कि यह लोगों में अलग–अलग तरह की भावनाएँ पैदा करता है? क्या यह जरूरी है कि हर आदमी इसे सीखे? इस इकाई में हम ऐसे कुछ प्रश्नों पर विचार करेंगे। पहले हम कुछ उदाहरण व उनके विश्लेषण के द्वारा यह समझने की कोशिश करेंगे कि क्या हमारे चारों ओर गणित है? साथ ही यह भी समझने का प्रयास करेंगे कि क्या सभी बच्चे गणित सीख सकते हैं? साथ ही यह भी जानेंगे कि गणित का उपयोग रोजमर्रा के जीवन में हम किस प्रकार करते हैं, यह कितना जरूरी है, और यह कितना मनोरंजक हो सकता है। हम यह भी देखेंगे कि गणित किस प्रकार हमारे सोचने के तरीके को प्रभावित करता है। इस इकाई में ऐसे मत, विचार और तर्क हैं जो गणित के महत्व और स्वरूप के बारे में सोचने को बाध्य करेंगे।

गणित के बारे में भय, भ्रम और मिथकः सबके लिए गणित

हम पाते हैं कि कुछ लोग गणित विषय को बहुत पसंद करते हैं, उन्हें गणित करने में बड़ा मजा आता है। परंतु कुछ लोगों को गणित पसंद नहीं आता है, वे लोग गणित को एक अप्रिय आवश्यकता के रूप में देखते हैं। उनके अनुभव बड़े कड़वे हैं और वो गणित से दूर भागने लगते हैं। गणित में किसी को संख्या का डर, किसी को अंकगणित का डर, किसी को बीजगणित का और किसी को रेखागणित का डर सताता है। गणित की परीक्षा में किसी का सर दुखने लगता है, हथेली पसीने से भींग जाती है, दिल जोर–जोर से धड़कने लगता है।

आखिर दूसरे विषयों की तुलना में गणित से इतना डर कैसे हो गया? क्या गणित से डरने वाले ये सोचते हैं कि गणित में उत्तर या तो सही होता है या गलत और गणित में इधर–उधर लिखने की कोई गुंजाइश नहीं होती? क्या शिक्षक गणित के प्रति अपना डर दूसरों पर थोपते हैं? यदि शिक्षक खुद गणित से डरते हैं, तो उनके शिक्षार्थी भी डरेंगे। गणितीय अवधारणाओं की समझ विकसित नहीं होने और उनका दैनिक जीवन की गतिविधियों में उपयोग नहीं करने के कारण गणित के प्रति निरसता बढ़ती है। इसी डर के कारण शिक्षार्थियों के गणित के प्रदर्शन में कमी आती है। गणित के प्रति शिक्षार्थियों की

नकारात्मक सोच उनके मन में गणित के प्रति डर डालता है। इस डर से शिक्षार्थी बाहर नहीं निकल पाता है और उनके प्रदर्शन में कमी आती जाती है।

'शून्य' और 'कुछ नहीं' के समानता से भ्रम होता है। उदाहरण के तौर पर जब हम पाँच टॉफी को हथेली में रखकर एक–एक कर अपने दोस्तों को देते हैं, तो पाँचवीं बार टॉफी लेने के बाद हमारी हथेली में एक भी टॉफी नहीं बचता है, तब हम कहते हैं कि हथेली में 'कुछ नहीं' बचा या शून्य टॉफी बचा। बच्चे 'शून्य' और 'कुछ नहीं' का मतलब स्पश्ट रूप से नहीं समझ पाते हैं, जिससे भ्रम की स्थिति उत्पन्न होती है।

एक और उदाहरण पर हम लोग विचार करते हैं – पाँच इकाई और छः इकाई को जोड़ने पर 11 इकाई होता है जिसका समूहीकरण करने पर 1 दहाई और 1 इकाई होता है। परन्तु स्पश्ट समझ विकसित नहीं होने के कारण इसे एक पर एक ग्यारह बोलते हैं, जिससे भ्रम होता है।

जब हम 56 +37 को जोड़ने की संक्रिया करते हैं तो 7+6 को जोड़ने पर 13 लिखने के बजाय 3 लिखकर हासिल के तौर पर एक लिखते हैं face value (अंकीय मान) है और place value (स्थानीय मान)की समझ नहीं होने के कारण भ्रम पैदा होता है।

गणितीय अवधारणाओं की स्पश्ट समझ एवं गणितीय समस्याओं में इनके उपयोग नहीं होने के कारण भ्रम उत्पन्न होता है।

आइए अब गणित में कुछ मिथक के बारे में बातें करते हैं:–

i. शिक्षार्थी सामान्यतया शारीरिक और मानसिक रूप से गणित के प्रतीकों एवं अमूर्त अवधारणाओं को नहीं समझ पाते।
ii. गणित तार्किक होता है।
iii. कुछ ही लोगों में गणित करने की क्षमता होती है।
iv. गणित में केवल एक ही हल होता है और यही गणित का लक्ष्य है।
v. गणित जो जानते हैं वो लोग किसी भी प्रश्न का उत्तर तुरंत दे सकते हैं।
vi. गणित का ज्ञान जरूरी नहीं है।
vii. गणित सिर्फ उनके लिए है जिनको साईंटिफिक कैरियर चाहिए।
viii. गणित केवल तेज बच्चों के लिए होता है।
ix. लड़कियाँ गणितीय समस्याओं को हल करने से भागती हैं।
x. जिसके घर में कोई गणित नहीं पढ़ा, उस घर के बच्चे गणित नहीं पढ़/सीख सकते हैं।

क्या हम उपर दिये गये मिथकों से सहमत हैं? ऐसा कुछ नहीं है कि तेज बच्चे और खुशकिस्मत बच्चे ही गणित सीख सकते हैं। गणित सबके लिए है। एक सब्जी बेचने वाला जो पढ़ा लिखा नहीं है वो भी अपने काम में गणित का बखुबी इस्तेमाल करता है। हमने सीखा भी है कि गणित हमारे चारों ओर है, हर कोई गणित आसानी से सीख सकता है।

जरूरत इस बात की है और हमारा कर्त्तव्य भी है कि एक भावी शिक्षक के रुप में हम ऊपर दिये गये भय, भ्रम और मिथकों से गणित के प्रति अरूचि को शिक्षार्थियों के मन से निकालें।

इसके लिए शिक्षार्थी का वर्ग कक्ष सबसे उपयुक्त जगह है जहाँ हम गणित के प्रति उनके मन से डर निकाल सकते हैं, भ्रमित होने से बचा सकते हैं और मिथकों को तोड़ सकते हैं एवं उनमें गणित के प्रति सकारात्मक सोच विकसित कर सकते हैं।

दैनिक जीवन में गणित की आवश्यकता एवं महत्व

क्या हमने कभी सोचा है कि आखिर गणित के प्रश्नों को हल करने के मायने क्या हैं ? अधिकतर लोगों के लिए मात्र संख्याओं के साथ गणना करना भर ही गणित है, क्या गणित का दायरा इतना ही सीमित है?

घुटनों के बल चलती बच्ची को जब कोई पुकार कर बुलाता है तो वह कम दूरी वाले रास्ते का चयन कर आवाज़ की ओर चलती है।

हर बच्ची, बड़ा–छोटा, पास–दूर और न जाने क्या–क्या जाने/अनजाने सीख जाती है। बहुत से कार्य जो वह करती है उनमें वह गणित की कई अवधारणाओं का इस्तेमाल करती है। यह संभव है की उसकी शब्दावली औपचारिक गणित की न हो पर उसे यह सब करने में अड़चन नहीं आती।

गणित, हमारे चारों ओर है

सुबह की पहली चाय बनाते समय भी हम गणित का प्रयोग करते हैं। क्या आप इससे सहमत है?

एक बढ़ई जो मेज़ बनाता है, क्या वह इस काम में गणित का उपयोग करता है? दर्जी, ग्वाला, सब्जी बेचने वाला, नल ठीक करने वाला या किसान भी क्या किसी रूप में गणित का उपयोग करते हैं?

रेल या बस में यात्रा करते समय, अपनी गाड़ी चलाते समय,बच्चों की फीस जमा करने में भी हम गणित का प्रयोग करते हैं। खाना बनाना, उपग्रह को अंतरिक्ष में भेजना, इमारतें और पुल बनाना इत्यादि कोई भी काम गणित के प्रयोग के बिना नहीं किया जाता है.

इसी तरह खेलों और गणित के बारे में हमारा क्या विचार है? कबड्डी की एक टीम के कप्तान ने कहा,''हमारी टीम को विपक्षी खिलाड़ी को घेरना आता है।'' इसी प्रकार क्रिकेट के एक कप्तान ने कहा,''यदि क्षेत्र रक्षकों को गेंदबाजी के अनुसार मैदान में ठीक से खड़ा कर दें तो समझों आधा काम हो गया।'' फील्ड जमाने के लिए खेल की और स्थान के साथ संबंध की समझ होनी जरूरी है।

बकौन के अनुसार : गणित सभी विज्ञानों की कुंजी व उन तक पहुँचने का मुख्य रास्ता है (Mathematics is the gate way and key to all success)

जे विलार्ड : गणित एक भाषा है (Mathematics is a language)

होम बेन : गणित सभ्यता एवं संस्कृति का दर्पण है (Mathematics is the mirror of civilization)

गणित मानव का एक गणनात्मक पक्ष है जिसका आधार मात्रा एवं स्थान है। यह विज्ञान की एक सुसंगठित, क्रमबद्ध एवं शुद्ध शाखा है। हम कह सकते हैं कि गणित अंक, अक्षर, चिह्न इत्यादि संक्षिप्त संकेतों का वह विज्ञान है जिसके बिना हम दिशा, स्थान व परिमाण का बोध नहीं कर सकते। प्राचीन भारत में भी गणित में संस्था, गणना, ज्योतिष एवं क्षेत्र गणित शामिल थे।

Lendse **के अनुसार–** गणित भौतिक विज्ञान की भाषा है और निश्चत रूप से मनुश्य के दिमाग ने इससे अधिक अद्भुत कभी नहीं बनाया था। (Mathematics is the language of physical science and certainly no more marvelous was ever created by the mind of man)

लॉक के अनुसार :– गणित वह मार्ग है जिसके द्वारा बच्चों के मन में या मस्तिष्क में तर्क करने की आदत स्थापित होती है(Mathematics is a way to settle in the mind of children habit of reasoning.)

आइंस्टाइन – गणित मानव चिंतन का प्रतिफल है।

क्या हमारी सभी क्रियाओं में गणित शामिल है?

इसका उत्तर ''हाँ'' है और ''नहीं'' भी। उन लोगों के लिए, जो गणित को तलाशते हैं और जो जानते हैं कि इसे कहाँ तलाशना है, उत्तर ''हाँ'' है। जो लोग इसे नहीं तलाशते हैं, उनके लिए गणित केवल वही है जो स्कूल में करते हैं, जिसका वास्तविक दुनिया से कोई संबंध नहीं होता है।

आइए, इसे समझने के लिए रोटी बनाने का उदाहरण लें। मेरा दोस्त मोईन कहता है कि रोटी पकाने में रसायन विज्ञान का इस्तेमाल होता है। इसका क्या मतलब है? उसके अनुसार, जब रोटी पकाई जा रही होती है तो ऐसे रासायनिक परिवर्तन होते दिखते हैं जैसे उसने विद्यालय में रसायन विज्ञान की कक्षा में पढ़े थे।

लेकिन मेरी एक दूसरी दोस्त कहती है कि जब वह रोटी बनती देखती है तो उसकी रूचि ज्यादा उन आकारों व आकृतियों में होती है जो बेलते वक्त आटे से बनती है। उसे बेलन की चाल और इन आकारों के बीच संबंध ढूँढ़ना भी अच्छा लगता है। इसलिए जिस प्रक्रिया में उसे गणित नजर आता है बिलकुल उसी प्रक्रिया में मोईन को रसायन विज्ञान नज़र आता है।

यह उदाहरण बताता है कि किसी भी कार्य घटना या तथ्य को अलग–अलग नज़रिए से देखा और समझा जा सकता है। यदि हम उसमें शामिल गणित की तलाश करेंगे, तो वह हमें अवश्य मिलेगा। मीरा ने मीटर पैमाने को देखकर कहा कि उसके तीन कदमों की माप 1 मीटर के बराबर है और इसी अनुमान से वह अपने घर से स्कूल की दूरी की माप मीटर में बताती थी–जबकि श्रेया ने कहा अरे यह तो धातु की बनी है और बहुत मजबूत है।

यदि एक बार हम अपनी ''गणितीय आँखों'' को खोल लें और हम देखना शुरू कर दें तो हम लगभग हर चीज़ में गणित देख सकते हैं– चाहे वह कोई गीत हो, कोई कहानी की किताब हो, भिनभिनाती हुई मक्खी का पथ हो, माचिस के डिब्बे का आकार और इसकी सतहों की संख्या हो, इन सतहों को ढकने के लिए जरूरी कागज़ का अनुपात हो, घर में बिजली के तार हों, पत्तियों के आकार हों, आदि–आदि।

बच्चों की सभी गतिविधियाँ और अनुभव भी गणित से ओत–प्रोत होते हैं। इन अनुभवों को उन गणितीय विचारों और संकल्पनाओं से जोड़ना चाहिए जो हम उन्हें सिखाते हैं। तभी ये विचार उन्हें उपयोगी लगेंगे और वे इन्हें आसानी से समझ सकेंगे।

मनोरंजन के लिए गणित

अक्सर जब खाली समय होता है तो हम गणित के मज़ेदार प्रश्न हल करने की कोशिश करते हैं। हम सभी इन प्रश्नों को हल करने की कोशिश करते हैं–

1. दस–दस सिक्कों की दस ढेरियाँ रखी है, सभी ढेरियों में रखे सिक्के 10–10 ग्राम के है, सिवाय एक को छोड़कर जिसमें सिक्के 9–9 ग्राम के है। यदि आपके पास एक ऐसा तराजू है जिससे आप केवल एक बार ही तौल सकते हो, तो आप कैसे पता लगाएँगे कि किस ढेरी के सिक्के 1 ग्राम कम तौल के है।

2. सोना कहाँ है– मेज पर रखे तीन डिब्बे में से एक में सोना है बाकी खाली है। हर डिब्बे पर एक संदेश लिखा है। इनमें से एक ही संदेश सच है, बाकी के दो झूठ है। पहले डिब्बे पर लिखा है ''सोना यहाँ नहीं है''। दूसरे डिब्बे पर लिखा है ''सोना यहाँ नहीं है''। तीसरे डिब्बे पर लिखा है ''सोना पहले डिब्बे में है''। तो सोचिए सोना किस डिब्बे में है।

3. किसी गाँव में केवल एक नाई है। वह गांव के उन सब आदमियों की दाढ़ी बनाता है जो खुद अपनी दाढ़ी नहीं बनाते हैं। क्या नाई अपनी दाढ़ी बनाएगा?

4. मैं कुछ दिन पहले एक सम्मेलन में गयी थी। वहाँ किसी ने एक महिला से पूछा, ''आपकी उम्र क्या है?'' वह शायद बताना नहीं चाहती थी इसलिए मुस्कुराते हुए बोली– ''आज मेरी उम्र है– अब से चार साल बाद मेरी उम्र गुणा तीन उसमें से घटा पाँच साल पहले मेरी उम्र गुणा तीन।'' हम तो चक्कर खा गए। क्या आप बता सकते हैं कि उनकी क्या उम्र होगी?

5. सीताराम अपने बाग में लगाने के लिए 25 पौधे लेकर आया। उसने अपने माली गंगाराम से कहा ये पौधे 12 कतारों में इस तरह से लगाओ कि हर कतार में 5 पौधे हो। गंगाराम सोच में पड़ गया कि क्या करें? क्या आप उसकी मदद कर सकते है?

सोचें : बच्चों के लिए ऐसी तीन प्रश्न–पहेलियाँ बनाइए जिनसे उन्हें यह महसूस करने में सहायता मिले कि ''गणित मज़ेदार है''।

गणित की प्रकृति

हमने महसूस किया होगा कि सभी विषयों का अपना एक अलग स्थान होता है, गणित का भी एक अलग स्थान है, क्या आप भी ऐसा सोचतें है? इस प्रकार की सोच के क्या कारण है? हम सोच रहे होंगे कि प्रत्येक व्यक्ति का अपना स्वभाव होता है, जिसके कारण वह अन्य व्यक्तियों से भिन्न होता है। ठीक इसी प्रकार प्रत्येक विषय की अपनी प्रकृति होती है जिसके कारण सभी का अलग स्थान है। गणित विषय का भी अपनी प्रकृति के कारण एक अलग स्थान है।

गणित की प्रकृति जानने के लिए आपको गणित के महत्वपूर्ण गुणों को समझना होगा जिनके कारण गणित को सभी क्षेत्रों में विशेष स्थान प्राप्त है। गणित की प्रकृति, गणित शिक्षण और अधिगम विधियों को बहुत ज्यादा प्रभावित करती है। अतः प्रारंभिक विद्यालय के शिक्षकों को गणित की प्रकृति के बारे जानने की आवश्यकता होती है। आइए, गणित की प्रकृति के बारे में चर्चा करें –

तार्किकता

गणित की एक मुख्य प्रकृति है इसकी तार्किकता। गणित क्रमबद्ध रूप से तथा तार्किकता के कई चरणों के माध्यम से समस्या का समाधान करता है।

उदाहरण –निम्न गणितीय समस्या पर विचार करें।

1 5 9 13 17..............?

यह इस श्रेणी में अंक 17 के पश्चात् कौन सा अंक आएगा ? यदि समस्या का विश्लेषण क्रमबद्ध और तार्किक ढंग से किया जाये तो 17 के पश्चात् 21 आएगा क्योंकि बाद में आने वाला अंक अपने पूर्व अंक से 4 अधिक है अर्थात 17 + 4 = 21, गणित सत्यता को तर्क के द्वारा स्थापित करता है। गणितीय कथनों का प्रमाण स्वीकृत नियमों, परिभाषाओं और अवधारणाओं का उपयोग करके क्रमिक तार्किक पक्षों से बना होता है ।

निम्नांकित उदाहरण पर ध्यान दें :–

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 29, 35, 43, 55 और 2019 सभी विषम संख्याएँ हैं क्योंकि 2 से इन संख्याओं में भाग देने पर शेष 1 बचता है तथा इसे 2m+1 के रुप में व्यक्त किया जा सकता है। इनमें से किन्हीं दो विषम संख्याओं को जोड़ें और पता लगायें कि क्या योगफल सम संख्या है या विषम संख्या? यहाँ हम देखते हैं कि

1 + 3 = 4	4 एक सम संख्या है ।
5 + 11= 16	16 एक सम संख्या है ।
17 + 29 = 46	46 एक सम संख्या है ।
29 + 43 = 72	72 एक सम संख्या है ।
1 + 2013 = 2014	2014 एक सम संख्या है ।

और इसी तरह अन्य विषम संख्यओं के योग पर सम संख्यायें ही प्राप्त होती है। इस प्रकार किन्हीं दो विषम संख्याओं को जोड़ने पर प्रत्येक स्थिति में योगफल सम संख्या ही प्राप्त होगी। इस प्रकार के तर्क को 'आगमनात्मक तर्क' कहते हैं।

गणित में कई स्थितियों में गणितीय निष्कर्ष निकालने के लिए आगमनात्मक तर्क का उपयोग करते है। ज्यामिति के एक उदाहरण पर ध्यान दें। एक त्रिभुज के एक कोण की माप 70 अंश और दूसरे कोण की माप 80 अंश है तो तीसरे कोण की माप क्या होगी ? यदि हम इस त्रिभुज की रचना करके तीसरे कोण की माप करते हैं तो हम इसकी माप 30 अंश पायेंगे। इसी प्रकार के कई त्रिभुजों की रचना करके अनेक कोणों की माप ज्ञात करें। हम पायेंगे कि प्रत्येक स्थिति में तीनों कोणों का योगफल 180 अंश होता है ।

यदि यह निष्कर्ष पहली स्थिति के लिए, द्वितीय स्थिति के लिए, तृतीय स्थिति के लिए सत्य है तथा अन्य इसी प्रकार की स्थितियों के लिए भी सत्य है, तो हम उचित रूप से निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180 अंश होता है ।

अब, निम्नांकित गणितीय कथन का अवलोकन करें :–

'दो विषम संख्याओं का योगफल एक सम संख्या होती है'। इस कथन को केवल अनुभूत अवलोकन के आधार पर प्रमाणित नहीं किया जा सकता है। अनेक उदाहरणें और उनका परीक्षण करके ही यह कह सकते हैं कि कथन सत्य या असत्य है। यदि विषम संख्या और जोड़ की जानकारी है, तो इस कथन को गणितीय ढंग से ले सकते हैं।

किसी भी विषम संख्या को $2m + 1$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है। दो विषम संख्याएँ $2m + 1$ और $2n + 1$ जहाँ m व n प्राकृत संख्याएँ हैं।

इन दोनों विषम संख्याओं का योगफल $= 2m + 1 + 2n + 1$

$= 2(m + n) + 2$

$= 2(m + n + 1)$

$= 2k$ है, जहां $(m + n + 1)$ एक प्राकृत संख्या है।

यहाँ पर संख्या $2k$, 2 से विभाजित है। अतः $2k$ एक सम संख्या है।

इस प्रकार से दो विषम संख्याओं का योग एक सम संख्या होता है। इस प्रकार का तर्क जिसमें ज्ञात परिणामों, परिभाषाओं, नियमों का उपयोग करके किसी कथन की सत्यता की जाँच की जाती है, उसे निगमनात्मक तर्क' कहते हैं।

प्रतीकात्मकता

गणित के अपने संकेत और चिह्न होते हैं। गणित में समस्याओं और समाधानों को चिह्नों या संकेतों के माध्यम से निरूपित किया जाता है। निम्न कथन पर ध्यान दें :–

कथन – चालीस को जब बीस से गुणा किया जाता है तो आठ सौ प्राप्त होता है।

इस कथन को गणितीय चिह्न के प्रयोग द्वारा निम्न प्रकार से लिख सकते हैं –

$40 \times 20 = 800$

यहाँ देखा जा सकता है कि चिह्नों के उपयोग करने से गणितीय अभिव्यक्ति संक्षिप्त और स्पष्ट बन जाती है। इन चिह्नों से परिचित रहने पर गणितीय अभिव्यक्ति को चिह्नात्मक रूप में लिख सकते हैं। कुछ अन्य चिह्नों से हम सभी परिचित हैं और दैनिक जीवन में इनका उपयोग भी करते हैं। उदाहरण के लिए –

सामान्य कथन	**गणितीय संकेत या निरूपण**
बराबर है	=
जोड़ना	+
घटाना	–
सात, चार से बड़ा है	$7>4$
त्रिभुजाकार	△
प्रतिशत	%

यदि हम कहते हैं कि अनिल ने गणित की परीक्षा में 100 में से 80 अंक प्राप्त किये हैं तो इसे गणितीय रूप में कह सकते हैं कि अनिल ने 80% अंक प्राप्त किये है।गणित के कठिन और अमूर्त्त विचारों को चिह्नात्मक रूप में सामान्य संकेतों का उपयोग करते हुए अभिव्यक्त करना तुलनात्मक रूप से समझने और सम्प्रेषण करने में आसान होता है। ये संकेतकों के निकाय गणित को सुदृढ़ता प्रदान करते हैं और हमें यह जानने में सहायता करते हैं कि कोई गणितीय कथन सत्य और प्रमाणिक है या नहीं?

सटीकता

सटीकता गणित की महत्वपूर्ण प्रकृति है। सटीकता का अर्थ है ''परिशुद्धता'' और ''सुस्पष्टता''। गणित सटीकता के साथ समस्या का समाधान करता है अर्थात जब एक बार किसी निष्कर्ष पर पहुँच गये तो फिर संदेह की स्थिति नहीं रहती है। उदाहरण के लिए एक टोकरी में चार सेब रखे हुए हैं यदि हम उसमें दो सेब और मिला दे तो कुल सेबों की संख्या कितनी होगी? निश्चित रूप छः सेब होंगे न तो वह तीन सेब होगा और न 8 सेब होगा। केवल और केवल 6 ही सेब होंगे। अतः सटीकता गणित का विशेष गुण है।उदाहरण के लिए बेलन की अवधारणा ली जा सकती है। बेलन की परिभाषा सुस्पष्ट और सटीक है। एक बेलन त्रिआयामी ज्यामितीय आकार का होता है जिसका आधार और ऊपरी तल समतल और वृताकार होता है। यदि कोई वस्तु हमें दी जाये तो हम इन विशेषताओं के आधार पर निश्चित रूप से बता सकते हैं कि यह बेलन है या नहीं ?

विभिन्न वस्तु जैसे ग्लास, पेंसिल, कद्दू जिसका उपर और नीचे का भाग कटा हुआ हो, बैंगन जिसका ऊपर एवं नीचे का भाग कटा हुआ हो, आइसक्रीम, पेन, माचिस की डिब्बी में जो बेलनाकार नहीं है, उनको पहचान कर अलग करें ।

इस क्रियाकलाप को करने के पश्चात् हम महसूस कर सकते हैं कि बेलन की परिभाषा हमें बेलनाकार वस्तु तथा जो बेलनाकार वस्तु नहीं है उनमें अन्तर स्पष्ट करने में सहायता करती है । 'बेलन के क्या विशिष्ट गुण है' यह उसकी परिभाषा से स्पष्ट है। कोई भी व्यक्ति अपने परिवेश की वस्तुओं में से बेलनाकार वस्तुओं को आसानी से पहचान सकता है, क्योंकि बेलन की अवधारणा को सटीकता और सुस्पष्टता के साथ परिभाषित किया गया है । सटीकता गणित की एक महत्वपूर्ण प्रकृति है जो कि सुस्पष्टता और परिशुद्धता से संबंध रखती है और यहाँ पर शंका और अस्पष्टता के लिए कोई भी स्थान नहीं है ।

गणितीय विचार की विशेषता, निष्कर्ष में निश्चितता, शुद्धता और पैमापन से सम्बन्ध रखती है। इस प्रकार के विचारों में सटीकता को स्वीकार किया जाता है और कुछ इसे स्वीकार नहीं करते हैं। गणितज्ञ वह है जो सटीकता को अपने विचारों में जगह देता है।

अमूर्त्तता

गणित की प्रकृति अमूर्त है अर्थात इसे स्थूल या भौतिक जगत में देख या छू नहीं सकते हैं, गणितीय अवधारणाओं की कल्पना की जा सकती है तथा मूर्त रूप में इसकी व्याख्या की जा सकती है। उदाहरण के लिए, कथन 4 + 4= ? एक गणितीय भाषा में निरूपित समस्या है लेकिन यह अमूर्त समस्या है अर्थात 4 क्या है ? क्या इसका अस्तित्व भौतिक जगत में है ? क्या आप 4 को छू सकते है या देख सकते है ? उत्तर है नहीं ......4 केवल एक चिह्न है।

इसी तरह '+' क्या है ? 4 और 4 के मध्य '+' का एक चिहन है जो स्थूल रूप में उपलब्ध नहीं है जो कि योग को निरूपित करता है। यह एक अमूर्त विषय है। इस अमूर्तता को स्थूल चीजों के माध्यम से निरूपित किया जा सकता है अर्थात 4 + 4= ? को हम लिख सकते हैं 4 पेंसिल + 4 पेंसिल = 8 पेंसिल अर्थात हम 4 पेंसिल को देख व स्पर्श कर सकते हैं। 4 पेंसिल का अस्तित्व है लेकिन केवल 4 का भौतिक जगत में अस्तित्व नहीं है।

गणित की अवधारणाएं जैसे – संख्या, संक्रियाएं, ज्यामिति इत्यादि की अवधारणा सीधे–सीधे भौतिक जगत में नहीं मिलते। इन अवधारणाओं को बताने के लिए ठोस चीजों का उपयोग किया जाता है, अर्थात कोई दो चीज़ बताकर यह कहा जा सकता है कि ये दो हैं तथा इसके लिए लिखित संकेत 2 सिखाया जाता है। यह संकेत कोई और संकेत भी हो सकता है जैसे कि II, 2 इत्यादि। लेकिन इससे दो की अवधारणा न तो प्रभावित होती है ना ही निर्धारित होती है। जब हम दो आम, दो शहर अथवा दो रूपये कहते हैं, जब यदि इनमें से आम, शहर, रूपया इत्यादि को हटाकर जब केवल दो बोलते हैं अथवा सुनकर समझते हैं तो किसी विशेष चीज़ के संदर्भ में दो को ना समझकर इसे एक गणितीय विचार के रूप में समझ रहे होते हैं अर्थात दो का अपना कोई विशिष्ट रूप नहीं होता है। यह दो की अवधारणा अपने आप में अमूर्त अवधारणा है।

क्रमिकता

सामान्यतः गणित में बाद में आने वाली अवधारणा की समझ पहले आने वाली अवधारणा पर अत्यधिक निर्भर करती है। अवधारणाओं की इन कड़ियों में सातत्य/निरन्तरता तो बनती ही है साथ–साथ पहली अवधारणा भी आगे के स्तर पर उच्चतर जटिलता के स्तरों के साथ बार–बार आती रहती है।

जैसे कि गिनती सिखाने की प्रक्रिया में योग की संक्रिया स्वतः निहित होती है और इस योग की संक्रिया का एक रूप गुणा भी होता है, फिर योग एवं गुणन मिलकर बंटन की अवधारणा को विकसित करते हैं। इस क्रम में संख्या की समझ के भी जटिल स्तर जुड़ते जाते हैं और फिर योग के भी अगले जटिल स्तर जुड़ते जाते हैं। इस प्रकार जो भी नई अवधारणा इस क्रम में जन्म लेती है, वह अगले स्तर पर और भी जटिल समझ एवं व्यापक अर्थों और संबंधों के साथ बार–बार आती रहती है। इस प्रकार निरन्तरता, स्तर एवं व्यापकता में उत्तरोत्तर बढ़ोत्तरी मिलकर एक सर्पिलाकार (Spiral) संरचना का निर्माण करती हैं। इसी कारण गणित के बारें में यह नियम बाकी विषयों के मुकाबले में ज्यादा मजबूती से लागू होता है। क्योंकि गणित सीखने के लिए अवधारणाओं को एक निर्धारित क्रम में सीखना आवश्यक होता है और क्रम में कोई अवधारणा छोड़ी भी नहीं जाती है।

सार्वभौमिकता

गणित की अवधारणाओं में सार्वभौमिकता का गुण होना, गणित की प्रकृति की विशिष्टता है, अर्थात् समय, स्थान एवं वातावरण का गणितीय अवधारणाओं पर प्रभाव नहीं पड़ता। आइए, इसे ज्ञान के अन्य क्षेत्रों की अवधारणाओं के तुलनात्मक अध्ययन से समझते हैं –

जैसे – क्वथनांक विज्ञान की अवधारणा है। पानी का क्वथनांक (उबलने का तापक्रम) पहाड़ की ऊँचाई पर अलग, धरातल पर अलग एवं गहराई में अलग होता है। इसी तरह देश व स्थान के कारण भाषा में परिवर्तन आता है। स्थान के कारण संस्कृति भी परिवर्तित हो जाती हैं, परन्तु गणितीय अवधारणाओं पर इन सब बातों का कोई असर नहीं पड़ता है जैसे – गुणा की अवधारणा 3 X 5 = 15 कहीं भी यही होगी। गणितीय अवधारणाओं की समय, स्थान तथा वातावरण के कारण अप्रभावी रहने की प्रवृत्ति इसे सार्वभौमिक बनाती है।

एक अध्यापक के रूप में गणित सीखने सिखाने में हमें अपने बच्चों में इस प्रकार के विशेष गुण विकसित करने के लिए ध्यान केन्द्रित करना होगा। गणित बच्चों में सटीक तर्कशक्ति, सोच और मूल्यांकन करने की योग्यताओं को विकसित करने में सहायता करता है। गणित की तुलना अन्य विषयों के साथ करने पर पायेंगे कि उन विषयों में उत्तर तथ्यों का अनुमान लगाकर या प्रत्यक्ष अनुभव के आधार पर लिखा जा सकता है। इस प्रकार उत्तर लिखने में बच्चो के स्वयं के विचार अधिक प्रभावी होते हैं, लेकिन गणित में व्यक्तिगत विचारों और भावनाओं के लिए कोई स्थान नहीं है। गणित अधिगम के दौरान शिक्षार्थी शुद्धता का मूल्यांकन और गुण–विवेचन करना सीखते हैं। वह यह भी सीखता है कि जीवन में समस्याओं को सटीकता के साथ किस प्रकार हल किया जाये और किस प्रकार सटीकता के साथ समस्याओं को परिभाषित किया जाये। गणित शिक्षण अधिगम के दौरान यह गुण शिक्षार्थियों की आदतों में शामिल हो जाता है।

गणितीयकरण

गणित की समझ, संसार को समझने, महसूस करने, अंतःक्रिया करने और घटनाओं की व्याख्या करने के योग्य बनाती है।

उदाहरण के लिए, यदि आपसे कहा जाए कि –

- आज दिल्ली का तापमान 46 डिग्री सेल्सियस है, तो हम क्या सोचेंगे एवं महसूस करेंगे?
- आज रात राम को 104 डिग्री फारेनहाइट बुखार हो गया था, ऐसा सुनकर आपके दिमाग में क्या–क्या विचार आते हैं?
- कल पटना में इतनी तेज आंधी आई कि 1 मीटर से ज्यादा दूर तक देख पाना संभव नही था। यह सुनकर वहां की स्थितियों के बारें में हमारे दिमाग में क्या–क्या विचार आते हैं?
- कल जापान में भूकम्प आया। रिक्टर स्केल पर भूकम्प की तीव्रता 7.5 थी। यह सुनकर उस जगह के बारें में हमारे दिमाग में क्या–क्या विचार आते हैं?

उक्त समस्त आंकड़े हमारे लिए कई अर्थ पैदा कर सकते हैं क्योंकि हम गणित के जरिए अपनी सोच में एक स्तर प्राप्त कर चुके हैं, गणित की यह समझ इन जानकारियों के मिलते ही सक्रिय होती है और हम विशिष्ट व्याख्या और अनुभूति कर पाते हैं।

विद्यालयी गणित शिक्षण का उद्देश्य बच्चों की गणितीय दक्षता का विकास करना है। इसके दो लक्ष्य हैं– सीमित लक्ष्य और उच्च लक्ष्य। संख्याएँ और संख्याओं पर की जानेवाली संक्रियाएँ, माप, दशमलव, प्रतिशत इत्यादि सीमित लक्ष्य के अन्तर्गत आते हैं। उससे उच्च लक्ष्य है बच्चों के साधनों को विकसित करना ताकि वह गणितीय ढंग से सोच सकें, तर्क कर सकें, मान्यताओं के तार्किक परिणाम निकाल सकें और अंततः अमूर्त्त को समझ सकें। इसके अन्तर्गत समस्याओं को बनाना और समस्याओं का हल ढूँढ़ने की क्षमता का विकास करना है।

वर्तमान में गणितीय शिक्षण प्रक्रिया को ध्यान से अवलोकन करें तो हम पायेंगे कि बच्चे यांत्रिक रूप से गिनती की क्रिया करते हैं तथा संख्याओं पर की जाने वाली संक्रियाएँ अक्सर अभ्यास आधारित होती हैं। उसके पीछे के सिद्धान्त को बच्चे शायद ही समझते हैं।गणितीय समस्याओं का हल बच्चे तर्क पूर्ण ढंग से नहीं दे पाते हैं।अक्सर गणित शिक्षण बच्चों को आकर्षित नहीं करता है।

गतिविधि 1: दो बच्चों को गणित में जोड़ का एक सवाल दिया गया जैसे– 683 और 35 को जोड़ें।

अब एक बच्चे ने एल्गोरिद्म विधि का अनुसरण किया:–

$683 + 35 = 718$

या,
$$\begin{array}{r} 683 \\ +\ 35 \\ \hline 718 \end{array}$$

तथा दूसरे बच्चे ने दोनों संख्याओं को विस्तारित करके जोड़ किया –

683 = 600 + 80 + 3

35 = 30 + 5

अब, 683 + 35 = 600 + 80 + 3 + 30 + 5

= 600 + 80 + 20 + 10 + 8

= 600 + 100 + 10 + 8

= 700 + 18

= 718

पहले बच्चे से सवाल करने पर–

- 3 के नीचे 5 क्यों रखा गया?
- 8 के नीचे 3 क्यों रख गया?

8 और 3 को जोड़ने पर 11 के लिए 1 को दहाई के स्थान पर तथा 1 को 6 में जोड़ते हैं। इसके पीछे क्या तर्क है? ऐसा हम क्यों करते हैं? यदि बच्चा उपर्युक्त सवालों के उत्तर सही–सही देता है, तर्कपूर्ण ढंग से देता है, इकाई, दहाई, सैकड़ा समझ कर देता है तो समझा जायगा कि बच्चे मे गणितीय सोच विकसित हो गई है।

दूसरे बच्चे से सवाल करते हैं–

विस्तारित रूप में संख्या को उपर्युक्त ढंग से क्यों लिखा गया?

अगर बच्चा बताता है कि इसको खण्डित करने का आधार इकाई, दहाई, सैकड़ा मिलता है एवं 8 दहाई में हो दहाई मिलाने से सैकड़ा बन जाता है तो समझा जाएगा कि बच्चे में इकाई, दहाई और सैकड़े की समझ हो गई है और यह भी जानता है कि 8 दहाई में 2 दहाई को मिलाने से सैंकड़ा बन जाएगा। इससे स्पष्ट होगा कि बच्चा तार्किक ढंग से सोच सकता है।

इस दोनों उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि बच्चा जोड़ की समस्या का गणितीय संक्रिया कर सकता है। उपर्युक्त उदाहरणों से गणितीयकरण क्षमताओं के विकास से संबन्धित चरण मिलते हैं–

- समस्या समाधान की क्षमता का विकास हुआ
- समाधान के लिए सवाल को समझने का प्रयास किया गया
- संख्याओं का विश्लेषण किया गया
- अनुमान लगाया गया
- उसके पीछे के तर्क प्रस्तुत किये गये और अन्त में निष्कर्ष रूप में योगफल दिया गया।

आइए, एक अन्य उदाहरण लें:–

बच्चे परिवेश से बहुत–कुछ अनुभव करते हैं, सीखते हैं जिसके आधार पर वे अनुमान लगाते हैं, निर्णय लेते हैं, तर्क के आधार पर निष्कर्ष निकालते हैं, अमूर्त्तिकरण की प्रक्रिया करते हैं, जैसे मान लीजिए कि एक परिवार में एक लड़का हर्ष, एक उसकी बहन रम्या, माँ, पिता, दादा एवं दादी हैं। उस परिवार में हर्ष देखता है कि उसकी माँ प्रत्येक दिन रात के खाने में सब्जी के अलावा 20 रोटियाँ बनाती है जिसमें एक रोटी गाय को तथा एक रोटी बिल्ली को देती है। हर्ष और रम्या दो–दो रोटियाँ खाते हैं, जबकि उनकी माँ और पिताजी चार–चार रोटियाँ खाते हैं, और दादा दादी क्रमशः तीन–तीन रोटियाँ खाते हैं। हर्ष परिवार में रात्रि के भोजन के लिए बनने वाली रोटियों की संख्या औसतन प्रति व्यक्ति तीन है। यदि दूसरे दिन आने वाली अतिथियों की संख्या 3 हो तो इसके आधार पर अतिरिक्त रोटियों की संख्या का अनुमान हर्ष लगा सकता है। इस प्रकार इस स्थिति से औसत की जानकारी, अनुमान लगाना, आटा की मात्रा, समय, श्रम, आदि के अनुमान लगाये जा सकते हैं। यह गणितीयकरण का एक उदाहरण है।

अभ्यास के प्रश्न

1 आप गणित की प्रकृति की समझ का उपयोग कक्षा में किस प्रकार कर सकते है?

2 आप बच्चे की सोच का गणितीयकरण किस प्रकार कर पायेंगे? सोदाहरण व्याख्या करें।

3 कक्षा 2 में गणित की अवधारणाओं का अमूर्तीकरण कर पाने की प्रक्रिया को उदाहरण सहित स्पष्ट करें।

4 सिद्ध करें कि दो विषम संख्याओं का योग एक सम संख्या होती है तथा एक विषम और एक सम संख्या का योग एक विषम संख्या होती है।

5 बच्चो को गणित में मजा आये, आप इसके लिए क्या करेंगे?

6 प्राथमिक गणित की पुस्तक से ऐसे पाँच उदाहरणों की व्याख्या करें जहाँ आगमन तर्क का उपयोग किया गया है।

7 कुछ इबारती सवालें लें। बच्चे के स्तर पर आकर सोचें कि बच्चों को उन सवालों को हल करने में क्या–क्या कठिनाइयाँ आएगी? उनकी सूची बनावें।

8 अपने आस–पास से तीन अन्य उदाहरण लेकर पता लगाइए कि उसमें गणित कहाँ–कहाँ निहित है और उनका सविस्तार विश्लेषण कीजिए।

परियोजना कार्य

1. सूची बनाइए।
2. 'विद्यार्थियों को गणित का अध्ययन करना क्यों अच्छा नहीं लगता?' इस विषय पर विद्यार्थियों से बात करें कुछ गणितीय चिह्नों की सूची तैयार कीजिए। इनमें से कम्प्यूटर के की–बोर्ड पर कौन कौन से संकेतों का प्रयोग किया जाता है?
3. एक बेलनाकार ठोस लें और उसका निरीक्षण करें कि उसके कितने वक्र पृष्ठ और कितने शीर्ष है।
4. – बेलन का चित्र कागज पर बनायें।
5. गणित की प्रकृति को स्पष्ट करने के लिए विभिन्न चित्रों की सहायता से एक प्रोजेक्ट फाइल तैयार कीजिए।
6. कुछ गतिविधियों पर आधारित विडियो क्लिप देखकर उसमें गणितीयकरण के तत्व को ढूंढ़े तथा उनकी तथा कारणों का विश्लेषण कर प्रोजेक्ट तैयार करें।
7. कम्प्यूटर पर एक ही इबारती प्रश्न को भाषा बदलकर कई रूपों में लिखें तथा साथियों के साथ चर्चा करें कि कौन से प्रश्न की भाषा सरल है और क्यों?
8. अपने आस–पास तीन या चार साल के एक बच्चे की दिनचर्या को देखे और पता लगायें कि वह कहाँ–कहाँ गणित का इस्तेमाल करता है? (अलग–अलग परिवेश व अलग–अलग बच्चों के संदर्भ में उदाहरणों की विभिन्नता हो सकती है।)

इकाई 2

प्राथमिक स्तर पर गणित : आधार, उद्देश्य एवं पाठ्यक्रम

- परिचय
- गणित सीखने–सिखाने के विविध आधार
  - बच्चों की गणितीय समझ एवं अनुभव,
  - बच्चों की सामाजिक–सांस्कृतिक, आर्थिक परिप्रेक्ष्य की समझ
  - गणित एवं संज्ञानात्मक विकास (Syllabus में है)
- प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने के उद्देश्य
  - राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005,
  - बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2008,
  - एन.सी.एफ.टी.ई.–2009,
  - गणित आधारपत्र–2006 (एन.सी.ई.आर.टी.) के विशेष संदर्भ मे
- बिहार के प्राथमिक स्तर के गणित का पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तके
- अभ्यास के प्रश्न
- परियोजना कार्य

परिचय

गणित की कक्षा में जाने के क्रम में जब हम कक्षा–पूर्व तैयारी करते हैं तो कई अनुभवों यथा बच्चों को अवधारणा पर कैसे लायेंगे, उनसे विषयवस्तु से जुड़ी कौन सी गतिविधियाँ करायेंगे, उनके बीच कैसी सामग्री प्रदर्शित करेंगे, बच्चों की सक्रिय सहभागिता के लिए क्या करेंगे, नयी अवधारणा को उनके बीच कैसे प्रस्तुत एवं स्पष्ट करेंगे, बच्चों ने सीखा या नहीं इसकी जाँच कैसे करेंगे इत्यादि को ध्यान में रखते हैं। शिक्षण अधिगम प्रक्रिया की जो संरचना हमारे द्वारा की जाती है उसमें उपरोक्त अनुभवों को भी एक क्रमबद्ध तरीके से प्रस्तुत किया जाता है। अधिगम प्रक्रिया का यह क्रमबद्ध प्रस्तुतीकरण ही शिक्षण विधि कहलाती हैं। हमारे पढ़ाने का तरीका तथा पाठ को कक्षा में प्रस्तुत करने का तरीका कैसा हो, यह न केवल हमारे शिक्षण कौशल वरन् पाठ्यवस्तु की प्रकृति, बच्चों के सीखने के तरीके, कक्षा में उपलब्ध संसाधनों एवं विषयवस्तु की प्रकृति पर भी निर्भर करता है तथा इसको ध्यान में रखते हुए ही हम अपनी शिक्षण विधि तय करते हैं। यही कारण है कि गणित विषय में अलग–अलग अवधारणाओं को स्पष्ट करने के लिए अलग अलग विधियों का प्रयोग किया जाता है।

गणित सीखने–सिखाने के विविध आधार

बच्चों की गणितीय समझ एवं अनुभव,

पिछली इकाई में हमने जाना है कि हम सभी का दैनिक जीवन में गणित से गहरा संबंध है, सुबह समय पर उठने में, किसी काम को करने में लगने वाले समय, हिसाब–किताब, यहाँ तक कि सुबह की चाय की चुस्की में भी जाने अनजाने हम इसका इस्तेमाल करते है। हमने यह भी देखा कि किस तरह गणित का नाम लेते ही लोगों को इससे डर लगता है या फिर यह कठिन लगता है और कुछ लोग ऐसे भी होते है जो इससे प्यार करते है। अंत में हमने यह भी देखा कि गणित की प्रकृति के मुख्य आधार क्या–क्या है और गणितीयकरण को भी जाना। इस इकाई में हम गणित को सीखने के पीछे छिपे पहलुओं, बच्चों के गणित सीखने के तरीकों, बच्चों के गणित सीखने की भाषा तथा गणित में हो रहे निरन्तर विकास के बारे में जानेंगे। बच्चे जिज्ञासा, अनुभव से सीखते हैं, वे खाली स्लेट नहीं हैं।

गणित सीखना

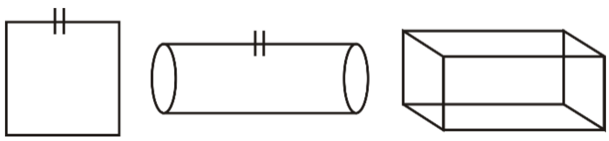
गणित सीखने की प्रक्रिया में हमे इस बात का ख्याल रखना चाहिए कि बच्चे गणित की अवधारणाओं को कैसे सीखते हैं? बच्चों में गणित संबंधी अवधारणाओं के बारे में समझ कैसे विकसित हो? हमें बच्चों के विकास के स्तर के मुताबिक ही अवधारणा उसके सामने रखनी चाहिए। हमें यह जानना होगा कि उस अवधारणा को सीखने के लिए बच्चा या बच्ची किस हद तक तैयार है, या नहीं है। जैसे कि जोड़ने और घटाने का संबंध समझाने के लिए बच्चों को यह समझ में आना चाहिए कि क्या सभी क्रियाएं, **प्रतिवर्त्य**

(reversible) होती हैं? और जब वह इसे समझेंगे तभी **संरक्षण (Conservation)** समझने की ओर बढ़ सकेंगे।

<u>प्रतिवर्त्यता का सिद्धान्त</u>: यदि किन्हीं चीजों पर की जा रही क्रियाओं का क्रम ठीक उलट दिया जाये तो उलटे क्रम में की जा रही क्रियाएं उन चीजों को वापस उनकी मूल अवस्था में पहुंचा देती है।

जैसे– सीढी चढना एवं उतरना, संख्याओं को आरोही और अवरोही क्रम में लिखना, प्रतिशत ज्ञात करना, पूर्ण को टुकड़ों में बाँटना तथा सभी टुकड़ो को एक साथ मिलाकर पूर्ण को प्राप्त करना प्रतिवर्त्यता सिद्धांत का समर्थन करता है।

<u>संरक्षण का सिद्धान्त</u>: किसी भी चीज की मात्रा (गिनती, द्रव्यमान, द्रव) वही बनी रहती है भले ही उसकी जगह या उसका आकार बदल दिया जाये।
जैसे हमे एक कागज़ के टुकडे से बेलन, घनाभ इस प्रकार बनाने को कहा जाये कि कागज के चारों कोनो को केवल जोड़ा जा सकता हो, तो क्या उस कागज़ का क्षेत्रफल संरक्षित रहेगा।



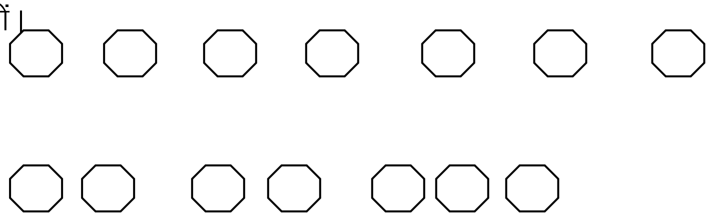
ऐसा बना हुआ बेलन व घनाभ का तल ढका मान लिया जाये तो उनका आयतन एक सा होगा या अलग–अलग। सोचिए।

यह जानने के लिए कि बच्चे को गिनती के संरक्षण की समझ है या नहीं, आम तौर पर निम्नलिखित प्रयोग किया जा सकता है :

पहले, एक बच्ची को बराबर लंबाई की दो पंक्तियों में रखे बटन दिखाये जाते हैं, जहां दोनों पक्तियों में समान संख्या में बटन है। अब बच्ची के सामने ही पहली पंक्ति (पंक्ति क) के बटन फैला कर रख दिये जाते हैं। दूसरी पंक्ति (पंक्ति ख) को वैसे ही छोड़ दिया जाता है। अब बच्ची से पूछा जाता है कि दोनों पंक्तियों में रखे बटन गिनती में बराबर है या नहीं।

क

ख



मनोवैज्ञानिक **जीन पियाजे** (Jean Piaget) (1896–1980) के अनुसार :

जो बच्चे संरक्षण समझते हैं, वे कहते हैं कि दोनों पंक्तियों में बटनों की संख्या बराबर है क्योंकि आपने न तो पंक्ति ख से बटन उठाये हैं न ही पंक्ति क में बटन रखे हैं। वे यह भी तर्क देते हैं कि पंक्ति क के बटन ऐसे पास भी लाए जा सकते हैं जिससे कि दोनों पंक्तियों में बटनों की स्थितियाँ ठीक एक–सी हो जायें। यह तर्क दिखाता है कि इन बच्चों में अपनी सोच की प्रक्रियाओं को प्रतिवर्तित करने की क्षमता है।

इस प्रयोग में बच्चे और बड़े के बीच हो रही बातचीत में यदि बड़ा, बच्चे की बात सुने और उसे समझने के लिए तैयार हो, उन्हें सोचने के लिए भी प्रेरित करे और बच्चे को समझने वाला एक स्वतंत्र इंसान मान कर चले तो बच्चे बहुत सीखेंगे। **ऐसे अनुभवों से बच्चे यह भी सीखेंगें कि कारण कैसे बताए जाएँ और तर्क कैसे दिए जाएँ।** जब बच्चे इस तरह के कई अनुभवों से गुजरते हैं, तब उनमें धीरे–धीरे गणितीय ढंग से सोचने की क्षमता विकसित होती है और यह क्षमता फिर दैनिक जीवन में गणित के उपयोग को और सुदृढ बनाती है।

> ***किसी खास अवधारणा/कौशल को बच्चे तभी सीख सकते हैं, जब वे उसके लिए तैयार हों।***

बच्चों की सामाजिक–सांस्कृतिक, आर्थिक परिप्रेक्ष्य की समझ

मनोवैज्ञानिक दृष्टिकोण से हम जानते हैं कि कोई भी दो बच्चे एक जैसे नहीं होते। हर बच्चे की उम्र, जानकारी का स्तर, पृष्ठभूमि वगैरह अलग होती है। एक ही कक्षा के बच्चों के अनुभव में भी अंतर होता है जो बच्चे घर में रुपये पैसे का लेन देन होते देखते हैं अथवा सामान का माप–तौल होते देखते हैं वे इन अवधारणाओं से ज्यादा परिचित होते हैं। अन्य बच्चे अन्य तरह की पृष्ठभूमि से आते हैं। कक्षा में इन अलग–अलग बच्चों के अनुभवों को साझा कर गणित सीखने को बेहतर बनाया जा सकता है। एक शिक्षक के लिए इन बातों के महत्व को समझना व इनके साथ–साथ सीखने के अलग–अलग तरीकों को ध्यान में रखना जरूरी है। कक्षा में अनेक तरह के बच्चे होते हैं अक्सर पढ़ाते समय हम ऐसे उदाहरण देने लगते हैं जिनमें बच्चों के अनुभव क्षेत्र का उपयोग नहीं होता। जैसे गिनने, जोड़ आदि के बारे में बात करते समय बच्चों द्वारा खेले गए खेलों के अनुभव के स्थान पर अपरिचित व जटिल संदर्भों से शुरू करते हैं। हर तरह के बच्चे के लिए कक्षा की रचना नहीं हो सकती किन्तु हर बच्चे के लिए कक्षा में जगह होनी चाहिए। वह अपने अनुभव का उपयोग कर पाए यह सुनिश्चित करना होगा।

पृष्ठभूमि के अलावा गणित सिखाते समय बच्चों के सोचने के ढंग को भी ध्यान में रखने की जरूरत है। वे किस ढंग से सवाल हल कर रहे हैं समझ कर उस तरीके को और भी ज्यादा सरल बनाया जा सकता है।एक उदाहरण देखते हैं जिसमें एक शिक्षक ने अपने विद्यार्थी की सीखने में मदद करने के लिए उसकी समझ को ध्यान में रखा।

उदाहरण–1

एक गांव के स्कूल में पांचवी कक्षा की एक लड़की रम्या को जोड़ और घटाव करने के औपचारिक तरीके से परिचित कराया जा रहा था। शिक्षक ने औपचारिक तरीके से पहले यह समझने की कोशिश की कि उसे पहले से ही कितना आता है।

शिक्षक : 8 और 11 कितने होते हैं?

रम्या : 19

शिक्षक : यह तुमने कैसे किया?

रम्या : गिनकर। मैंने पहले 11 लिया और फिर 8 जोड़ दिए।
रम्या ने बड़ी संख्या से "आगे गिनने" (counting on) का तरीका अपनाया था और अपना तरीका वह शब्दों में समझा भी पाई।

शिक्षक : अच्छा! 22 जोड़ 19 कितना होगा?

रम्या : (22 + 19 लिखकर) : 41?

शिक्षक : तुमने क्या 22 से आगे एक–एक करके गिना?

रम्या : मैंने पहले 19 में से 10 लिए, और इसे 22 में जोड़ा इस तरह हो गए 32, और फिर बचे हुए 9 लिए, और 41 हो गए।

शिक्षक : और कोई दूसरा तरीका?

रम्या : हाँ, पहले 19 में 1 जोडकर 20 तथा 22 में से 1 लेने के बाद 21, बचा 1 अब 21 का मतलब 20 +1 है जिसमें 20 जोडने पर 40+1=41 हुआ।

इस बार रम्या ने "पुनः समूहीकरण" (regrouping) का तरीका अपनाया ताकि वह आसानी से जोड़ सके।

इसके बाद उसे एक लिखित अभ्यास दिया गया। सवाल था

$$\begin{array}{r} 18 \\ \underline{+5} \end{array}$$

इसे रम्या ने हल किया व उसका उत्तर था– 41

उसका यह उत्तर कैसे आया? उसने इकाई के कॉलम में 8 और 5 को ठीक जोड़कर जवाब पाया 13, फिर 1 को इकाई के कॉलम के नीचे लिखकर, "हासिल" के 3 लिए और दहाई के 1 में जोड दिए। इस तरह दहाई के कॉलम में आया 4 इसलिए, उसका उत्तर था 41

रम्या को यकीन था कि उसका उत्तर सही है। तब शिक्षक ने प्रश्न को दूसरी तरह से पूछा। उन्होंने कहा, "अगर तुम्हारे पास 18 सिक्के हैं और तुम्हें 5 और मिल जाएँ, तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितने सिक्के होंगे?" रम्या ने अपनी उंगलियों पर गिना और कहा, 23। जब शिक्षक ने उसका ध्यान उसके लिखित उत्तर की तरफ दिलाया तो वह मान गयी कि वह उत्तर गलत था। यह रोचक है कि वह औपचारिक तरीके की बजाए अपने मन से किए तरीके को सही मानने को तैयार थी।

इस उदाहरण में रम्या ने संख्याओं को जोड़ने के लिए उचित और कुशल तरीकों को इस्तेमाल करने की अच्छी तरह विकसित क्षमता का प्रदर्शन किया। हालांकि उसे औपचारिक तरीकों से जोड़–तोड़ करना कठिन लगा। इसके कई कारण हो सकते हैं। जैसे रम्या को स्थानीय मान की पूरी समझ नहीं है। या रम्या को दी गई संख्याओं को जोड़ने का यह काम गणितीय नियमों से करना सार्थक न लगा हो। जैसे ही शिक्षक ने सवाल को एक संदर्भ में और ठोस वस्तुओं (सिक्के गिनने) के साथ रखा, रम्या उसे समझ गयी और इसलिए हल भी कर पायी।कक्षा में बैठी आबिदा यह सब सुन रही थी। वह रम्या से उत्सुकता के साथ पूछ बैठी कि तुम ने यह सब कैसे किया? रम्या ने अपने अनुभव द्वारा गणितीय अवधारणा को व्यक्त किया। शून्य में किसी संख्या को जोडने पर वही संख्या होती

है। जैसे 0+5=5। इसके लिए वह दी गई संख्याओं में इकाई के स्थान पर शून्य कैसे ला सकती है, वही किया है। जैसे 19 में एक जोडने पर, 20 तथा दूसरी संख्या 22 को 20+2=20+1+1 व्यक्त करने पर कुल जोड 41 हुआ।

अर्थात– 19+22 = 19+20+1+1

=(19+1)+20+1

=20+20+1

=41 हुआ

इसी तरह

18+5=10+8 +2+3 = 10+10+3 =23

रम्या की अभिव्यक्ति से आबिदा को जोड़ की समझ सहज हुई। अब आबिदा समूहीकरण द्वारा जोड़ की अवधारणा को स्पष्ट करने की क्षमता विकसित कर चुकी है।

सवालों को बच्चों के अनुभवों व समझ के संदर्भ में रखना चाहिए।

उदाहरण साफ तौर पर दिखाता है कि रम्या ने जोड़ करने के अपने तरीके विकसित कर लिए हैं; "आगे गिनना" और "पुनः समूहीकरण"। वह संख्याओं के पैटर्नों से परिचित थी और इसलिए वह पुनः समूह बनाकर बड़ी संख्याओं को भी आसानी से जोड़ पायी। उस जानकारी का उपयोग करके शिक्षक ने सवाल को दो तरह से रम्या के सामने लाने की कोशिश की। यह तरीके हैः

(i) सवाल को उसके अनुभवों के संदर्भ में रखकर, और
(ii) सवाल को उसके लिए ठोस बनाकर।

उदाहरण–2

रवि पटना के एक स्कूल में शिक्षक है। वह कक्षा 4 के बच्चों को गणित पढ़ाता है। जब नया स्कूल–वर्ष शुरू हुआ तो वह पाठ्य पुस्तक खोलकर बच्चों को 4 अंकों वाली संख्याएं लिखना सिखाने लगा। उसने किताब में से कुछ हिस्सा बोर्ड पर लिख दिया। उसके बाद उन्हें ढेर सारे सरल सवाल देकर कमरे से बाहर चले गये। बाद में, उसे यह देखकर आश्चर्य हुआ कि अधिकतर बच्चे सवालों को हल नहीं कर पाए थे। आपके हिसाब से बच्चों की ऐसी परिस्थिति क्यों बनी?

जब किसी बच्चे को कोई अवधारणा सिखाई जा रही हो तो यह पहचानना महत्वपूर्ण है कि पहले से उसे क्या–क्या मालूम होना चाहिये, और क्या वह उतना सीख चुका है?

बच्चे अपने ही तरीकों से सीखते हैं

बच्चे अपने समवय समूह द्वारा सहज तरीकों से सीखते हैं।

इस वीडियों में प्राथमिक गणित की कक्षा में शिक्षिका विद्यार्थियों की जोड़ियाँ बनाकर उन्हें सवाल बनाने और उनके हल ढूँढ़ने हेतु एकदूसरे से बात करने के लिए प्रोत्साहन देती हैं। https://youtu.be/Y8AcFBes9dw

विनोद से यह पूछा गया कि 'आठ चीजों की सात ढेरों' में कुल कितनी चीजें हैं? उसने कहा उसे नहीं पता। उससे फिर पूछा गया, ''क्या तुम इसका जवाब मालूम कर सकते हो?'' कुछ देर तक चुप रहने के बाद विनोद ने कहा ''56'', तुमने यह कैसे निकाला?'' विनोद ने बताया, ''दस अट्ठे 80 होता है। उसमें से 8 घटाएं तो 72, फिर 8 घटाएं तो 64 और फिर 8 घटाएं तो 56 बचता है।''

अर्थात $8\times7 = 8(10-3) = 8\times10-8\times3 = 80-8-8-8 = 56$

कक्षा 3 की शान्ता से 189 – 67 हल करने को कहा गया। उसने कहा कि यह 100+89-{100(30+3)} है उसके इस तरीके को शिक्षक ने 'गलत' ठहराया क्योंकि उनका जवाब पाने का तरीका '189 से 7 घटाएं और फिर 60' अर्थात, शान्ता अपने तरीके से 189–67 को {100-(3+30)} के रुप में व्यक्त किया जबकि शिक्षक 189–67 को 189–7–60 द्वारा उत्तर की अपेक्षा की गई थी।

अगर इस तरह से बच्चों को अपने तरीकों से सवालों को हल करने से रोका जाए तो उनका सोचने, संबंध बनाने और गणित में पैटर्न पहचानने की क्षमता के विकास में रूकावट पड़ती है तथा उनका विश्वास भी कम होता है। अगर हम बच्चों को गणित के सवाल अपने तरीकों से करने दें, तो आपको उनके सोचने में अभूतपूर्व विविधता दिखाई देगी। ''बच्चों को गणित पढ़ाते हुए अक्सर इस बात पर हैरानी होती है कि बच्चे कितने अलग–अलग तरीकों से सवालों को हल करते हैं। उनके सवाल और जवाब के बीच अक्सर तर्कों का एक सिलसिला होता है जिन्हें बच्चे अक्सर खुद ही सोचते हैं। एक बार बच्चों को दो अंकों वाली दो संख्याओं को गुणा करना सिखाया गया।उनके सामने कुछ सवाल हल किए गए और कई बार ऐल्गोरिद्म (Algorithm) समझाया गया। फिर उन्हें यह सवाल दिया गया।

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{\times\ 13} \end{array}$$

सबसे पहले सवाल हल करने वाली रम्या का जवाब था 156, उसकी कॉपी में सवाल के ठीक नीचे यह जवाब लिखा था। जब उसकी रफ कॉपी देखी गई तो उसमें 100+20+30+6 लिखा था। बार–बार पूछने पर रम्या ने कहा, ''मैनें पहले 10 को 10 से गुणा किया, फिर 2 को 10 से, वगैरह।'' अर्थात $12\times13 = (10+2)(10+3) = 10\times10+2\times10+3\times10+3\times2$

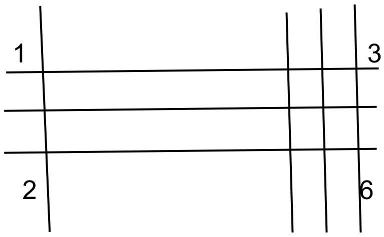
तब यह स्पष्ट हुआ कि यह संतोष करना कि सही उत्तर तक पहुँच गए उतना ही जरूरी है या शायद कमतर ही है यह जानने से कि वहाँ पहुँचे कैसे। इसने इस बात को भी रेखांकित किया कि हमारा सोचने का ढंग एकसा नहीं होता और **बच्चे अपने तरीकों से सवाल हल करते हैं।** ये तरीके सही भी हो सकते हैं और गलत भी। पर करने वाले की नजर में वे ही सही होते है। बच्चों से अंतःक्रिया करते समय इस बात को समझना अत्यंत आवश्यक है।

अपने नये गणितीय अनुभवों को समझने के लिए बच्चे अपने पुराने तरीकों को बदलते रहते हैं और उनके मुताबिक नए तरीके खोजते रहते हैं। सही माहौल मिले तो यह सिलसिला जारी रहता है और बच्चे को स्वाभाविक रूप से गणित समझने और गणितीय

तौर पर सोचने के लायक बनाता है। लेकिन अगर बच्चों पर तथाकथित सही तरीके थोपे जाएँ और अलग हट कर नए ढंग से कुछ करने की गुंजाइश न छोड़ी जाए तो धीरे–धीरे अपने तरीके निकालने और अवधारणाओं को समझने की उनकी क्षमता और इच्छा कम होने लगती है और इसी के साथ–साथ रूचि भी। अन्त में शिक्षक ने कक्षा में अभिनव तरीकों द्वारा 12×13 को करने की चुनौती दी। यह भी कहा कि हम एक दूसरे की भावना का ख्याल रखते हुए सभी की सोच का सम्मान करेंगे तथा निष्कर्ष तक पहुँचने की कोशिश करेंगे।

शाजिया ने इसे इस प्रकार किया

12×13 = 156 दहाई=5



ईकाई=6

पहले शाजिया ने 12 के लिए एक पंक्ति क्षैतिज तथा कुछ हटकर 2 पंक्ति क्षैतिज लिया तथा 13 से गुणा करने के हेतु 1 पंक्ति उर्ध्वाधर व कुछ दुरी पर 3 पंक्ति ऊर्ध्वाधर लेकर इन पंक्तियों के कटान बिन्दुओं की संख्या लिखकर निष्कर्ष तक पहुँची।यह विधि कक्षा के सभी शिक्षार्थियों के लिए नई थी जिसे शाजिया ने गुणा को एक गतिविधि से जोडकर समझाया।

क्रियाकलापः

एक शिक्षक ने अपनी कक्षा के बच्चों को गणित के कुछ सवाल दिए। उन्हें इसे हल करने का तरीका नहीं बताया। क्या सभी बच्चे सवाल को हल करने के लिए एक ही तरीका अपनाते हैं? वे किन–किन तरीकों से यह सवाल हल करते हैं?

प्रश्न : यहां 4 सवाल दिए जा रहे हैं। चार बच्चों ने इनमें से एक–एक सवाल, निम्नांकित रूप से हल किये। बताइये इन सवालों को हल करने के लिए बच्चों ने कौन–कौन से तरीके अपनाये?

(क) 8+6 = 8+2+4 = 14

(ख) 4+9 = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 = 13

(ग) 3+12 = 13, 14, 15 = 15

(घ) 7+5 = 1+1+..................+1(7 बार)+1+1+1............+1(5 बार) = 12

संबंध जोड़कर सीखना

हम जानते हैं कि गणित सीखने के दौरान उत्तर पाने की प्रक्रिया पर ज़ोर देने की ज़रूरत है, न कि सिर्फ उत्तर पाने पर। इसलिए, एक शिक्षक की हैसियत से यह जरूरी

चित्र 2 : इसके सींग क्यों है?
क्योंकि जब... इसलिए।

है कि आप बच्चों को अपने आस–पास की दुनिया को गौर से देखने, सवाल पूछने, खोज करने और तर्कों के आधार पर उत्तर ढूंढने के लिए बढ़ावा दें। यह भी जरूरी है कि आप उन्हें अपने तार्किक सोच को व्यवस्थित करने के लिए प्रेरित करें। इसके लिए पहले तो, हम बच्चों को प्रश्न पूछने के लिए प्रेरित करें। जब बच्चे, आपसे पूछें, "कुछ पत्ते हरे और कुछ पत्ते भूरे क्यों होते हैं?" या "चांद हमारे साथ–साथ कैसे चलता है?" या "मरने के बाद लोग कहां चले जाते हैं", हमारा जवाब ऐसा होना चाहिए कि उन्हें संतुष्ट कर सके। हमें ये प्रश्न चाहे कितने ही कठिन या बेवकूफी भरे लगें हमें उन्हें गंभीरतापूर्वक लेना चाहिए और तार्किक तरीके से उत्तर ढूंढने में उनकी मदद करनी चाहिए।

एक और बात जो मदद करती है वह है बच्चों के सामने ऐसे प्रश्न रखना जिनमें कि उन्हें पहले से ही निश्चित जवाब न दिए जाएं। जैसे, एक कॉपी के पेज को तुम कितनी तरह से एक वर्ग की शक्ल में मोड़ सकते हो?" उन्हें अपने प्रश्न खुद बनाने का मौका दिया जा सकता है जैसे कि सवाल जवाब या अटकलबाज़ी के खेलों में। इस तरह के मौके देने से बच्चे बहुत सी बातें आसानी से और रोचक तरीके से सीखते हैं। ऐसा करने से बच्चों को अपनी मानसिक क्षमताएं विकसित करने का मौका भी मिलता है। इससे बच्चों को यह अहसास भी होता है कि एक सवाल के कई जवाब भी हो सकते हैं।

बच्चे अपने तर्कों को व्यवस्थित कर सकें इसके लिए उन्हें बढ़ावा व मार्गदर्शन देने के लिए हम बहुत तरह की गतिविधियां सोच सकते हैं। जैसे, उनसे चीज़ों के एक ढेर का वर्गीकरण करने के लिए मापदंड (criteria) चुनने को कहा जा सकता है, और इन मापदंडों को सही तरह से लागू करने में उनकी मदद की जा सकती है या वे अपने स्कूल के साथियों के स्कूल आने के अलग–अलग तरीकों की परिकल्पना कर सकते हैं। फिर वे आंकड़े इकट्ठे करके, उन्हें लिखकर और उनका विश्लेषण करके परिकल्पना को सिद्ध कर सकते हैं या उसका खंडन कर सकते हैं।

गणित की भाषा

कक्षा 2 के शिक्षक संख्या 11 की मिसाल लेकर स्थानीय मान की अवधारणा समझा रहे थे। उन्होंने शुरूआत इस तरह की, ''एक और एक ग्यारह होते हैं।'' कुछ बच्चे, जिन्होंने अब तक यह सीखा था कि एक और एक दो होते हैं, चक्कर में पड़ गये। यह भ्रम शिक्षक की भाषा से ही उत्पन्न हुआ।

बच्चों के साथ गणितीय अवधारणाओं पर चर्चा करने के लिए भाषा की जरूरत तो होगी ही। गणित के लिए भाषा का उपयोग करते समय कुछ खास शब्द व उपयोग के तरीके सामने आते हैं। यानी गणित सीखते वक्त बच्चों को गणित के साथ–साथ उसकी भाषा को भी समझना होता है। इसलिए अगर कोई बच्चा गणित की किसी अवधारणा को नहीं सीख पा रहा है तो इसका कारण वह भाषा हो सकती है जो उसे अवधारणा सिखाने के लिए इस्तेमाल की जा रही है। हो सकता है कि वह भाषा ही भ्रम पैदा कर रही हो। वैसे भी सीखते समय सिखाने वाला कुछ गलतियाँ करके ही सीखता है और यह गणित की भाषा सीखने के संदर्भ में भी सही है।

"गणित की भाषा और भाषा के रूप में गणित, बच्चों को दोनों को समझने का प्रयास करना है।"

कभी–कभी कुछ बच्चे उन शब्दों को नहीं जानते जो किताबों में होते हैं या जिन्हें शिक्षक इस्तेमाल करते हैं। जैसे कि 'लघु', 'शेष', 'समान', 'भिन्न', 'गुणनफल', 'प्रत्येक' जैसे शब्दों को न जानने से गणित समझने में रूकावट हो सकती है। साथ ही, एक ही गणितीय अवधारणा अथवा संक्रिया के लिए अलग–अलग शब्द उपयोग होने पर भ्रमित हो सकते हैं। जैसे कि, घटाने के लिए 'कम करो', 'अंतर निकालो', 'व्यवकलन करो', सभी इस्तेमाल किए जाते हैं।

बड़े बच्चों को भी अक्सर इन समस्याओं का सामना करना पड़ता है। ऐसा इसलिए क्योंकि हर स्तर पर गणित की अवधारणाओं को सिखाने के लिए भाषा इस्तेमाल होगी और इसका स्वरूप बदलता व अधिक समृद्ध होता जाता है। इस भाषा को सीखने की कोशिश हर स्तर पर करनी पड़ती है। बच्चों को इस बात के लिए बढ़ावा देना चाहिए कि वे गणित की अवधारणाएं सीखते हुए उनके बारे में बात करें। इस तरह से गणित की भाषा सीखने में उन्हें मदद मिलती है।

कुछ बच्चे किसी इबारती सवाल की लम्बाई और जटिलता से भी चकरा सकते हैं। जैसे कि यह सवाल लें, "25 और 30 के बीच में वह कौन सी संख्या है जिसे 2 और 3 दोनों से पूरा–पूरा भाग नहीं दिया जा सकता?" यह वाकई एक जटिल सवाल है। किन्तु इसकी जटिलता को भाषा का स्वरूप बदलकर थोड़ा सा सरल कर सकते हैं। बच्चों को यही सवाल अगर इस तरह दिया जाए– "25 और 30 के बीच में एक संख्या है। इस संख्या में 2 अथवा 3 से पूरा–पूरा भाग नहीं लगता। यह संख्या कौन सी है?"

गणित सिखाने का एक संभावित क्रम

<u>अ–भा–चि–प्र</u>

गणित की अमूर्त प्रकृति प्राथमिक कक्षा के छोटे एवं अपरिपक्व बच्चों के अवधारणा अधिगम में बाधक होती है। इसके लिए यह आवश्यक है कि हम ऐसे शिक्षण तरीकों/विधियों का उपयोग करें जो बच्चों के अनुभवों एवं भाषा पर आधारित हो ताकि वे सहज एवं परिचित संदर्भों में अवधारणाओं को आत्मसात कर सकें। हम अक्सर नए प्रतीकों को देखकर भ्रमित हो जाते हैं। बच्चे भी ऐसे थोपे गए नये प्रतीकों को समझ नहीं पाते।बच्चों में गणित की समझ बनाने के लिए हमें उन्हें सावधानी से बनाए गए क्रम में सीखने के अनुभव देने होंगे। कुछ भी और सीखने की तरह ही गणित सीखना भी एक निरंतर प्रक्रिया है। अ–भा–चि–प्र विधि आरंभिक स्तर पर बच्चों में अवधारणाएँ विकसित करने में सहायक हो सकती हैं। उपर्युक्त विधि निम्नांकित क्रम से समझा जा सकता है।

(अ) ठोस वस्तुओं के साथ **अनुभव** (जैसे, कंकड़, लकड़ियां या अन्य कोई भी आसानी से मिलने वाली चीज़ें);

(भा) बोलकर अनुभवों के बारे में बताना, यानी कि **भाषा** का उपयोग (जैसे, शब्द/कहानी सवालों के उपयोग से, खेलों से);

(चि) अनुभव को **चित्रों** द्वारा दिखाना (जैसे, मात्रा को चित्रों द्वारा दिखाना);

(प्र) अनुभव का लिखित **प्रतीकों** द्वारा व्यापकीकरण (जैसे, संख्यांक)।

यह मान कर कि कोई बच्चा पूर्ण संख्याओं से परिचित है, उसकी ऋणात्मक संख्याओं की अवधारणा सीखने के संदर्भ में इस क्रम को देखें।

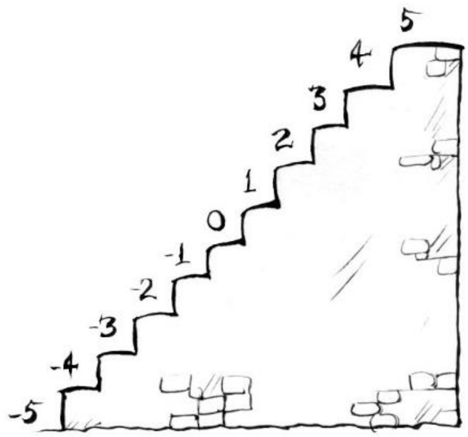
यहाँ चीजों का उपयोग कर ठोस के साथ अनुभव करवाने के संदर्भ को सोचना होगा। यहाँ प्राकृत संख्या की तरह चीज़ें नहीं दे कर गिनवा सकते हैं।

यहाँ हमें एक ऐसा उदाहरण चुनना चाहिए जिसमें हम भूतल को शून्य मानें। ऊपर जाने वाली सीढ़ियाँ धनात्मक संख्या हैं और नीचे तहखाने में जाने वाली शून्य से धीरे–धीरे कम होती जाती हैं। बच्चों को सीढ़िया पर ऊपर–नीचे जाने का अभ्यास करवाया जा सकता है।

इसी तरह किसी गढ्ढे की गहराई के लिए ऋणात्मक संख्या के उपयोग से बच्चे देख सकते हैं कि गहराई बढ़ने का अर्थ है, ज्यादा ऋणात्मक संख्या।

(अ) बार–बार तहखाने में जाने को अथवा पहली मंजिल पर जाने को कह कर के और उनसे संख्या धनात्मक होगी अथवा ऋणात्मक पूछ कर व उन्हें ऐसे कथन गढ़ने का कह कर उनसे धनात्मक व ऋणात्मक संख्या को भाषा के रूप में उपयोग करवा सकते हैं।

(चि) कुछ चित्र बना कर बच्चों को चित्र पर अलग–अलग संख्या दिखाने को कह सकते हैं। वे चित्र लेकर आपस में खेल सकते हैं। ऋणात्मक संख्या के उदाहरण में वह प्रतीक का परिचय भी प्राप्त कर लेते हैं।



(प्र) इसके बाद ठोस वस्तुओं व चित्र के बिना ऋणात्मक संख्याओं को प्रतीकों के रूप में अभ्यास करते हैं।

इस क्रम में बच्चे ठोस अनुभव को महसूस करके व उसके साथ कार्य करके धीरे–धीरे अमूर्तता की ओर बढ़ते हैं और प्रतीकों के उपयोग करने तक उससे पूरी तरह सक्षम हो जाते हैं।

(अ) वे अपनी रोटी/सैंडविच, या रंगीन काग़ज का एक टुकड़ा, या अन्य कोई भी ऐसी चीज़ों को आधे–आधे में बाँटते हैं। बाद में वे, मान लीजिये, 6 चीज़ों को दो समूहों में बाँटते हैं।

(भा) वे शब्द "आधे" को मात्रा से जोड़ने लगते हैं। आप ऐसे खेल बना सकते हैं, जिससे वह अलग–अलग भिन्न संख्याओं के नामों से परिचित हो पाए।

(चि) आप चित्र में दिखाए गए तरीके से उसे विभिन्न चित्र दिखा सकते हैं,

औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़ने की आवश्यकता

प्राथमिक विद्यालयों में बच्चे मूर्त–संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं। सीखने वालों को अगली अवस्था तक बढ़ने में मदद देने के लिए हमें ठोस व औपचारिक के बीच की कड़ियों पर ज़ोर देना होता है। अ भा चि प्र इसी तरह का एक क्रम है।कभी–कभी ऐसा लगता है कि एक बार यदि बच्ची कोई विशेष अमूर्त अवधारणा या प्रक्रिया समझ गयी है तो उसके

बाद उसे अन्य अवधारणाएं या प्रक्रियाएं समझने के लिए ठोस अनुभवों की जरूरत नहीं है। लेकिन ऐसा नहीं है। औपचारिक गणित या मन में हिसाब अच्छी तरह कर पाने के बावजूद भी बच्चों को अवधारणाओं, संक्रियाओं, सवालों, इत्यादि को समझने के लिए वास्तविक चीज़ों और अनुभवों की जरूरत पड़ सकती है। उनके विकास का यह पेंचदार स्वरूप गणित सीखने की प्रक्रिया की विशेषता है।

उदाहरण के लिए, जब दो अंकों वाली संख्याएं सिखायी जाती हैं उससे पहले बच्चों को "स्थानीय मान" समझने की जरूरत होती है। इसके लिए उन्हें समूह बनाने के ढेर सारे ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी। इससे उन्हें धीरे–धीरे "दहाई" और "इकाई" समझने में मदद मिलेगी। इसके बाद वे छोटी संख्याओं के औपचारिक गुणा और भाग करने के लिए तैयार हो जाएंगे। फिर उनमें बड़ी संख्याओं के संदर्भ में "स्थानीय मान" की समझ विकसित करने के लिए फिर विभिन्न प्रकार की सीखने के ठोस अनुभवों से गुजरने की जरूरत होगी।

इस तरह से, पहले छोटी संख्याओं और फिर बड़ी संख्याओं के संदर्भ में काम करने से बच्चों को अवधारणा की बेहतर समझ बनाने का मौका मिलता है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक बच्ची एक नई अवधारणा, जोड़ में क्रमविनिमयता, को समझने की कोशिश कर रही है। शुरू में, इतना काफी है कि वह इस गुण को छोटी संख्याओं से, जिनसे वह पहले परिचित है, के लिए ही समझ ले। अभी वह बड़ी संख्याओं से, जिनसे वह शायद उतनी परिचित न हो, क्यों जूझे?

इबारती प्रश्नों का प्रयोग अक्सर उसकी दुनिया में घटित घटनाओं पर आधारित होता है। उदाहरण के लिये, यदि आप एक पूर्वस्कूली बच्ची को "दो" का अर्थ सिखाने की कोशिश कर रहे हैं, तो एक अच्छा तरीका होगा कि आप उसे "मुझे दो पेन्सिलें दो" जैसे कई सवाल दें। इस तरह के सवालों को हल करते हुए बच्ची अभ्यास करती है व धीरे–धीरे "दो" का अर्थ पूरी तरह से समझ लेती है। इसी तरह, "तुम्हारे पास पाँच पेन्सिलें थीं, यदि मैने तुम्हें बारह और दीं तो तुम्हारे पास कुल मिलाकर कितनी पेन्सिलें हो जाएंगी?" की तरह के इबारती सवाल करने से बच्चे जोड़ की अवधारणा बनाते हैं।

लेकिन, इबारती सवाल आम तौर पर कक्षा 1 के अंत में कराए जाते हैं। यह शायद इसलिए है क्योंकि हममें से कई लोगों की यह गलत धारणा है कि इबारती सवाल ऐल्गोरिद्मों का अभ्यास कराने का एक तरीका है। बड़ों की तार्किक सोच तय करती है कि औपचारिक प्रतीकों को पहले सिखाना चाहिए। क्या हम इससे सहमत हैं?

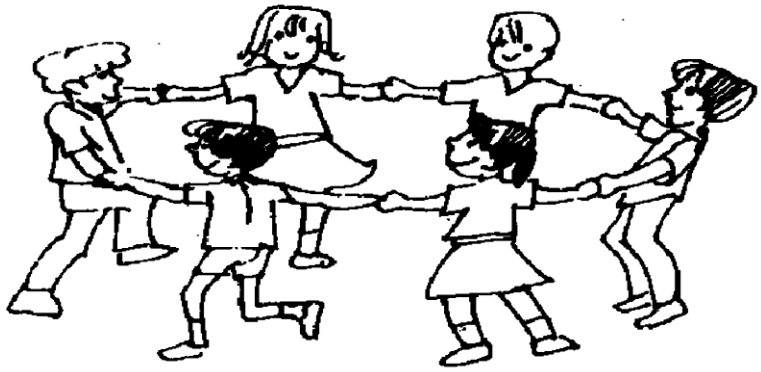
वैसे तो कोई भी पाठ्यपुस्तक ऐसे किसी एक स्तर से शुरू नहीं हो सकती जो हरेक बच्चे के लिए सही हो। यदि शिक्षक चाहते हैं कि वे गणितीय सोच व क्षमताओं की पक्की नींव बनाएं, तो यह महत्वपूर्ण है कि पूर्वस्कूली व प्राईमरी स्कूल के बच्चों के लिए वे पाठ्य पुस्तक के अलावा अन्य शिक्षण सामग्री का भी इस्तेमाल करें। वास्तव में, अपने आप में गतिविधियों पर आधारित एक पाठ्यक्रम दे देना ही काफी नहीं है। बेहतर यह होगा कि उसके साथ–साथ पाठ्य पुस्तक की जगह एक कार्यपुस्तक का इस्तेमाल किया जाए, ख़ास तौर से छोटे बच्चों के लिए।

एक बच्चे को किसी भी अवधारणा को समझने के लिए उसे ठोस अनुभवों से शुरू करके अमूर्त स्तर तक, पहुँचने के लिए सीखने के अनुभव एक क्रम में देने चाहिये। मोटे

तौर पर यही क्रम रख कर, इसमें थोड़ी बहुत तब्दीलियाँ की जा सकती हैं। और क्रम के हर चरण में आपको यह जानना जरूरी है कि बच्चे को कितना समझ में आया है।

गणित सिखाने के बारें में कुछ और बातें

खेल–खेल में सीखना



चित्र 4 : बच्चे खेल–खेल में गणितीय आकारों के बारे में सीख सकते हैं।

बच्चे गणित की बुनियादी अवधारणाएं खेलों से सीख सकते हैं। उन्हें जाने पहचाने संदर्भों में खेलने में मज़ा आता है। बच्चों में उनके खेलों से, अपने आप ही, मज़े–मज़े में, बहुत सारी गणितीय गतिविधियां आ जाती है। नए विचारों और अवधारणाओं से छोटे बच्चों का परिचय खेलों व ऐसी परिचित स्थितियों से कराया जा सकता है, जो उन्हें मज़ेदार लगे और जिनसे उन्हें घबराहट या परेशानी न हो। यही बात प्राईमरी के बड़े बच्चों के लिए भी लागू होती है।

जब छोटे बच्चे चीज़ों को आपस में बांटते हैं तो वास्तव में वे एक–से–एक का मेल मिलाते है। जब वे गुटकों से खेलते हैं तो वे अलग–अलग आकारों से प्रयोग कर रहे होते हैं। जब वे "पाँच छोटे बंदर" जैसा गाना गाते है तो वे संख्याओं के नाम सीखते हैं।

बच्चों को इबारती खेलों में भी मज़ा आता है। वे आम तौर पर शब्दों के पैटर्न पकड़ने में तेज़ होते है। क्योंकि पैटर्न पहचानना गणितीय सोच का मूलभूत पहलू है, बच्चे अपनी भाषा विकसित करने के साथ–साथ वास्तव में गणित भी कर रहे होते हैं।

हम कोई भी गणितीय अवधारणा सिखाने के लिए ढेरों खेल बना सकते हैं। ये खेल या तो पूरी कक्षा के साथ खेले जा सकते हैं, या छोटे समूहों में। खेल ऐसे भी बनाए जा सकते हैं जिनसे बच्चे संबंधित गणितीय भाषा भी साथ ही सीख जाएं।

यहां टीम में खेले जाने वाले कुछ खेलों के उदाहरण हैं।

क) एक टीम अपने सामने कुछ कंकड़ रख लेगी, दूसरी टीम पहली टीम द्वारा रखे गए कंकड़ों को गिन कर बताएगी या दूसरी टीम पहली टीम के कंकड़ों में से 15 कंकड़ गिन कर निकाल लेगी। पहली टीम 3 कंकड़ छोड़ कर बाकी को दूसरी टीम को दे देगी और उसकी संख्या भी बताएगी।

ख) एक टीम दो पासे (बिन्दु या संख्याओं वाले) फेंके और कंकड़ों के ढेर में से उतने कंकड़ उठा लेगी जितना कि दोनों पासों की संख्याओं का जोड़ हो (या अंतर हो, या गुणा हो)। दूसरी टीम भी ऐसा करेगी। दो बारियों के बाद जिसके पास भी ज्यादा कंकड़ होंगे वह जीत जाएगा। यहां भी, खेल के दौरान बच्चे "छः जोड़ दो बराबर आठ" जैसी भाषा से ज्यादा परिचित हो सकते हैं।

ग) कंकड़ों, पासों, टहनियों, कार्डों या मोतियों से आप "स्थानीय मान" सिखाने के लिए खेल बना सकते हैं। 10 कंकड़ों (10 के आधार के लिए) को एक कार्ड या एक मोती के बराबर मान कर, अदला–बदली की जा सकती है और इसका लेखा–जोखा रखा जा सकता है। एक बार जब वे दहाईयों की पकड़ ठोस चीज़ों से बना लेते हैं तो उन्हें संख्यांकों का इस्तेमाल करने वाले खेलों से भी परिचित करवाया जा सकता है।

उदाहरण के लिए, हम 10–10 कार्डों के दो समूह ले सकते हैं जिन पर 0 से 9 तक के संख्यांक लिखे हों। इसे बच्चों की दो टीमों द्वारा कराया जा सकता है। बच्चे कार्डों को फेंट कर और उल्टे करके टेबल पर रख देंगे। फिर वे बारी–बारी से, एक बार में एक कार्ड चुनेंगे और उसे बोर्ड पर "इकाई" या "दहाई" के स्तम्भ में रखेंगे। एक कार्ड जहाँ रखा जा चुका है वहाँ से हटाया नहीं जा सकता। उद्देश्य सबसे बड़ी संख्या बनाना है। वे जो भी नम्बर बनाएंगे उसे जोर से कहेगें। उदाहरण के लिए, यदि पहले समूह का संख्या 3 का कार्ड खुला और उसे उन्होंने दहाई के स्तम्भ में रखा, तो उन्हें जोर से 30 कहना चाहिए, वगैरह।

यह खेल कार्डों की जगह दो पासों से भी खेला जा सकता है।

नीचे अटकलबाज़ी के कुछ खेलों के उदाहरण दिए हैं। इनसे बच्चों को अपने गणितीय सोच और भाषा का विकास करने के बहुत से मौके मिलते हैं–

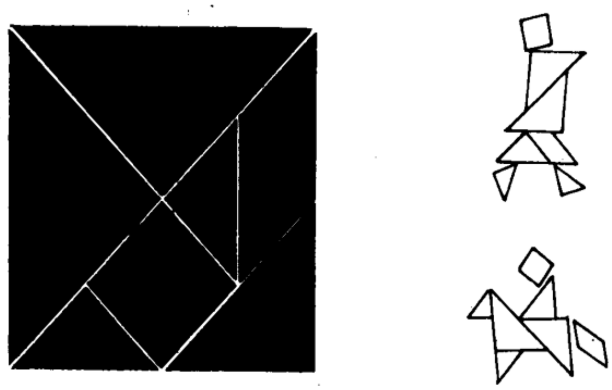
(क) एक खेल में कक्षा के सामने जानी पहचानी चीज़ों का एक ढेर रख दिया जाए। एक टीम या बच्चे (आप जैसे भी खेल खिलाना चाहें) से किसी एक चीज़ को चुनने व उसका नाम शिक्षक के कान में कह देने के लिए कहा जाए। दूसरे बच्चे/समूह बारी–बारी से चुनी हुई चीज़ का अन्दाज लगाएं जिसके लिए वे उसके माप, आकार या दूसरी चीज़ों के सापेक्ष वस्तु का स्थान जैसे संकेतों को आधार बनाएं। जैसे, यह ज्यादा लम्बी है, ज्यादा भारी है, सामने रखी है, यह गोल नहीं है, आदि–आदि।

(ख) हम अटकलबाजी से ऐसे खेलों के बारे में सोच सकते हैं जिनमें अन्दाज़ लगाने वाले कुछ ऐसे सवाल ही पूछ सकते हैं जिनके उत्तर "हाँ" या "नही" में ही हों। ऐसे खेल बच्चों को विशिष्ट सवालों से (क्या वह दरवाज़ा है? किताब है?) ज्यादा व्यापक सवालों (क्या उस पर बैठ सकते हैं? क्या वह मेरे जितना बड़ा है? क्या कमरे में एक से ज्यादा हैं?) की ओर बढ़ने का मौक़ा देते हैं। इससे उत्तर तक पहुँचने के लिए जरूरी प्रश्नों की संख्या कम हो सकती है। जैसे, मान लें कि चुनी हुई चीज़ 1 से

100 के बीच की संख्या है। शुरू में, शायद बच्चे अलग–अलग संख्याएं लेकर पूछें कि क्या वह 4 है, या 26 है, वगैरह। कुछ समय के बाद वे पूछना सीख जाएंगे कि "क्या वह 4 से बड़ी हैं?" "क्या वह सम संख्या है?" आदि। बाकी बच्चे भी इस तरीके को जल्दी पकड़ लेंगे या, मान लें, चुनी हुई वस्तु एक बेलनाकार डिब्बा है। तब प्रश्नों में गणित की शब्दावली आ जाएगी जैसे– क्या वह गोलाकार है? क्या वह किसी रेखा के प्रति सममित है? क्या उसमें 4 कोण हैं?

ऐसे खेल बच्चों की व्यापकीकरण करने, विशिष्टीकरण करने, अन्दाज लगाने व पैटर्न पहचानने की क्षमताएं विकसित करके उनके गणितीय सोच का विकास करते हैं। अर्थात ये सब उनकी गणितीय सोच व तार्किक क्षमता बढ़ाते हैं।
बहुत सारी अन्य मज़ेदार गतिविधियों का उपयोग बच्चों को ज्यामिति की विभिन्न अवधारणाओं से परिचित कराने के लिए किया जा सकता है। जैसे, बच्चे सममिति के बारे में "रंगोली" के सममित पैटर्न कागज़ पर बना कर सीख सकते हैं।

ओरीगेमी, यानि कागज़ मोड़ने की कला, के द्वारा अलग–अलग दो व तीन–आयामी आकारों से उनका परिचय कराया जा सकता है। सिखाते वक्त, हर कदम पर शिक्षक गणित की शब्दावली पर जोर दे सकते है जैसे, "अब कागज़ को मोड़कर आधा करो", "फिर मोड़कर इससे एक वर्ग बनाओं", "जब तुम इस कोने को इस तरह से मोड़ोगे (दिखाकर), यह एक **त्रिभुज** बन जाएगा। "**टैनग्राम** का इस्तेमाल भी इसी प्रकार किया जा सकता है।



(क) (ख)

चित्र 5 : (क) एक टैनग्राम, (ख) टैनग्राम से बने कुछ आकृतियाँ

जरूरी नहीं कि दोहराव उबाऊ हो

बहुत छोटी उम्र से ही बच्चे कई बातों को दोहराते हैं और इससे सीखते हैं, जैसे, चीज़े गिराना व उठाना, डिब्बे और टीन खोलना और बन्द करना, कुछ शब्दों को बार–बार दोहराना, ताक–झाँक का खेल बार–बार खेलना, बड़ों से बार–बार कहानियाँ दोहराने को कहना, आदि। क्या हम इनमें से किसी भी काम को रट कर सीखना कहेंगे?

दोहराव का मतलब रटना नहीं है।

दोहराने के ऐसे कई नए तरीके सोचे जा सकते हैं, जिनसे कि वह मज़ेदार बनाया जा सके। इसे बच्चे मज़ेदार गतिविधियों के द्वारा कर सकते हैं, जिनमें से कुछ की शुरूआत वे खुद भी कर सकते हैं। इन दोहरावों के दौरान भाग लेने वाले बच्चे हर बार कुछ नया व फर्क देखते और अनुभव करते हैं।

दूसरी तरफ, रट कर सीखने में इस तरह की विभिन्नता नहीं होती क्योंकि उसमें प्रक्रिया का बदलाव नहीं होता, बल्कि "जानकारी" ही मशीनी तरीके से दोहराई जाती है (उदाहरण के लिए, पहाड़े मशीनी तरीके से रट कर याद करना।)

अगर हम आस–पास देखें तो हम पाएंगे कि किसी भी बच्चे के माहौल में दोहराव स्वाभाविक तौर पर अलग–अलग रूपों में होता है। लेकिन सीखने के औपचारिक माहौल में बच्चों की रूचि बनाए रखने के लिए दोहराव को काफी विविधता के साथ जानबूझ कर लाना पड़ता है। हम इस चुनौती को कैसे पूरा करेंगे?

बच्चे आम तौर पर पहाड़ों से बहुत परेशान रहते हैं। क्या यह सचमुच जरूरी है कि उन्हें मशीनी तरीके से बार–बार दोहराया जाए? और क्या रटकर याद करने से बच्चे को पहाड़ों को समझने में मदद मिलती है? क्या यह सच नहीं है कि बच्चे एक दिए हुए क्रम में ही पहाड़ों का इस्तेमाल कर पाते हैं। यह बात उस समय साफ नज़र आती है जब हम किसी और क्रम में उनसे गुणज पूछें। क्या यह बेहतर नहीं है कि किसी बात को सिर्फ रटवाने की बजाय बच्चे को उसमें शामिल पैटर्न पहचानने में मदद की जाए? बच्चों के दिमाग़ में गुणज की समझ बैठाने के लिए और पहाड़ों में शामिल पैटर्नों को पहचानने की क्षमता विकसित करने के लिए आप कई गतिविधियां सोच सकते हैं। उदाहरण के लिए, बच्चों से दो–दो, चार–चार, पांच–पांच सेबों के समूह को पहचानने के लिए कहा जा सकता है। और फिर उनसे "चार–चार सेबों वाले कितने समूह हैं?", "ये कुल कितने सेब हुए?" जैसे सरल सवाल पूछे जा सकते हैं। इस तरह की गतिविधि तरह–तरह की चीज़ों से की जा सकती हैं।

दोहराव रूचिकर व अलग–अलग तरीकों से होना चाहिए ताकि बच्चों को सीखने में रूचि बनी रहे।

जब उनको इस तरह की गतिविधियों का काफी अभ्यास हो जाए, तब वे जो भी काम कर रहे हैं उसे गणितीय भाषा में लिखने के लिए उनकी मदद की जा सकती है। जैसे, वे दो–दो सेबों वाले 4 समूहों को $4 \times 2 = 8$ लिख सकते हैं। इसे चित्र द्वारा भी दिखा सकते हैं। अब बच्चे पहाड़ों में मज़े से पैटर्न ढूंढ पाने की स्थिति में होंगे। हम उनसे 10×10 के ग्रिड पूरा करने को कह सकते हैं। हर खाने में बच्चे को खाने की लाइन की संख्या और उसकी स्तम्भ की संख्या का गुणनफल भरना होगा। इस तरह की गतिविधि कुछ लम्बे समय तक की जा सकती है। बच्चों को या तो उतना समय दिया जा सकता है जितना उनको चाहिये या जितने समय तक उनकी रूचि गतिविधि में बनी रहे। उन्हें आपस में बात करने देना चाहिए और पैटर्न खुद ही खोजने चाहिए। उनके बात–चीत के क्रम में उनकी जिज्ञासाओं के अनुरुप तर्क देना चाहिए जिससे आवश्यकतानुसार गणितीय अवधारणा विकसित हो सके। उन्हें आपस में बात–चीत कर एक–दूसरे को स्वयं के तर्क से संतुष्ट करने के लिए प्रेरित करना चाहिए।हो सके तो निष्कर्ष तक पहुँचने में वे शिक्षक की भूमिका भी निभा सकते हैं।इससे उसमें गणितीय समझ सहजता के साथ सुदृढ़ होगी।

क्रियाकलाप

अभ्यास पाठ के क्रम में यह देखने की कोशिश की जा सकती है कि बच्चे निम्नांकित ग्रिड में किस क्रम में संख्याएं भरते हैं। पूरी संभावना है कि सभी बच्चे पहले एक, पाँच और 10 के सारे गुणनफल भरेंगे। आप इस बात की जांच कीजिए कि क्या आपको इस संभावना को गलत साबित करने वाला कोई प्रमाण मिला।

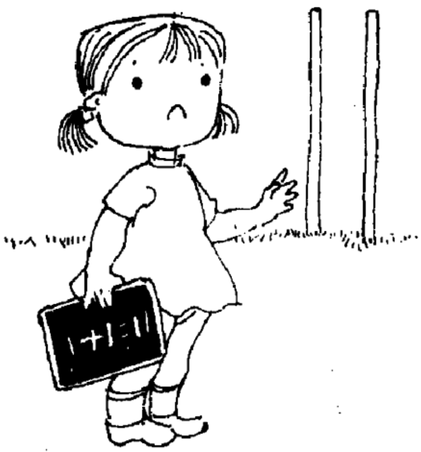
×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

<u>बच्चे एक दूसरे से सीखते हैं</u>

एक दिन एक शिक्षिका पास के ही एक स्कूल में, शिक्षक और बच्चों के बीच किस तरह की परस्पर क्रिया होती है, यह देखने गयी थी। बच्चों को शिक्षक ने एक सवाल दिया हुआ था, और वे अपनी कॉपी में उसे हल करने में लगे हुए थे। उनकी शिक्षिका बच्चों के बीच घूम रही थी और रूक–रूक कर उनसे पूछ रही थी कि कोई एक जवाब उन्होंने कैसे निकाला। ऐसा करने में अधिकतर बच्चों ने अपना लिखा हुआ हल मिटा दिया, चाहे वह सही था या गलत। हमने भी ऐसा व्यवहार देखा होगा। इससे क्या पता चलता है? क्या यह सवाल हल करने की अपनी क्षमता के बारे में आत्मविश्वास की कमी नहीं दिखाता हैं। आत्मविश्वास की यह कमी बड़ों में भी होती है जब उनका किसी विशेषज्ञ से सामना होता है।

जिन बच्चों में सोचने की अपनी क्षमता पर भरोसा नहीं होता, उन्हें बाद में इस क्षमता को विकसित करने में दिक्कत होती है। इसलिए यह जरूरी है कि सीखने का माहौल ऐसा बनाया जाए जिससे बच्चों का आत्मविश्वास बढ़े।

लेकिन यह हम कैसे कर सकते हैं ? यदि समूहों में खेलते हुए बच्चों को आप ध्यान से देखें तो आपको शायद कुछ संकेत मिल जाए। बच्चे जब एक साथ खेलते हैं तो वे एक दूसरे की सोच जाँचते रहते हैं। खेलों व गतिविधियों से बच्चों को एक दूसरे से, बिना किसी डर के, एक आज़ाद और खुले माहौल में मेल–जोल का मौका मिलता है। ऐसे मेल–जोल के दौरान बच्चे अपनी बातों को एक दूसरे के सामने जवाबों और सुझावों के तौर पर रखते हैं। एक बच्चे के लिए दूसरे की बात की अहमियत इतनी ही होती है जितनी कि एक राय की होती है जिसे जाँच कर माना भी जा सकता है, या नहीं भी।



दूसरी तरफ, कोई बड़ा, आम तौर पर बच्चों के सामने अपना मत एक "सच्चाई" के रूप में रखता है, जिसे बिना किसी सवाल या शक के मानना पड़ता है। यदि बड़े के कथन को कोई बच्ची शक से देखे या सोच में पड़ जाए, तो बड़ा अपने कथन को दोहराता है, पहले धीरज से, फिर चिड़चिड़ाकर, और अन्त में, गुस्से से। अंतिम निष्कर्ष होता है, "मूर्ख ! तुम यह भी नहीं समझ सकते !" बच्ची, जो पहले से ही यह समझती है कि वह बड़े के सामने कुछ भी नहीं है अपने बारे में यह राय मान लेती है, और उसका आत्मविश्वास कम होने लगता है।

इसीलिए, सीखने के लिए, बिना डर के आपसी मेल–जोल होना बहुत जरूरी है। इस तरह का मेल–जोल अन्य कारणों से भी महत्वपूर्ण है। सहज माहौल सीखने के लिए वातावरण तैयार करता है। अतः कक्षा–कक्ष का वातावरण ऐसा होना चाहिए कि हर एक बच्चा अपनी बात/जिज्ञासा को सहजतापूर्वक शिक्षक या अपने–अपने साथी के समक्ष रख सके, उनसे तर्क कर सके तथा बात–चीत से साझी समझ विकसित कर सके। यह ध्यान देने की जरुरत है कि बच्चे अपने साथी व समवय समूह से निर्भिकता व स्वछंदता से बात करते हैं तथा तर्क अपने साथी के समझ के अनुसार ही रखते हैं जबकि शिक्षक शिक्षार्थियों के स्तर पर बात–चीत करने का प्रयास करते हैं। कभी–कभी वे इसमें सफल नहीं भी होते

हैं अतः शिक्षक को ऐसे मौके व अवसर अधिक देना चाहिए जिससे शिक्षार्थी एक दूसरे से सीख सके।

> **सोचिए :** क्या हम बच्चों के आपसी मेल–जोल और एक दूसरे से सीखने के और फायदे सोच सकते हैं?

यदि आप इससे सहमत हैं कि बच्चे एक–दूसरे से बहुत कुछ सीखते हैं, तो हम उन्हें ज्यादा से ज़्यादा ऐसे मौके किस तरह दे सकते हैं? महत्वपूर्ण बात यह है कि ऐसी परस्पर क्रियाएँ अनौपचारिक हों, मज़ेदार हों और बिना किसी डर के हों। एक बच्चे से सिर्फ यह कह देना कि, "तुम अपने पड़ोसी/दोस्त/भाई/बहन को पढ़ा दो" आम तौर पर कारगर नहीं होता। यह इसलिए क्योंकि तब बाल–शिक्षक बड़ों की नक़ल करने की कोशिश करता है, और सीखने वाला उतना ही घबरा जाता है जितना कि बड़े से।

बच्चे एक–दूसरे से सीख पाएं ऐसी स्वाभाविक और कुछ निकलने लायक परिस्थिति बना पाना आसान नहीं है। शायद, बच्चों को बिना उनकी जानकारी के, स्वाभाविक तरह से मिलते–जुलते खेलते, बात करते हुए देखना चाहिये। इससे शायद हमें कुछ तरीका समझ में आए कि कक्षा में ऐसी स्थितियाँ बनाई जा सकती है कि बच्चे एक दूसरे से सीख सकें।

क्रियाकलाप

> कुछ बच्चों की स्वाभाविक परस्पर क्रिया को देखने के बाद, उनकी वे विशेषताएँ लिखिये, जिनके कारण बच्चों का एक–दूसरे से सीखने का तरीका, अन्य तरीकों से बेहतर साबित होता है।

ग़लतियाँ उपयोगी होती है

हम अक्सर देखते है कि बच्चे तमाम ग़लतियां करते हैं। ग़लतियाँ होने पर हम क्या करते हैं? इनसे हमें बच्चे के बारे में क्या पता चलता है– सीखने में असफलता, या समझने की एक कोशिश? या दोनों? यदि ऐसा है, तो इन दोनों में अंतर कैसे करते हैं और कैसे तय करते हैं कि किसी ख़ास परिस्थिति में क्या है?

बच्चों की ग़लतियां उनकी सीखने की प्रक्रिया का स्वाभाविक और जरूरी हिस्सा है। नई अवधारणाओं को समझने की प्रक्रिया में बच्चे अपनी अभी तक की समझ को लागू करते हैं। हो सकता है कि यह औपचारिक शिक्षण के तरीके व विषयवस्तु से मेल न खाएँ।

बच्चों की गलतियों से यह भी पता चलता है कि बच्चे कैसे सोचते और सीखते हैं। जैसे, 51 के लिए 15 लिखना हमें यह बताता है कि बच्ची अभी भी स्थानीय मान की अवधारणा समझ नहीं पाई है, और उसे समूह बनाते हुए स्थानीय मान की समझ बनाने की जरूरत हैं।

बच्चे की ग़लती को इस तरह से ध्यान से देखने से शिक्षक को सीखने वाले का गणितीय सोच विकसित करने में बहुत मदद मिल सकती है। गलतियां करना और उनसे सीखना एक पक्की समझ बनाने की प्रक्रिया का हिस्सा ही नहीं है बल्कि, यह सही उत्तर निकालने से ज्यादा महत्वपूर्ण है। दुर्भाग्यवश, परम्परागत शिक्षक अभी भी यही मानते हैं कि सीखना केवल तभी होता है जब सही उत्तर दिए जाएं।

सोचिए– एक पांचवी की बच्ची "$3 \div .... = \frac{3}{2}$" में रिक्त स्थान में $\frac{9}{2}$ भरती है। आपके हिसाब से यह ग़लती क्यों हुई? आप इस स्थिति को कैसे सुधारेंगे?

इसके साथ ही हम इस चर्चा के अंत में पहुंच गए हैं कि बच्चों के लिए सीखने का अच्छा माहौल किन–किन तरीकों से बनाया जा सकता है।

गणित एवं संज्ञानात्मक विकास

अपने आसपास के किन्हीं दो बच्चों के बारे में सोचें। क्या हम यह कह सकते हैं कि वे एक से हैं? क्या वे सभी एक सी बातों को एक ही ढंग से सीखते हैं? हमारा स्वाभाविक उत्तर होगा कि ऐसा नहीं है बच्चे अलग–अलग ढंग से, अलग–अलग गति से और अलग–अलग संदर्भों में सीखते हैं, किन्तु अगर ध्यान से देखें तो इस विविधता में कुछ पैटर्न भी होता है इस पैटर्न पर कई लोगों ने काम किया है और उसकी व्याख्या की है। पियाजे ने संज्ञानात्मक विकास (congnitive development) के पैटर्न को चार अवस्थाओं में बांटा है। ये अवस्थाएँ हैं– संवेदी क्रियात्मक (sensorimotor), पूर्व–संक्रियात्मक (pre-operational), मूर्त संक्रियात्मक (concrete operational), और औपचारिक संक्रियात्मक (formal operational)। इन चारों अवस्थाओं में सामान्य तौर पर बच्चे क्या कर पाएंगे और क्या सीखने की स्थिति में होंगे इस पर काफी काम हुआ है। यह समझना महत्वपूर्ण है कि यह एक मोटा विभाजन है और इन अवस्थाओं को बच्चे में स्पष्ट रूप से अलग–अलग नहीं पहचाना जा सकता। हम सिर्फ मोटे तौर पर कह सकते हैं कि इस क्षेत्र में बच्चा सीखने की इस अवस्था में प्रतीत होता है। हम इस हिस्से में पूर्व संक्रियात्मक व मूर्त संक्रियात्मक अवस्था के बारे में गणित के संदर्भ में चर्चा करेंगे।

पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था

बच्चों में संज्ञानात्मक विकास की यह अवस्था आम तौर पर 2 साल तक से शुरू होकर 6 साल तक चलती है। इस तरह यह ज्यादातर बच्चों के लिए स्कूल जाने से पहले की अवस्था होती है। पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था में प्रमुख यह होता है कि परिस्थिति कैसी दिखती है। वे इस समय तार्किक क्रम में सोच नहीं पाते। जैसे– इस अवस्था के बच्चे आयतन अथवा वजन का संरक्षण नहीं कर पाते। वे सोचते हैं कि एक पतले लंबे गिलास से चौड़े छोटे गिलास में दूध डालने पर दूध की मात्रा कम हो जाती है या एक लाइन जिस में चीजें फैली हैं जिससे लाइन की लंबाई बड़ी है उस लाइन में ज़्यादा चीजें हैं। इन दोनों उदाहरणों में बच्चों ने तुलना का आधार स्पष्ट दिखने वाली लम्बाई के गुण को लिया।

क्रियाकलाप

आप भी दो और ऐसे उदाहरण दें, जिनमें जो उन्हें दिखता है उसके आधार पर बच्चे फैसले करते प्रतीत होते हों।

बच्चे इस अवस्था में कुछ संख्याओं को भी थोड़ा–थोड़ा समझने लगते हैं, और रोज़ के अनुभवों में उनका इस्तेमाल शुरू करते हैं। उदाहरण के लिए, 2 साल की बच्ची 2 गेंदों और 3 गेंदों के समूहों में सिर्फ देखकर फर्क बताना सीखती है, ठीक वैसे ही जैसे वह मोटर गाड़ी और बस में फर्क बताना सीखती है। लेकिन वह 8 गाड़ियों और 9 गाड़ियों के समूह में फर्क नहीं कर पाती। इतने बड़े समूहों की तुलना करने के लिए उसे गिनती सीखनी पड़ेगी।

गिनती और चीजों का संरक्षण सीखने के मुकाबले बच्चे 'कम' या 'ज्यादा' पहचानना जल्दी सीख लेते हैं। ये **बच्चे पैटर्नों में सोचते हैं** और उन्हें आसानी से पहचान पाते हैं। ये बच्चे जो उस समय देख रहे होते हैं उसी पर ज्यादा भरोसा करते हैं। ये बच्चे तरह–तरह की आकृतियाँ पहचान तो सकते हैं पर उनकी हूबहू तस्वीर नहीं बना सकते। वे शब्दों के मुकाबले ज्ञात संदर्भों की तस्वीरों को 'पढ़ना' जल्दी सीखते हैं। ये बच्चे इन्सानों और जानवरों की तस्वीरें तो आसानी से पहचान लेते हैं लेकिन उतनी आसानी से वर्ग या त्रिभुज जैसी सरल आकृतियों को नहीं पहचान पाते। इसी तरह एक छोटी बच्ची जो एक जगह से दूसरी जगह तक पहुँचने का रास्ता याद रख सकती है और स्वयं वहाँ जा सकती है या आपको ले जा सकती है वह आसानी से रास्ते को समझा या चित्र बना कर दिखा नहीं सकती। वह रास्ते का चित्रण भी नहीं पढ़ सकती। उसके लिए ऐसे चित्रणों का परिप्रेक्ष्य समझना संभव नहीं होता। हालांकि उनकी स्थानिक संबंधों की समझ अच्छी होती है किन्तु वह जो सामने दिख रहा है उसी के संदर्भ में होती है।

अगर मात्रा या आकार में बहुत साफ फर्क दिखाई देता है तो बहुत छोटे बच्चे भी यह समझ लेते हैं कि चीज़ों का कौन सा समूह बड़ा है।

अगर हम पूर्वस्कूली बच्चों को कुछ चीजें दें तो आपको यह जानकर हैरानी होगी कि वे कुछ हद तक बता सकते हैं कि वे चीजें कितनी हैं। हालांकि संख्या का संरक्षण वे काफी बाद में कर पाते हैं । इसके लिए चीजों की संख्या छोटी होनी होगी तो ही बच्चे संख्या बता सकते हैं। इसके लिए यह जरूरी नहीं कि उन्हें गिनती की जानकारी हो। इसलिए 4 या 5 तक **दृष्टि–बोधात्मक संख्याएं (perceptual numbers)** हैं, इन समूहों को बच्चे देख कर बता सकते हैं।

स्थानिक समझ के बारे में और देखें तो आम तौर पर पूर्वस्कूली बच्चे एक साथ कई आकारों की तुलना नहीं कर पाते। वे एक बार में केवल दो ही चीजों की तुलना कर सकते हैं और 'कम' या 'ज्यादा' की धारणा समझ सकते हैं। लेकिन यह समझ पाना की किसी एक चीज की मात्रा दूसरी से तो कम है, पर तीसरी चीज से ज्यादा है, उनके लिए मुश्किल है वे 'ज्यादा, कम और उससे कम' भी नहीं समझ सकते। उनके लिए आकार सिर्फ बड़ा या छोटा होता है। बड़े व छोटे के बीच वह किसी आकार को नहीं रख पाते। इसीलिए वे चीजों को उनके आकार या लंबाई के हिसाब से सिलसिलेवार नहीं रख पाते, या घटनाओं को क्रमबद्ध नहीं कर पाते।

क्रियाकलाप

मेरा तीन साल का एक बेटा है। उसके पास खेलने के लिए बहुत सी छोटी गाड़ियाँ हैं। एक बार उसके साथ खेलते हुए, मैनें गाड़ियों को दो समूहों में बांट दिया। एक समूह में 14 गाड़ियाँ थी जिन्हें फैला कर रखा गया था, और दूसरे में 15 थीं जिन्हें पास–पास रखा गया था। जब उसे यह कहा गया कि वह ज्यादा गाड़ियों वाला समूह चुने, तो उसने सही समूह चुना। इस घटना के आधार पर किस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे? अपने चयन की वजह बताएं। साथ ही अन्य विकल्पों को नकारने के कारण भी दीजिए?

(क) वह 20 तक गिन सकता है।
(ख) वह बड़े समूहों को देख कर उनमें फर्क बता सकता है।
(ग) यह चयन सिर्फ एक इत्तफाक था, और वह यह काम दोबारा नहीं कर सकेगा।
(घ) वह गाड़ियों के समूहों के साथ तो यह कर सका, लेकिन और चीजों के साथ यह नहीं कर पाएगा।

जैसे जैसे बच्चे बड़े होते हैं, वे संख्याओं को सहज रूप से समझने की अवस्था से आगे बढ़ते हैं। अभी तक तो वे सिर्फ देखकर चीजों की संख्या पहचानते थे लेकिन बड़े होने पर उनकी सोच भी पहले से ज्यादा विकसित होती है। पूर्व–संक्रियात्मक बच्चों में जो बड़े बच्चे हैं उनमें संबंध बनाने की और संबंध देखने की क्षमताएं विकसित करनी चाहिए जिससे कि उनकी गणितीय समझ बढ़े। इसका एक अच्छा तरीका है कि उन्हें ऐसे खेलों में लगाया जाए जिनमें थोड़ी सी ही चीजें हों, पर उन्हें उन चीजों में कुछ और चीजें 'जोड़नी' पड़े या उनमें से कुछ चीजें 'निकालनी' पड़े।

आइए अब इससे कुछ बड़े बच्चों की क्षमताओं पर गौर करें।

मूर्त संक्रियात्मक अवस्था

प्याजे द्वारा दी गई संज्ञानात्मक विकास की परिकल्पना के आधार पर हम यह अपेक्षा करते हैं कि एक 6–7 साल का बच्चा जो छोटे–छोटे पत्थरों या अन्य चीज़ों से खेल रहा हो और खेलते–खेलते उसे एक लाइन में भी जमा कर रहा हो। तो कुछ ऐसा दृष्टांत

सामने आ सकता है ''उसने पत्थरों को एक लाइन में रख कर उन्हें बायीं से दायीं ओर गिना। वे गिनती में 10 थे। फिर उसने उन्हें दायीं से बायीं ओर गिना। उसे बड़ी हैरानी हुई जब उसने पाया कि वे अभी भी गिनती में दस है। फिर उसने उन्हें गोल घेरे में रखा और पहले उन्हें वामावर्त गिना, फिर दक्षिणावर्त दिशा में। यह जानकर वह बड़ा ही खुश हुआ कि चाहे जैसे भी किया जाए, उनकी संख्या हमेशा दस ही रहती है। इस तरह उसने इस बात की खोज की कि रखने का ढंग बदल देने पर भी उनकी संख्या वही रहती है। इस प्रक्रिया में वह धीरे–धीरे अपने आप ही अपनी पहले वाली धारणा को छोड़ रहा है। उसकी पहली धारणा के मुताबिक चीजों की संख्या इस बात पर निर्भर करती है कि उन्हें कैसे रखा गया है।

वह संज्ञानात्मक स्तर पर आगे बढ़ने के लिए तैयार हो रहा है। इस उम्र में वह यह भी समझ लेता है कि चीजों के एक समूह को यदि छोटे–छोटे उपसमूहों में बांट दिया जाए तो भी उनकी संख्या या मात्रा संरक्षित रहती है। पियाजे के अनुसार चीजों का संरक्षण बच्चा **मूर्त संक्रियात्मक अवस्था** में पहुँचने के बाद ही कर पाता है। संरक्षण की यह समझ जिसमें प्रक्रिया/विचार आदि को क्रमवार याद रखना व उन्हें कदम दर कदम उलट कर देख पाना संरक्षण के लिए आवश्यक है। उदाहरण के लिए एक चौड़े गिलास में रखा पानी पतले गिलास में डालने पर बढ नहीं जाता समझ पाने के लिए बच्चे को पानी की अभी की स्थिति को नज़रअंदाज करते हुए यह याद करना होगा कि पानी पहले कहाँ था। क्या उसमें कुछ जोड़ा गया है आदि। तभी वह कह पाएगा कि वापस उसी चौड़े गिलास में डालने पर उसका तल वही हो जाएगा जो पहले था। यह सब कर पाना इस अवस्था के बच्चे के सोच में एक अहम् बदलाव लाता है।

छह या सात साल की उम्र में बच्चे चीजों के दो समूहों को गिन कर उनकी तुलना कर सकते हैं। वे चीजों को जोड़ने और घटाने जैसे ज्यादा मुश्किल काम भी कर सकते हैं। यह संक्रिया उनके सोच का स्वाभाविक हिस्सा बन रही होती है, लेकिन अभी भी वे अर्मूत स्तर पर नहीं सोच पाते। सात से दस साल के बच्चों की सोच मुख्य रूप से चीजों के साथ ही जुड़ी होती है। वे सरंक्षण और गणित की अन्य मूल अवधारणाओं को सहज रूप से समझ सकते हैं लेकिन यह समझ मूर्त संक्रियाओं पर ही आधारित होती है। इसलिए पियाजे इस अवस्था को 'मूर्त संक्रियात्मक अवस्था' कहते हैं।

इसलिए अगर इस अवस्था के बच्चों को जोड़ने का सवाल दिया जाए तो वे समूहों की चीजों को गिनकर जोड़ना पसन्द करते हैं, न कि उनके संख्यांकों को। वे ऐसा इसलिए करते हैं क्योंकि उन्हें प्रतीकात्मक संक्रियाओं के मुकाबले अपनी सहज समझ और ठोस अनुभवों पर ज्यादा भरोसा होता है।

जैसे– छह साल की कविता ने घटाव का सवाल इस तरह से किया–

$$\begin{array}{r} 31 \\ \underline{-16} \\ \underline{25} \end{array}$$

जब उससे पूछा गया कि यह उसने कैसे किया, तो उसने समझाया, "6 में से 1 निकाला तो 5 बचे, और 3 में से 1 निकाला तो 2 बचे।" यह पूछने पर कि क्या उसका जवाब सही

है, उसने कहा कि उसे नहीं मालूम। लेकिन जब उसे कहा गया कि वह अपने तरीके से 31 में से 16 घटाये तो उसने सही जवाब (15) निकाला। उसने यह भी बताया कि उसने इस सवाल को अलग तरीके से हल किया। इसी तरह 8 साल का अमित भाग का सवाल (45÷3) नहीं कर सका, लेकिन 45 मिठाइयों को 3 लोगों में बराबर–बराबर आसानी से बांट सका। जोड़ने, घटाने में लाइन/टैली लगा कर करना इसीलिए इस अवस्था के बच्चों के लिए आसान होता है। औपचारिक तरीकों से सीखने में अक्सर बच्चों को दिक्कत होती है। इस अवस्था के बच्चों के लिए औपचारिक तरीके अमूर्त होते हैं और उनकी अमूर्तताओं व विचारों के क्रम को याद रख पाने की क्षमताओं के हिसाब से कहीं ज्यादा अमूर्त होते हैं। अगर सवालों को बच्चों के जीवन के अनुभवों से सरल तरीके से जोड़ा जाए तो वे उन्हें सहज रूप से समझ पाते हैं, और उन को अपने उन तरीकों से हल कर लेते हैं, जो वे सामान्यतः इस्तेमाल करते हैं।

कई शोधकर्त्ता प्राइमरी स्कूल की शुरूआत में औपचारिक अंकगणित करने में बच्चों को आने वाली मुश्किलों का एक और कारण बताते हैं। वे कहते है कि औपचारिक अंकगणित में भाग को छोड़ सभी संक्रियाएं दायीं से बायीं ओर की जाती हैं, जबकि संख्याएँ पढ़ना हो या हिन्दी या अंग्रेजी सभी बाएँ से दाएँ ओर पढ़ी जाती है। संख्या पढ़ने में तो पहले दाएँ से बाएँ आना होता है और फिर बाएँ से दाएँ उसे समझते हुए पढ़ना होता है। इस वजह से प्राइमरी स्कूल के कई बच्चे संक्रियाओं को बाईं से दाईं ओर कर देते है और संख्या को नहीं पढ़ पाते। इसलिए यह आवश्यक है कि बच्चों को अंकगणित सीखने के साथ–साथ यह भी अभ्यास हो कि किसी संख्या या चिन्ह की सही जगह क्या है।

विकास की अंतिम अवस्था, प्राइमरी स्कूल के बाद, यानी 11 साल के बाद होती है। इस अवस्था में बच्चे **औपचारिक संक्रियाओं** को लागू करने लग जाते हैं। अब वे चीजों या उनकी मात्रा को दिखाने के लिए प्रतीकों और शब्दों का इस्तेमाल कर सकते हैं। उनमें परिकल्पनात्मक कथनों को समझने, उनको इस्तेमाल करने और उनमें तर्क संगत संबंधों को खोजने की योग्यता भी आ जाती है। इस अवस्था में बच्चों में बीजगणितीय समीकरण, समानुपात चर, आदि अमूर्त अवधारणाओं को समझ पाने की क्षमता कुछ हद तक विकसित हो जाती है। यह विकास कितना हुआ यह बहुत सी बातों पर निर्भर करता है कि उसका औपचारिक संक्रियात्मक सोच कितना विकसित हो पाया है।

प्राइमरी स्कूल के बच्चों द्वारा गणितीय अवधारणाओं को सीखने में एक बड़ी दिक्कत यह है कि आम तौर पर उन्हें उन अवधारणाओं के अनुरूप मूर्त उदाहरण नहीं दिए जाते। प्राइमरी स्कूल के स्तर पर गणित सिखाने की जो पद्धति आजकल अपनायी जाती है, वह औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था के बच्चों के लिए ज्यादा सही है। लेकिन इस स्तर पर पहुँचने के लिए गणित की अवधारणाओं को सीखने और गणित में कुशलता हासिल करने के लिए बच्चों को सीखने के ठोस और अर्थपूर्ण अनुभव होने जरूरी होते हैं।

क्रियाकलाप

बच्चों के बारे में नीचे दिए कथनों में से कौन से कथन सही है ? सही कथनों के लिए (√) और गलत के लिए (×) लिखें। अपने चयन के कारण भी दें।

(क) प्राथमिक विद्यालय के अधिकांश बच्चे मूर्त संक्रियात्मक अवस्था में होते हैं।

(ख) संख्या को समझने के लिए, बच्चों को वर्गीकरण और क्रम समझ में आना चाहिए।

(ग) पूर्व–संक्रियात्मक सोच प्राइमरी स्कूल के बच्चों का लक्षण है।

(घ) गणितीय समझ के विकास में, संरक्षण करने की क्षमता की एक मूलभूत भूमिका है।

इस भाग में हमने देखा है कि बच्चे उम्र के हिसाब से विकास की अलग–अलग अवस्थाओं में होते हैं। इसका मतलब यह नहीं कि 9 साल की बच्ची किन्हीं पहलूओं में भी औपचारिक संक्रियात्मक अवस्था की क्षमता तक नहीं पहुँची हो सकती या 6 साल की कोई बच्ची पूर्व–संक्रियात्मक अवस्था की क्षमता नहीं दिखा सकती। यह अवस्थाएँ व बच्चों को इनमें रखना मोटी समझ पर आधारित है। ऐसा नहीं है कि हर बच्चा हर पहलू में इस विवरण के आधार पर ठीक बैठे।

हम यह कह सकते हैं कि हालांकि सभी बच्चे मोटे तौर पर विकास की अवस्थाओं से एक ही क्रम में गुजरते हैं, लेकिन इसकी प्रक्रिया व गति हर बच्चे के लिए अलग अलग होती है। यह फर्क बच्चों के व्यक्तिगत गुणों, जैसे कि उनकी बौद्धिक क्षमता, रवैये आदि में फर्क के रूप में सामने आता है। अलग–अलग अनुभव, सामाजिक, आर्थिक और सांस्कृतिक परिस्थितियाँ भी क्षमताओं के विकास पर असर डालती है। यह एक आम बात है कि एक फेरी वाला 6 या 7 साल का बच्चा जल्दी से तीन–चार चीजों के दाम जोड़ लेता है या गांवों में लड़कियों में अनुपात, द्रव्यमान के संरक्षण और कई गणितीय अवधारणाओं की सहज समझ जल्दी बनती है क्योंकि वे कई काम करती हैं जिनसे उन्हें यह अनुभव मिलता है। यह बात उतनी ही उम्र के शहरी मध्यवर्गीय बच्चों या गांव के ही लड़कों पर लागू नहीं होती।

सामाजिक, सांस्कृतिक और आर्थिक पहलुओं के अलावा, मनोवैज्ञानिक पहलू से भी बच्चों के व्यवहार व क्षमताओं में विविधता होती है। यह बात उन तरीकों में अक्सर झलकती है जो बच्ची नई अवधारणाओं को समझने के लिए अपनाती है। उदाहरण के लिए, जोड़ सीखते वक्त शुरू में बच्चे 'सभी गिनने के' और कुछ बच्चे पहले से ही 'आगे गिनने का तरीका अपनाते हैं। जैसे–जैसे बच्चे बड़े होते जाते हैं वैसे–वैसे ही वे अधिक दक्ष तरीकों का इस्तेमाल करना सीखते रहते हैं। ज्यादा बड़े व अनुभवी बच्चों में से कुछ पांच–पांच के समूह बनाकर, तो कुछ तीन–तीन या दस–दस के समूह बना कर चीजों को गिनने लगते हैं।

हमें अपने घर के व कक्षा के बच्चों को ध्यान से देखना, समझना चाहिए और उस अवलोकन के आधार पर उनकी क्षमताओं की समझ बनानी चाहिए। यह तो ठीक है कि मोटे तौर पर उम्र के अनुसार क्षमता का अनुमान लगा सकते हैं किन्तु इस को बच्चे का अवलोकन कर ही ठीक से समझा जा सकता है। किसी भी वक्त पर आप बच्चों से जो भी करवाना चाहते हों या जो भी अभ्यास उन्हें देना चाहते हों, वे उस वक्त पर उनकी क्षमता के मुताबिक होने चाहिए। इसका अर्थ यह कि न तो वह उनके लिए अत्यधिक सरल हो और न ही ऐसे जिन्हें कर पाना ही संभव नहीं। वह उसकी तात्कालिक क्षमता से थोड़ा ही अधिक हो। इसका अर्थ यह है कि मूल संक्रियात्मक अवस्था में आने वाले बच्चे को ऐसे कार्य मिलें जो उसे अगले स्तर में जाने में मदद करें।

ये अवस्थाएं एक सीढ़ी के पायदानों की तरह हैं – हम एक पायदान पर कदम रख कर ही दूसरे पर चढ़ सकते हैं। हालांकि ये पायदान एक दूसरे से साफ तौर पर अलग भी दिखते हैं। किन्तु जैसा पहले भी कहा– यथार्थ में ये इतने अलग–अलग नहीं है। मिसाल के तौर पर, जब एक बच्ची गिनती का संरक्षण सीखने की कोशिश कर रही होती है, तो साथ ही साथ वह क्षेत्रफल या आयतन का संरक्षण भी सीख रही होती है। साथ ही वह चीजों और संख्याओं को क्रमबद्ध करना भी सीख रही होती है। जब वह दो समूहों की तुलना एक–एक की संगति से करने की कोशिश कर रही होती है, तो हो सकता है कि वह साथ–साथ गिनती भी सीख रही हो। इन अवस्थाओं की अहमियत सिर्फ इतनी है कि वे बच्चों को समझने में बड़ों की भी मदद करती हैं। साथ ही इनसे पाठ्यक्रम की विषय वस्तु और उसे पढ़ाने के ढंग को तय करने में भी मदद मिलती है।

एक शिक्षक को सीखने वालों के विकास की अवस्था और उनके परिवेश के मुताबिक ही उन्हें सिखाना चाहिए व सिखाते समय बच्चों के विकास के आम पैटर्न की जानकारी के साथ–साथ व्यक्तिगत समझ भी रखनी चाहिए।

प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने के उद्देश्य

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा - 2005 के संदर्भ में

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा– 2005 में गणित अध्ययन का आधार स्थानीय परिवेश को मानने के साथ–साथ बच्चे को ज्ञान का सृजनकर्ता माना गया है। गणित के शिक्षण के स्वरूप में परिवर्तन के साथ–साथ उसकी शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया व पाठ्यक्रम में भी बदलाव आया है। अब गणित का ज्ञान केवल प्रक्रियात्मक रूप में सूत्रों को रटा देना एवं प्रश्न हल कर देना नहीं, अपितु गणित की अवधारणाओं की समझ विकसित करना हो गया है जिसमें अध्यापक की भूमिका एक संचालक व मार्गदर्शक की हो गई है। विधार्थी को स्वयं क्रियाकलाप करके सीखने के लिए प्रेरित किया जाने लगा है।

इस प्रकार गणित शिक्षण का मुख्य उदेश्य बच्चों की गणितीयकरण की क्षमताओं का विकास करना है अर्थात बच्चे तार्किक ढंग से सोच सकें, अमूर्तनों का निर्माण करें एवं उनमें समस्या सुलझाने की क्षमता का विकास हो।

प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने के दो लक्ष्य हैंः– एक सीमित जिसके अंतर्गत 'लाभप्रद' क्षमताओं का विकास, विशेषकर अंक ज्ञान, संख्या से जुड़ी क्षमताएं, सांख्यिक संक्रियाएँ, माप, दशमलव व प्रतिशत इत्यादि। दूसरा व्यापक लक्ष्य है बच्चों के साधनों को विकसित करना ताकि वह गणितीय ढंग से सोच सके व तर्क कर सके, मान्यताओं के तार्किक परिणाम निकाल सके और अमूर्त को समझ सके। इसके अंतर्गत चीजों को करने और समस्याओं को सूत्रबध करने व उनका हल ढूँढने की क्षमता का विकास करना आता है।

बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2008, के संदर्भ में

गणित हर जगह है और अपने दैनिक जीवन में इसका उपयोग हम सभी करते हैं। फलतः आवश्यकता है कि गणित की शिक्षा बिना बोझ के आनंदमयी रूप से दी जाए। गणित के दो पक्ष होते हैं। पहला पक्ष हमें माप, गणना तथा समस्या समाधान, परिशुद्धता तथा पूर्णता सिखाता है। इससे हम वास्तविक जीवन की विविध परिस्थितियों को अधिक संवेदनशील तरीके से समझा एवं व्याख्यायित कर पाते हैं। दूसरा पक्ष हमारे तार्किक पक्ष बोध और विश्लेषण क्षमता को विकसित करता है। गणित की अपनी शब्दावली और भाषा होती है। किसी वास्तविक और काल्पनिक समस्या को गणितीय भाषा में व्यक्त करने से उसका समाधान और सत्यापन स्पष्ट और आसान हो जाता है। हालांकि तर्क का अनुप्रयोग और किसी वास्तविक या काल्पनिक समस्या के यथार्थ की जाँच उसकी तार्किक परिणति के लिए व्यवस्थित रूप से की जाती है, लेकिन अपनी अमूर्त अवधारणाओं तथा संरचनाओं के जरिए गणित अपने खुद के जगत का भी निर्माण करता है।

बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा– 2008 मे प्राथमिक स्तर पर विधार्थियों के लिए गणित सीखने के निम्नांकित लक्ष्य हैंः–

- गणित के प्रयोग एवं महत्त्व को सीखना–समझना।
- अपनी योग्यता के प्रति आश्वस्त होना और आत्मविश्वास के साथ समस्या समाधान के लिए प्रयास करना।
- गणितीय अवधाड़नाओं का समुचित उपयोग कर पाना।
- गणितीय आधार पर संवाद संप्रेषण सीखना।
- गणितीय आधार पर तर्क करना सीखना।
- गणित का जीवन स्तर में सुधार का एक माध्यम के रूप में इस्तेमाल समझना।
- गणित विषय के आंतरिक स्वरूप को समझना। गणितीय चर्चा एवं गणना में आनंद प्राप्त करना।

साथ ही बी0 सी0 एफ0–2008 में गतिविधि आधारित गणित शिक्षण पर काफी जोर दिया गया है। गणित में अवधारणा निर्माण के लिए विविध उपकरणों का प्रयोग करना सिखाना एवं विभिन्न गतिविधियों में बच्चों को शामिल करना ज्यादा उपयोगी होगा। इसके अतिरिक्त कुछ महान गणितज्ञों के जीवन व कार्यों के बारे में विधार्थियों को बताकर भी गणित शिक्षण को अधिक आनंदमयी और अभिप्रेरक बनाया जा सकता है। गणितीय विचारों एवं अवधारनाओं के विकास की कहानी भी उनके लिए बहुत दिलचस्प और अभिप्रेरक हो सकती है।

शिक्षक को विधार्थियों के समक्ष सुनियोजित तथा अच्छी तरह सूत्रबद्ध गणितीय विचार तथा प्रयोगों को उनके अनुप्रयोगों के साथ रखना चाहिए। चुनौतीपूर्ण समस्याओं का

समाधान प्रस्तुत करने तथा अन्य गतिविधियों यथा– गणित प्रश्नोत्तरी, गणित क्लब, विधार्थियों के वार्तालाप, संगोष्ठियाँ, गणित प्रयोगशाला, व्यावहारिक प्रत्यक्ष अनुभव के द्वारा शिक्षार्थियों में गणित के प्रति रूचि पैदा करने की कोशिश करनी चाहिए।

प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने का उद्देश्य एनसीएफटीई–2009 के संदर्भ में

अध्यापक शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा एनसीएफटीई–2009 ने बाल केंद्रित व संदर्भजन्य शिक्षा, दोनों पर विशेष बल देते हुए एक नए शिक्षक की रूपरेखा को प्रस्तुत किया है। बिहार में प्रारंभिक शिक्षा के लिए अध्यापक शिक्षा एवं शिक्षक प्रशिक्षण की रूपरेखा का निर्माण शिक्षा की गुणवत्ता को बढ़ाने के लिए बड़ी तादाद में प्रशिक्षित व योग्य शिक्षकों की आवश्यकता महसूस की गई जरूरतों को पूरा करने का अनिवार्य कदम है। नयी शिक्षायी जरूरतों और सामाजिक–आर्थिक बदलाव से मुकाबला करने के लिए शिक्षक की सामाजिक– सांस्कृतिक और अकादमिक भूमिका में बदलाव अपेक्षित है।

गतिविधि आधारित, सहभागितापूर्ण शिक्षण अनुभवों, खेल परियोजना कार्य, वाद–विवाद, अवलोकन, भ्रमण इत्यादि के माध्यम से उत्पादक कार्यों द्वारा अकादमिक शिक्षण को संगठित करने हेतु शिक्षकों को प्रशिक्षित किए जाने की आवश्यकता है। यह भी जरूरी है कि शिक्षक पाठ्यक्रम, एवं पाठ्यपुस्तकों का विवेचमापूर्ण परीक्षण करें न कि इन्हें बिना किसी सवाल के प्रदत्त की तरह स्वीकार करें।

गणित शिक्षण में जमीनी अनुभव देना आवश्यक है ताकि बच्चों को ज्ञान एक बाहरी वस्तु नहीं लगे बल्कि अकादमिक ज्ञान एवं व्यावहारिक ज्ञान को एकीकृत कर उसका सम्यक उपयोग कर सकें। इस प्रकार शिक्षक को सैद्धांतिक पाठों के माध्यम से पढ़ाने की बजाय बच्चों के वास्तविक संदर्भों में शिक्षण देने की जरूरत है। शिक्षक को यह पता होना चाहिए कि बच्चों की मनोसामाजिक आवश्यकताएं क्या हैं, उनकी विशेषं योग्यतायें एव विशिष्टताएँ क्या हैं, उनकी ग्राह्य क्षमता की प्राथमिकता, अभिप्रेरणा एवं घर से लेकर समुदाय, समाजीकरण का परिणाम क्या है?

प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण में हमारे रोजमर्रा के अनुभवों के साथ संबंध जोड़ा जाए तो गणित की कक्षायी प्रक्रिया में बहुत बदलाव आएगा। अच्छे शिक्षक के लिए गणित की अवधारणाओं की समझ होनी चाहिए। इसके लिए प्राथमिक स्तर के शिक्षकों में कक्षा शिक्षण के लिए विषयगत तैयारी तथा बच्चों एवं उनके गणित सीखने की प्रक्रिया की समझ विकसित होनी चाहिए। एनसीएफटीई 2009 ने इन सभी बातों को ध्यानगत करते हुए पाठ्यपुस्तक विकास की बात की है। उपर्युक्त तथ्यों के समावेश के आधार पर ही विकसित पाठ्यपुस्तक वास्तविक रुप से अवधारणात्मक ज्ञान देने में सक्षम हो सकेगी। हम जानते हैं कि बिहार पाठ्यपुस्तक विकास समिति एससीईआरटी पटना के तत्वाधान में उपर्युक्त सारे तथ्यों को ध्यान में रखकर गतिविधि आधारित एवं खोजपरक पाठ्यपुस्तकों का विकास किया गया है ताकि बच्चे स्वंय अपने ज्ञान का सृजन करने में सहायक हो सकें।

गणितः आधार पत्र–2006 (एन.सी.ई.आर.टी.) के विशेष संदर्भ मे

स्कूली शिक्षा बच्चों का विधिक अधिकार है और गणित अध्ययन विद्यालय में एक अनिवार्य विषय है। इस कारण गुणवत्तापूर्ण गणित शिक्षा पाना प्रत्येक बच्चे का अधिकार बनता है। हम चाहते हैं की गणित शिक्षा सभी बच्चे पायें और साथ ही आनंदायक हो। इसका आशय है कि गणित शिक्षा बच्चे की जीवंत वास्तविकताओं में स्थित हो और हम गणित विषय की अपेक्षा बच्चे की गणितीय सोच को ज्यादा अहमियत दें।

विधालयों में गणित शिक्षा का मुख्य उद्देश्य है बच्चों की सोच का गणितीयकरण करना। डेविड व्हीलर के शब्दों में, "बहुत सारे गणित जानने के बजाय यह जानना अधिक उपयोगी है कि गणितीयकरण कैसे किया जाए।" जार्ज पोल्या के अनुसार हम स्कूली शिक्षा के दो तरह के उद्देशों के बारे में सोच सकते हैं –

पहला, अच्छा और संकीर्ण उद्देश्य है– रोजगार योग्य ऐसे व्यस्कों का निर्माण करना जो सामाजिक और आर्थिक विकास में योगदान दे सके, और

दूसरा, ऊँचा उद्देश्य है– बढ़ते बच्चे के आंतरिक संसाधनों का विकास करना।

स्कूली गणित में पहला उद्देश्य मुख्यतः संख्यात्मकता से संबंधित है। प्राथमिक स्कूल संख्या और उनपर संक्रियाएँ, मात्राओं का मापन, भिन्न, प्रतिशत और अनुपात सिखाते हैंः यह सभी संख्यात्मकता के लिए महत्तवपूर्ण है।

दूसरी ओर, बच्चे के आंतरिक संसाधनों के विकास में जो भूमिका गणित निभा सकता है वो है सोच (चिंतन) का विकास करना। सोचने के कई तरीके हैं, और जिस तरह की योग्यता कोई गणित में सीखता है वह है, अमूर्त विचारों के साथ काम करना। साथ ही गणित कार्य करने की विधियाँ देता है, गणितीय समस्याओं को हल करने की योग्यता प्रदान करता है और ज्यादा सामान्य रूप में, समस्या समाधान के लिए सही अभिवृत्ति और सभी प्रकार की समस्याओं को व्यवस्थित रूप से हल करने की योग्यता भी देता है।

गणित आधार पत्र– 2006 के अनुसार स्कूली गणित निम्न परिस्थितियों में सीखा जाना चाहिएः–

1. बच्चे गणित में आनंद लेना सीखेंः– यह एक महत्त्वपूर्ण लक्ष्य है जो कि इस आधार वाक्य पर आधारित है कि गणित का जीवन भर उपयोग और आनंद लिया जा सकता है और इसलिए इस प्रकार का स्वाद पैदा करने के लिए स्कूल उचित जगह है। निचली कक्षाओं में यह महत्त्वपूर्ण है कि पहले चरण में मूर्त वस्तुओं पर आधारित गतिविधियाँ दी जाए जिससे बच्चा अपने दैनिक जीवन की तार्किक क्रियाओं व गणितीय चिंतन के बीच के संबंधों को आनंदपूर्वक समझ सके। इसमें संख्याओं से जुड़े गणितीय खेल, पहेलियाँ तथा कथाएँ सहायक हो सकती हैं।
2. बच्चे महत्वपूर्ण गणित सीखेंः– गणित को सूत्रों और यांत्रिक क्रियाओं तक सीमित रखना बहुत नुकसान पहुँचाता है। किसी गणितीय तकनीक का कहाँ तथा कैसे उपयोग करना है, इस चीज को समझना ज्यादा महत्त्वपूर्ण है न कि उस तकनीक को याद रखना। स्कूल को ऐसी समझ पैदा करने की जरूरत है।
3. गणित बच्चों के जीवन अनुभव का हिस्सा होः– बच्चे गणित को इस रूप में देखें कि इसके बारे में वे बात करें, संप्रेषण करें, आपस में चर्चा करें, और उस पर मिलकर कार्य करें। गणित को बच्चों के जीवनानुभवों का एक अंश बनाना सबसे अच्छी गणित शिक्षा है।
4. बच्चे अर्थपूर्ण गणितीय समस्याएँ प्रस्तुत करें तथा हल ढूंढेंः– स्कूल में गणित ऐसा क्षेत्र है जो औपचारिक रूप से सवाल हल करने कि कुशलता पर केन्द्रित है। यदि इसे किसी के जीवन में उपयोग में आने वाली एक योग्यता के रूप में समझें तो स्कूल में सीखी गई तकनीक और विधियों का महत्त्व बढ़ जाता है। गणित रुचिपूर्ण समस्याएँ बनाने का भी अवसर देता है और नए संवाद निर्मित करता है।
5. बच्चे संबंधों और संरचनाओ ंकी सोच बनाने में अमूर्त विचारों का प्रयोग करेंः– बच्चे संबंधों को समझने में, संरचना को देखने, वस्तुओं के बारे में तर्क करने में, कथनों कि सत्यता या असत्यता पर तर्क करने में, अमूर्तनों का प्रयोग करें। तार्किक चिंतन महान उपहार है जो गणित हमें प्रदान कर सकता है और इस प्रकार के विचार तथा संप्रेषण की आदतें बच्चों में विकसित करना गणित शिक्षा का मुख्य उद्देश्य है।
6. बच्चे गणित की मूल संरचना को समझेंः – प्राथमिक स्तर पर अंकगणित स्कूली गणित के मुख्य क्षेत्र है जो अमूर्तीकरण, संरचना निर्माण और सामान्यीकरण की क्रियाविधि प्रदान करते हैं एवं हमारी प्रवृतियों को अद्वितीय रूप से निखारते हैं।
7. शिक्षक कक्षा में हर विद्यार्थी के शैक्षिक गतिविधियों से जुड़ाव की अपेक्षा रखेंः– शिक्षकों से अपेक्षा है कि वे प्रत्येक बच्चे को कक्षा की प्रक्रियाओं के साथ जोड़ कर रख सकें। इससे कम पर समझौता करने का मतलब होता है कि वो भविष्य में विद्यार्थियों को व्यवस्थित विलगाव की ओर ले जायेगा। मेधावी बच्चों को उनके स्तर के अनुकूल चुनौतियाँ प्रदान करते हुए सभी बच्चों की सहभागिता सुनिश्चित करना खुद में एक चुनौती है। इसके लिए अध्यापकों को साधन और संसाधनों से लैस रहना होगा।

बिहार के प्राथमिक स्तर के गणित का पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तकें

बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2008 को दृष्टि में रखकर गणित विषय के लिए विकसित पाठ्यक्रम में इस बात का विशेष ध्यान रखा गया है कि बच्चे गणित में पारंगतता हासिल करने के साथ–साथ अर्थपूर्ण हल पेश कर सकें। अपेक्षा की जाती है कि पाठ्यक्रम का अनुकरण कर शिक्षक बच्चों में निर्दिष्ट अवधारणाओं की संप्राप्ति करने में सफल हो सकेंगे विकसित गणित विषय का पाठ्यक्रम बच्चों के गणितीयकरण की क्षमता विकास के साथ–साथ उन्हें समस्या समाधान करने एवं आनंद अनुभव का साधन बनाने में सहायक हैं। उपलब्ध पाठ्यक्रम को प्रशिक्षुओं में आत्मसात कराने हेतु निम्नांकित गतिविधि की जा सकती है। प्रशिक्षुओं की कुल संख्या अनुसार पांच समूह बना लें। डायट प्रशिक्षण संस्थान में उपलब्ध वर्ग 1 से 5 तक की कक्षाओं की पाठ्यपुस्तकों को वर्ग वार शिक्षक–प्रशिक्षुओं के समूहों में वितरित कर अध्ययन कराएं तथा अध्ययनोपरांत आपसी समीक्षा कर पाठ्यक्रम की समझ विकसित करते हुए वर्गावार पाठ्यक्रम का समेकित अवधारणात्मक रूप व्यक्त करने को कहें। उदाहरणार्थ पाठ्यक्रम का एक अवधारणात्मक रूप निम्नांकित है:–

पाठ्यक्रम

पाठ्यक्रम के महत्वपूर्ण बिंदु

वर्ग 1

- आकृतियाँ एवं उनके शीर्ष–तल, ऊपर–नीचे, बाहर–भीतर, पहले–बाद इत्यादि की समझ।
- विभिन्न वस्तुएँ एकत्र करना, वजन तथा आकार के आधार पर वस्तुओं का वर्गीकरण कर सकना।
- नजदीक– दूर, पतला– मोटा, लंबा– छोटा, ऊंचा– नीचा लंबाई की तुलना कर सकना।
- 0 से 99 तक संख्याओं की समझ होना।
- जोड–़ घटाव के संकेतों की समझ होना।
- 0 से 99 तक की संख्याओं को क्रमवार लिखना, गिनना तथा तुलना करना तथा उन्हें समूह में सजा सकना।
- इकाई– दहाई के समूह को चित्र द्वारा दर्शाना।
- 99 तक योगफल वाली जोड़ करना।
- 20 तक अंकों की सहायता से घटाव करना।
- दो अंकों की संख्याओं को मौखिक जोड़ना।
- एक अंक वाली संख्या को मौखिक घटाना।
- नोट एवं सिक्के की पहचान, समान नोटों को अलग–अलग समूह में रखना, ₹50 तक की मुद्रा को जोड़ना घटाना।
- अमानक रूप में लंबाई तथा गोलाई की माप करना।
- बदलते मौसम की समझ होना।
- एक दिन की घटना को क्रम से बताना।
- विभिन्न प्रकार की वस्तुओं की क्रमबद्धता एवं ढाँचे की पहचान होना।

वर्ग 2

- आयत, त्रिभुज, वृत्त, घनाभ, शंकु एवं गोल आकृतियों को नाम से जानना तथा वैसी वस्तुओं का निरीक्षण कर ज्यामितीय गुणों को बता पाना।
- सीधी एवं टेढी रेखाएं मुक्त हाथ से खींचना तथा उनमें अंतर कर पाना।
- 200 तक संख्या पढ़ना तथा लिखना।
- 200 तक की संख्याओं का स्थानीय मान के साथ विस्तार करना समझना।
- 200 तक की संख्याओं को बढ़ते घटते क्रम में लिखना।
- चित्र के आधार पर इकाई दहाई को जोड़ना।
- दो अंको की संख्याओं को जोड़ना एवं घटाना (ऊर्ध्वाधर एवं क्षैतिज)
- किसी संख्या में 0 जोड़ना घटाना।
- मौखिक जोड– घटाव करना।
- बारंबार जोड़ने की क्रिया के रूप में गुणा की समझ।
- बारंबार घटाने की क्रिया के रूप में भाग की समझ।
- एक अंकीय संख्याओं का मौखिक जोड़ करना।
- 10 के गुणजों को बिना लिखे जोड़ना घटाना।
- मुद्रा की छोटी मात्रा को मन में जोड़ कर बताना।
- नोटों का उपयोग करते हुए किसी भी मात्रा का लेनदेन करना।
- लंबे एवं छोटे रास्ते की तुलना कर पाना।
- साधारण तुला की सहायता से 2 वस्तुओं के भार की तुलना करना।
- बाटों की पहचान होना।
- धारिता, आयतन की तुलना करना।
- सप्ताह के दिन महीनों से परिचित होना।
- घड़ी देखकर समय बताना।
- दिन तथा तिथियों की दृष्टि से घटनाओं का क्रम बताना।
- वर्ग के बच्चों/दोस्तों के आँकड़े लेना तथा आँकड़ों के आधार पर निष्कर्ष निकालना।
- साधारण आंकड़ों का पैटर्न समझना।
- ब्लाक का पैटर्न समझना।
- संख्या को तोड़कर पैटर्न समझना।

वर्ग 3

- आयत तथा वर्ग के कोण, कर्ण तथा भुजा के संबंध जानना।
- कागज मोड़कर/ काटकर ज्यामितीय आकृतियों का निर्माण करना।
- सरल रेखा से बने नक्शे की दूरी एवं दिशा की समझ होना।
- 3 अंकों की संख्याओं को पहचानना, समझना, स्थानीय मान के आधार पर विस्तार करना तथा गिनकर संख्याओं की तुलना करना।
- तीन अंकों का उर्धवाधर तथा क्षैतिज जोड़–घटाव करना।
- जोड़ घटाव संबंधी व्यवहारिक समस्याओं को हल करना।
- 2 से 10 तक गुणन सारणी बनाना।
- गुणा का उपयोग करना।

- मानक पद्धति से गुणा करना।
- एक समान समूह तथा बंटवारे के संदर्भ में भाग का अर्थ समझना।
- गुणा तथा भाग के संबंध की समझ।
- 10 तथा 100 के गुणज को मानसिक रूप से जोड़ने तथा घटाने की समझ, गुणा के बंटन नियम को जानना एवं उपयोग करना।
- रोमन संख्याओं के चिन्हों की पहचान करना।
- किसी पूर्ण संख्या का आधा, चौथाई तथा तीन चौथाई की समझ होना।
- रुपए तथा पैसे को आपस में बदलना।
- मूल्य/दर तालिका के आधार पर बिल बनाना।
- लंबाई की मानक इकाई में माप तथा तुलना करने की समझ होना।
- सेंटीमीटर तथा मीटर के संबंध की समझ।
- मानक इकाई में भार का मापन तथा तुलना करने की समझ होना।
- ग्राम तथा किलोग्राम में संबंध की समझ।
- मानक इकाइयों के संदर्भ में आयतन की माप एवं तुलना की समझ होना।
- मिलीलीटर तथा लीटर में संबंध की समझ।
- कैलेंडर देखने की समझ होना।
- घटनाओं को कालक्रम के अनुसार सजाने की समझ होना।
- आंकड़ों का संकलन करना तथा दंड आलेख में निरूपण करना।
- आंकड़ों से निष्कर्ष निकालने की समझ होना।
- सममित आकृतियों की पहचान।
- रेखाओं तथा ज्यामितीय आकृतियों से पैटर्न बनाने की समझ होना।
- सम तथा विषम संख्याओं के जोड़ के ढाँचे की पहचान होना।
- वातावरण में पैटर्न की पहचान होना।

वर्ग 4

- मुक्त हाथ से/ टैनग्राम की सहायता से आकृतियों का निर्माण।
- त्रिविमीय आकृतियों के तल तथा किनारों की समझ।
- वृत्त, केंद्र, त्रिज्या तथा व्यास की समझ।
- उदर्ग तथा क्षैतिज तरीके से 3 अंकों वाली संख्याओं का गुणा।
- एक अंक से भाग की प्रक्रिया की समझ होना।
- जीवन से जुड़ी परिस्थितियों में जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग का प्रयोग करना।
- 10 तथा 100 के गुणजों का जोड़–घटाव कर सकना।
- गुणा के बंटन नियम की समझ होना उदाहरण के लिए $6 \times 7 = 6 \times (3 + 4) = 6 \times 3 + 6 \times 4$
- रोमन संख्याओं की पहचान कर सकना।
- 2 बटा 4, 1 बटा 2, 2 बटा 3,3 बटा 3, 4 बटे 4 एवं समतुल्य भिन्न की समझ।
- 1 बटा 10 ,1 बटा 100 तथा 1 बटा 1000 की समझ होना।
- रुपए को पैसों में बदलना।
- रुपए पैसों का जोड़ घटाव करना।
- इकाई खर्च/ कुल खर्च का हिसाब कर सकना।

- खुदरा प्राप्त करना।
- मीटर सेंटीमीटर का संबंध जानना।
- लंबाई तथा दूरी से संबंधित समस्याएं हल करना।
- ग्राम किलोग्राम में माप करने की समझ होना।
- तराजू तथा मानक इकाइयों का उपयोग कर वस्तुओं को तौल कर तुलना करने की समझ होना।
- भारों का योग तथा अंतर निकालने की समझ होना।
- आयतन मापने की समझ होना।
- मिलीलीटर तथा लीटर में माप करने की समझ होना।
- वर्ष भर में दिन, महीने, सप्ताह की समझ होना।
- महीने तथा दिनों में संबंध की समझ होना।
- घंटा मिनट में संबंध समझना।
- आंकड़ों का वर्गीकरण।
- दंड आलेख।
- पूर्वाहन तथा अपराह्न की समझ होना।
- दो तिथियों के बीच दिनों की गणना कर सकना।
- गुणा भाग के ढांचे को पहचानना जैसे $7 \times 100 = 700$, $6 \times 100 = 600$ इसी तरह $2 \times 100 = 200$
- सममिति आधारित ज्यामितीय ढाँचों की पहचान।

वर्ग 5

- त्रिविमीय आकृतियों का चित्रण कर सकना।
- कोण की समझ, न्यून कोण, समकोण तथा अधिक कोण की समझ तथा निरूपण करना।
- त्रिविमीय आकृतियों की सममिति की समझ होना।
- 1000 से 10000 तक की संख्याओं में स्थानीय मान का पता लगाना।
- चार अंको की संख्याओं का जोड़ घटाव।
- भाजक भाज्य तथा गुणक का अर्थ समझना।
- भाज्य एवं भागफल में संबंध समझना।
- योगफल, घटावफल, गुणनफल तथा भागफल का आकलन करना तथा सन्निकटीकरण के आधार पर आकलन करना।
- 11 से 20 तक पहाड़ा सीखना।
- भिन्नों की तुलना करना।
- सामान्य भिन्न को दशमलव भिन्न में बदलना।
- मुद्रा से संबंधित प्रश्नों के हल करने के लिए चारों संक्रियाओं का उपयोग करना।
- ज्यामिति या आकृतियों के परिमिति की समझ होना।
- ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल की समझ होना।
- परिणामों के लिए साधारण भिन्न का उपयोग करना।
- बड़ी इकाई को छोटी इकाई में बदलना।
- अंतः समझ तथा अनौपचारिक माप के द्वारा पिंड का आयतन बताना।

- समय सारणी को पढ़ने की क्षमता होना।
- घंटा मिनट संबंधी संक्रियाएं करने की समझ होना।
- आंकड़े संग्रह करने की क्षमता होना।
- दंडालेख द्वारा आँकडों को प्रदर्शित करने की क्षमता होना।
- वर्ग संख्याओं, त्रिक संख्याओं में ढाँचों की पहचान कर सकना।
- लगातार वर्ग संख्याओं में विषम संख्याओं के क्रम की समझ होना।
- संख्याओं के ढाँचों की समझ होना।

पाठ्यपुस्तक

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 से दृष्टि लेकर विकसित बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2008 बिहार की विविधताओं को समाहित करता है। बच्चों के ज्ञान को बाहरी जीवन से जोड़ना तथा पढ़ाई रटन्त प्रणाली से मुक्त हो यह सुनिश्चित करना पाठ्यचर्या के मार्गदर्शक सिद्धांत में मूल बात है। इसी सिद्धांत को ध्यानगत करते हुए बिहार के स्कूली बच्चों के पाठ्यपुस्तक विकसित की गई है। पाठ्यपुस्तक में सभी पाठ गतिविधि आधारित हैं जिससे बच्चे स्वयं भी अवलोकन कर खोजी बनकर तार्किक शक्ति का विकास कर पाएंगे। परंतु शिक्षक को भी बच्चों द्वारा अवलोकन कर समझ विकसित करने में उन्हें सहयोग देना होगा। बच्चे ज्ञान का सृजन करते हैं। इसलिए बच्चों को सही दिशा में ले जाने तथा पाठ में दी गई सामग्री के अनुसार गतिविधियों में उन्हें शामिल कराकर उनके ज्ञान में सतत संबोधन करने की आवश्यकता है। हमें यह विचार करना होगा कि यदि अनुकूल परिवेश, समय और आजादी दी जाए तो बच्चे सौंपी गई सूचना एवं सामग्री से जुड़े ज्ञान का सृजन कर सकते हैं। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियां भी इस बात को तय करती है कि स्कूल में बच्चों के मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव कराने में पाठ्यपुस्तक कितनी प्रभावशाली सिद्ध हो सकती हैं। गणित की शिक्षा देते समय यह ध्यान रखा जाता है कि बच्चे गणित के महत्वपूर्ण सूत्रों को जाने और सही तरीके से गणना करें। इसके अतिरिक्त एक और उद्देश्य यह है कि बच्चों की सोच का गणितीयकरण किया जाए। तर्क सहित निष्कर्ष पर पहुंचने की कला इस विषय की पहचान है। विकसित पाठ्यपुस्तकों में यह ध्यान रखा गया है कि बच्चे गणना में प्रवीणता हासिल करने के साथ साथ अर्थपूर्ण हल पेश करें। जिस प्रकार अन्य विषयों में अधिकतर बच्चे अपने अनुभव के आधार पर कुछ–न–कुछ उत्तर देते हैं उसी तरह यह कोशिश की गई है कि गणित में भी बच्चे सरलता एवं सहजतापूर्वक अपने अनुभव के आधार पर समस्याओं का विश्लेषण करें, तर्क प्रस्तुत करें तथा सत्यता प्रमाणित करने के लिए प्रयास प्रारंभ करें। इस स्तर पर नितांत आवश्यक है कि गणित मात्र कुछ प्रतिभावान विद्यार्थियों की शक्ति नहीं रह कर सभी बच्चों के विचार और संप्रेषण के साथ–साथ समस्या हल करने के आनंद के अनुभव का साधन बनें। इस विचार से यहां मात्र शीर्षक का नाम नहीं लिख कर उसे विस्तार में लिखा गया है जिससे शिक्षकों में यह संदेश पहुंचे कि संख्या बहुत से संख्या पैटर्न की ओर एवं उनमें संबंध तथा इन संबंधों में पैटर्न खोजने की प्रवृत्ति को बढ़ावा मिले गणित की संक्रियाओं के साथ–साथ विद्यार्थियों की संकल्पना क्षमता को मजबूत आधार मिले। वृत्त, चतुर्भुज, त्रिभुज

ऐसे नियमित आकारों के विभिन्न पहलुओं को समझ सके तथा क्षेत्रमिति एवं ज्यामिति के आपसी संबंध जानते हुए इस ज्ञान का प्रयोग दैनिक जीवन में कर सके।

निरीक्षण एवं सत्यापन की कला के विकास के लिए कागज मोड़ना और अन्य तार्किक विश्लेषण का सहारा लिया गया है। रेल समय सारणी जैसे अन्य उपयोगी सारणी की समझ विकसित करने के लिए आंकड़ों का समावेशन किया गया है। गणित कौशल को जीवन में उतारने के लिए चित्र, रेखा चित्र, वाट को पाठ्यपुस्तकों में रखा गया है जिससे विरोध समाप्त करने के लिए प्रमाण देने की आदत प्रत्येक बच्चे में विकसित हो। इसलिए तथ्यों के प्रमाण तथा सत्यापन की भी बात पाठ्यपुस्तकों में की गई है। विषय के प्रति बच्चों का आकर्षण बढ़ाने के लिए, गणित के अंदर चित्र, रंगोली, उपस्कर निर्माण इत्यादि दैनिक जीवन में गणित के प्रयोग को दर्शाने के लिए पाठ्यपुस्तक से संबंधित प्रश्न रखा गया है। प्रतिभाशाली बच्चों के लिए कुछ चुनौतीपूर्ण कार्यों को भी पाठ्यपुस्तक में स्थान दिया गया है। जटिल गणना के स्थान पर तार्किक विश्लेषण एवं उपलब्ध साधनों के बेहतर उपयोग की कुशलता को अधिक महत्व दिया गया है।

अभ्यास के प्रश्न

1. गणित सीखने में भाषा का क्या महत्व है? उदाहरण देते हुए समझाएं।
2. गणित सीखने में बच्चे की पृष्ठभूमि व समझ का इस्तेमाल करने से क्या फायदा होगा? उदारहण देते हुए विश्लेषण कीजिए।
3. गणित सीखने में अ–भा–चि–प्र की क्या आवश्यकता है? किसी एक अवधारणा को समझने के लिए इसके उपयोग का वर्णन कीजिए ।
4. औपचारिक गणित को ठोस अनुभवों से जोड़ने की क्या जरूरत है? विश्लेषण कीजिए।
5. बच्चे एक दूसरे से कैसे सीखते हैं? बच्चों के एक समूह के संदर्भ में इससे संबंधित एक प्रतिवेदन तैयार करें।
6. क्या गलतियां उपयोगी होती हैं? बच्चों द्वारा की गई कुछ गलतियों का उदाहरण देकर बताएँ कि वे गलतियां बच्चे के गणित सीखने में किस प्रकार उपयेगी हो सकती है?
7. गणित सिखाने में ओरिगॅामी किस प्रकार सहायता कर सकता है? दो उदाहरण देकर समझाइए।
8. बच्चे के अनुभव क्षेत्र में आने वाले दो–तीन ऐसे उदाहरण दें जो जोड़ के संदर्भ में उपयोगी हो सकें? पुनः समूहीकरण के तरीके से जोड़ करने का एक उदाहरण दें।
9. कुछ ऐसे उदाहरण दें, जो ये दिखाएँ कि भाषा के कारण बच्चों के गणित की अवधारणाओं को समझने में दिक्कतें होती है।
10. ‘‘एक चौथाई, आधे से कम है?’इसे समझाने के लिए अपने तरीके सुझाइए एवं इस हेतु उपयोग की जाने वाली भाषा का भी वर्णन कीजिए।

11. कक्षा 3 के एक बच्चे से $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ जोड़ने को कहा गया। उसने $\frac{2}{9}$ लिखा। आपको क्या लगता है कि ऐसा क्यों हुआ? आप गलती ढूंढने व ठीक करने में उसकी मदद कैसे करेंगे?

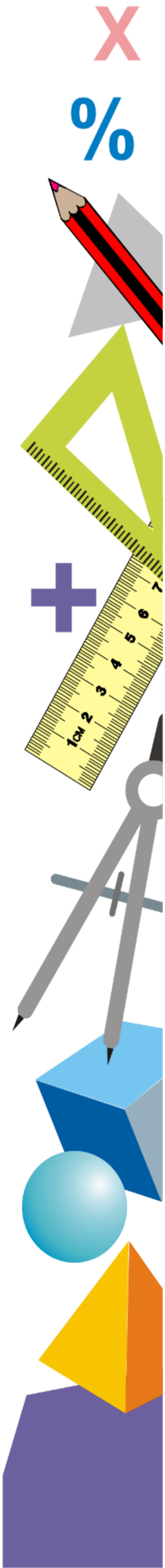
12. आपको क्या लगता है कि बच्चों को इबारती सवाल कब देने चाहिए– उनके औपचारिक एल्गोरिद्म में निपुण होने से पहले, या उसके बाद? आपके मत का कारण क्या है?
13. बच्चों को निम्नलिखित अवधारणा/कौशल सिखाने के लिए एक–एक खेल का उदाहरण लिखें।
    अ. गुणा,
    ब. वृत्त
    स. अन्दाज़ लगाने की क्षमता

    यह भी बताएं कि इन अवधारणाओं या कौशलों को सिखाए जाने से पहले आपके हिसाब से बच्चों को क्या आना चाहिए।
14. आप बच्चों की पाँच–पाँच और दस–दस के समूह बनाने में मदद के लिए कक्षा में की जाने वाली किस तरह की गतिविधियाँ सोच सकते है?
15. क्या दोहराव के द्वारा बच्चों की समय की अवधारणा समझने में मदद की जा सकती है? इसके लिए एक ऐसी गतिविधि को विस्तार से लिखकर बताइए जो पाँच बच्चों के एक समूह को दी जा सके।
16. पाठ्यपुस्तक से प्राप्त ज्ञान एवं अपने अनुभवों के आधार पर बताएं कि नीचे दी गई अवधारणाओं को सीखने और समझने के लिए आम तौर पर बच्चे किस उम्र तक तैयार होंगे?
    - सरल वर्गीकरण
    - लंबाई का संरक्षण
    - गुणन में क्रमविनिमेयता, यानी कि ab=ba किन्ही दो संख्याओं a और b के लिए।
    - समय
17. ''किसी गणितीय क्षेत्र में एक ही उम्र के बच्चे अलग–अलग संक्रियात्मक अवस्थाओं में हो सकते हैं और अलग–अलग उम्र के बच्चे विकास की एक ही अवस्था में हो सकते हैं।'' क्या आप इस कथन से सहमत हैं? अगर हां, तो उदाहरणों से इस कथन की पुष्टि कीजिए। अगर नहीं, तो यह बताइए कि आप क्यों असहमत हैं।

परियोजना कार्य

1. मापन में एक विषय चुनिये और उनसे अपने ही संदर्भ में दो ऐसी गतिविधियाँ बनाइये जिनसे आपके विद्यार्थियों को संबंध जोड. कर सीखने की अवधारणा की छानबीन करने और सीखने में मदद मिले।
2. कुछ बच्चों के साथ संबंध जोड. कर सीखने की गतिविधियों को करिये और लिखिये कि किस प्रकार ये गतिविधियाँ बच्चों के गणितीय सोच को बढ़ावा देती हैं।
3. बच्चों को समय के अन्तराल की अवधारणा से परिचित कराने के लिए अटकलबाजी का एक खेल बनाएँ।

इकाई 3



संख्या एवं संख्या संक्रियाएं

- परिचय
- संख्या पूर्व अवधारणाओं का विकास
- संख्या की अवधारणा की समझ
- गिनती से परिचय
- संख्या प्रत्यय की समझ का विकास एवं विभिन्न संकेतों के माध्यम से संख्याओं की प्रस्तुति
- स्थानीय मान
- गणितीय संक्रियाएँ एवं उनमें अंर्तसंबंध
- अभ्यास के प्रश्न
- परियोजना कार्य

परिचय

जीवन का ऐसा कोई पहलू नहीं जहाँ संख्याओं की जरूरत नहीं पड़ती। संख्याएँ हमारे जीवन में इतनी घुली मिली है कि हम उनके बिना जीवन की कल्पना नहीं कर सकते। वैसे भी गणित विषय का नाम सुनते ही हमारे मस्तिष्क में संख्याओं का चक्र घूमने लगता है। चूंकि संख्याएँ ही गणित के अध्यायों का मौलिक आधार है। अतः संख्याओं से संबन्धित मौलिक ज्ञान का होना अति आवश्यक है। गणित के प्राथमिक विद्यालयीय पाठ्यचर्या में संख्या की केन्द्रीय भूमिका है।

गणित की विभिन्न अवधारणाऐं चाहे वह संख्या या संख्यांक हो, दशमलव हो, भिन्न हो, स्थानीय मान अथवा जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग इत्यादि हो, का उपयोग न केवल हम विषयी ज्ञान हासिल करने के लिए करते है। बल्कि जीवन की दैनिकचर्या में इनका उपयोग अभिन्न होता है। एक तरह की चीजों को समूह में एक साथ रखना, चेतना सत्र के लिए पंक्ति में क्रम से खड़े होना तथा खेल में स्कोर गिनना इत्यादि क्रियाओं से बच्चे रोज ही रूबरू होते हैं। ये सभी गणित विषय के प्रत्यय यथा संख्या, अनुक्रम तथा गिनती है।

गणित विषय में संख्याओं की महत्ता को समझते हुए संख्याओं की दुनिया से बच्चों को प्राथमिक स्तर से ही समझ बढ़ाने की आवश्यकता है। इस इकाई में हम बच्चों में विभिन्न प्रकार की संख्या समझ विकसित करने के तरीकों से अवगत हो सकेंगे।

संख्या पूर्व अवधारणाओं का विकास

बच्चे विद्यालय मे प्रवेश लेने से पूर्व ही कम–ज्यादा, छोटा–बड़ा शब्दों का इस्तेमाल वस्तुओं के संदर्भ में करते हैं। जैसे–यह बड़ी गेंद है, ये गुब्बारा बड़ा है, आदि। बच्चे अपने परिवेश में अपने से बड़ों को गिनते हुये देखते–सुनते हैं। इससे प्रेरित होकर वे भी विभिन्न वस्तुओं को गिनने का प्रयास करते हैं। बच्चे प्रायः वस्तुओं को अव्यवस्थित या बिना क्रम से गिनते हैं जैसे एक, दो, पाँच, सात इत्यादि। जब बच्चा एक बोलता है, तो शायद वह एक वस्तु को अलग न कर पाए अर्थात वे गिनने की प्रक्रिया में संगत वस्तुओं को अलग न कर पाएं। प्रथम कक्षा में गणित शिक्षण अधिगम की शुरुआत में बच्चों के इस पूर्व ज्ञान का लाभ उठाना चाहिए और बच्चों को क्रमिक रूप से मूर्त्त वस्तुओं के साथ गिनने के क्रियाकलापों में संलग्न करना चाहिए।

गिनती कैसे सिखाएँ?

सामान्यतया लोग यही समझते हैं कि बच्चे 1 से 10 या उससे आगे 100 तक की गिनती याद कर लें तो उन्हें संख्याओं का ज्ञान हो जाता है। इतना ही नहीं बच्चों द्वारा 100 तक की गिनती याद कर लेने पर हम दूसरों के सामने उसका प्रदर्शन करवाते हैं। लेकिन हम कभी इस बात पर ध्यान नहीं देते कि गिनती की किसी भी खास संख्या का मतलब बच्चा जानता है या नहीं। अगर गिनती सुनाते समय वह किसी संख्या पर अटक

जाए तो वह गिनती सुनने वाले की तरफ तो कभी अपने परिचित की तरफ देखने लगता है और वह अपनी इस अग्नि परीक्षा में तब सफल हो पाता है जब हम स्वयं करके उसकी मदद करते है। ऐसा करके हम न सिर्फ बच्चे के सीखने की प्रक्रिया के साथ धोखा करते हैं बल्कि बच्चे के गणित सीखने को बाधित करते हैं। अतः बच्चा आगे चलकर गणित से डरने लगे अथवा उसे कठिन समझने लगे अथवा गणित की कक्षा का तुरंत खत्म होने की प्रतीक्षा करे तो इसमें कोई आश्चर्य की बात नहीं होगी।

इस नीरस, उबाऊ और कठिन तरीके से 'गिनती सिखाने' के बाद हम इसी ढंग से जोड़ना, घटाना, गुणा, भाग और आगे चलकर भिन्न व दशमलव भी सिखाते हैं। इस तरह जब हम सीखने की प्रक्रिया में से मज़ा निकाल देते हैं, तो कोई हैरानी की बात नहीं कि बच्चे गणित से डरने लगें।

गिनती करने का मतलब

एक बार माँ ने अपनी पाँच वर्षीय बेटी अनन्या से किचेन से 11 चम्मच लाने को कहा। अनन्या ने बर्तन स्टैण्ड में रखे चम्मचों को 1 से 11 तक गिना और ग्यारह नम्बर वाले 1 चम्मच को ले आई और माँ को दे दिया । माँ द्वारा चम्मच की संख्या पूछने पर वह बोली– ग्यारह। माँ ने उसके द्वारा लाए गए चम्मच को गिनने के लिए कहा तो अनन्या ने गिन कर बताया एक।

- सोचिए, अनन्या को गिनती आती है या नहीं। क्या हम समझते है कि, अनन्या को 1 से 100 तक की संख्याएँ क्रम से याद है या नहीं?
- वह 11 चम्मच क्यों नहीं ला सकी?

क्रियाकलाप

इस गतिविधि को अपने पड़ोस में रहने वाले किसी चार वर्षीय बच्चे के साथ आजमाएँ जो 1 से 10 तक की संख्याएँ सही क्रम में बोलता है, उसके सामने 10 गोलियाँ या कंकड़ों को रखिए और उन गोलियों/कंकड़ों को अंगूली से छूते हुए बोलकर गिनने के लिए कहिए। गिनने के क्रम में उसे मत टोकिए। अब निम्नांकित सवालों के संदर्भ में अपने अवलोकनों को दर्ज कीजिए –

1. क्या बच्चे ने सभी कंकड़ों पर उंगली नहीं रखी ?
2. क्या उसने कुछ कंकड़ों को एक से ज्यादा बार गिना ?
3. क्या उसने किसी कंकड़ को गिना ही नहीं ?
4. क्या सारे कंकड़ गिनने के बाद उसने फिर से कंकड़ों को गिनना शुरू कर दिया ?
5. क्या सभी कंकड़ छू लेने के बाद भी वह गिनती करता रहा ?

इन अवलोकनों के आधार पर हम बच्चे की गिनने की प्रक्रिया के बारे में निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

अगर ऊपर दिए गए सभी प्रश्नों के जवाब 'नहीं' है तो संभावना है कि बच्चे को दस तक की गिनती आती है। लेकिन एक या एक से ज्यादा प्रश्नों के उत्तर हाँ आने पर यह स्पष्ट है कि बच्चे को गिनती नहीं आती बल्कि उसे 1 से 10 तक की संख्या क्रम से बोलना आता है।

अक्सर यह देखा जाता है कि बच्चे गिनती बोल तो लेते हैं पर जब लिखना होता है तो वे संख्याओं की पहचान नहीं कर पाते हैं न ही वे बताई गई संख्या के अनुसार वस्तुएँ भी ले आ पाते हैं। गिनती बोल लेना उनकी याददाश्त का उदाहरण है जबकि समझ के साथ गिनने की क्षमता का मतलब गिनती का वास्तविक रुप से आना है। गिनती की इस क्षमता को संख्या की अवधारणा के विकास का आधार बनाया जा सकता है।

हमने देखा कि बच्चे किस तरह गलती करते हैं। गिनती गिनने के क्रम में बच्चों से अक्सर निम्नलिखित गलतियां होती हैं :

- एक ही चम्मच को बार–बार गिनना।
- गिनते वक्त किसी चम्मच को छोड़ देना।
- जोड़ और गिनती में अन्तर नहीं कर पाना।
- चम्मच को बगैर छुए गिनती बोलना।
- सभी चम्मच पूरे हो जाने पर भी गिनती बोलते रहना।

बच्चे ऐसी गलतियां क्यों करते हैं? इसे समझने की आवश्यकता है। गिनती के क्रम में क्रमबद्ध चरण को ध्यान में रखने की अवश्यकता है। इन चरणों के अभाव में गिनती याद तो हो सकती है किन्तु गिनती की समझ विकसित नहीं हो सकती।

केस स्टडी

एक शिक्षक द्वारा बच्चों को गिनती सिखाने के क्रम में निम्नलिखित चरणों का उपयोग करते हुए संपन्न गतिविधियों से प्राप्त अवलोकन निम्नांकित हैं। यह चरण इस बात के द्योतक हैं कि गिनती सिखाने के लिए एक शिक्षक को किन–किन बातों को ध्यान में रखने की आवश्यकता होती है।

1. सर्वप्रथम शिक्षक ने गोलियों को एक लाइन में रखा ताकि गिनते समय कोई न छूटे और न ही दुबारा गिना जा सके अर्थात् शिक्षक ने उन्हें एक क्रम में रखा ।
2. इसके बाद शिक्षक ने गोलियों को गिनने के लिए एक मान्य क्रम में संख्याओं का नाम बोलना शुरू किया और हर संख्या को क्रम में बोलते हुए क्रम में रखी गई गोलियों को छुआ, अर्थात् एक गोली को एक संख्या से जोड़ा, यानी एक–एक की संगति बनाया।
3. जब शिक्षक ने दसवीं गोली को छुआ तो बोला 'दस' अर्थात दस का इस्तेमाल दसवीं गोली के लिए हुआ लेकिन उस समय सिर्फ दसवीं गोली को ही छुआ गया था। दूसरी तरफ दस का इस्तेमाल कुल दस गोलियों की कुल संख्या के लिए हुआ।
4. गिनती के बाद शिक्षक ने गोलियों को दो समूहों में वर्गीकृत किया । ऐसी गोलियों का समूह जो दस की संख्या में गिनी गई थी । दूसरा समूह बची हुई गोलियों का था।
5. शिक्षक ने एक बार फिर दूसरी तरफ से ऊपर की सारी प्रक्रिओं से गुजरते हुए दस तक गिना तो गिनी हुई कुल गोलियों के समूह में दस ही गोलियाँ थी, अर्थात् गिनती में दिशा क्रम बदलने से गिनती अप्रभावित रहती है।
6. शिक्षक ने दूसरी बार गोलियों के बदले कंकड़ों का इस्तेमाल किया और दस तक की गिनती उपरोक्त प्रक्रिया के साथ संपन्न किया तो भी गिनती पूर्व की तरह संपन्न हुई। अर्थात् गिनती में किसी भी वस्तु का प्रयोग हो सकता है। यह आवश्यक नहीं कि वह वस्तु एक ही तरह की हो।

यहाँ यह स्पष्ट है कि गिनती सीखने के लिए मुख्य चार तथा दो अन्य पूरक अलग–अलग प्रक्रियाओं से गुजरना पड़ता है।

गिनने में मुख्य प्रक्रियाएं निम्नलिखित हैंः

- एक मान्य क्रम में रखना।
- वर्गीकरण करना।
- एक–एक की संगति करना।
- एक ही संख्या को दो अलग–अलग अर्थों में इस्तेमाल करना।

गिनने में दो अन्य पूरक प्रक्रियायें

- गिनती किसी भी दिशा से हो सकती है।
- गिनती में किसी भी वस्तु का इस्तेमाल हो सकता है। यह आवश्यक नहीं कि वस्तु समान ही हो।

अगर हम अन्य दो पूरक प्रक्रियाओं पर ध्यान दें तो हम पाते हैं कि अक्सर बच्चों को वस्तुओं को छाँटना या क्रम में रखना नहीं आता है। इतना ही नहीं उसे वस्तुओं की एक–एक संगति बनाने की समझ भी नहीं होती जिसके कारण गिनती की वास्तविक समझ बना पाने में बच्चों को कठिनाई होती है जिसका परिणाम है कि 11 चम्मचों के बदले बच्चा 11वाँ चम्मच उठा लेता है और उसे ही वह 11 चम्मच समझता है। गिनती सीखने–सिखाने के क्रम में यह आवश्यक है कि बच्चों को संख्या पूर्व अवधारणों के मुख्य एवं पूरक चरणों से होकर गुजरने दिया जाए।

गिनती गिनने का मतलब यह नहीं है कि बच्चों में संख्या की समझ विकसित हो चुकी है। गिनती सीखने से पहले उन्हें वर्गों में बांटना, क्रम में रखना और एक–एक की संगति में रखना कुछ हद तक आना चाहिए। इसीलिए इन क्षमताओं को संख्या पूर्व अवधारणाएँ कहा जाता है।

स्पष्ट है कि बच्चों को अवधारणाएँ सीखने से पहले उन्हें उस अवधारणा को टटोलने व अनुभव करने का पर्याप्त अवसर मिलना चाहिए। उन्हें कुछ करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। सामान्यतः बच्चे गिनती या संख्या सीखने के पहले कम–ज्यादा, उपर–नीचे, दूर–पास और बड़ा–छोटा इत्यादि से परिचित होते हैं। प्रारंभिक स्तर पर हम अक्सर यह देखते हैं कि बच्चे संख्या, गिनती का मतलब नहीं समझ पाते हैं, उदाहरण के लिए एक बच्चे से तेरह (13) लिखने के लिए कहा गया तो उसने 31 लिखा। कुछ बच्चों ने तेरह को 13 की तरह भी लिखा। कक्षा में शिक्षण करते समय बच्चों से ऐसे अनेक उदाहरण सामने आते रहते है। अक्सर कक्षाओं में यह भी देखा जाता है कि बच्चे किसी लिखे हुए संख्या जैसे 18 को नहीं पढ़ पाते अथवा इसका मतलब नहीं समझ पाते हैं जबकि उन्हें ऐसी संख्याओं का ज्ञान होना चाहिए। ऐसे ही जब किसी बच्चे से 1039 में 3 का मतलब पूछा जाता है तो इनका जवाब यथोचित नहीं होता अर्थात उन्हें 3 के स्थानीय मान का ज्ञान नहीं होता है । हालाँकि वे अंकों को पहचानना अथवा पढ़ना जानते हैं।

संख्याओं की अवधारणा की समझ

आज कल यह विश्वास स्थापित है कि यदि बच्चे संख्याओं के नाम गिनती के क्रम में बोलना सीख जायें तो इसका मतलब है कि वे गिनना या संख्याओं को जान गए हैं। जबकि बच्चों में संख्या की समझ धीरे–धीरे ही विकसित होती हैं। अतः संख्या का अर्थ समझने के पहले आवश्यकता इस बात की है उनमें 'वर्गो में बाँटना', 'क्रम में रखना' तथा 'एक–एक की संगति बनाना' जैसी क्षमताओं का विकास किया जाए। अगर एन.सी.एफ. (N.C.F.) और बी.सी.एफ. (B.C.F.) को ध्यानगत किया जाय तो हम रचनावादी उपागम के आधार पर बच्चों के सीखने के लिए मज़ेदार गतिविधियों द्वारा अवधारणाओं को खोजने का मौका दे सकते हैं।

हमें ऐसी कुछ गतिविधियों पर विचार करना चाहिए जिनसे बच्चों में समूहीकरण/ वर्गीकरण की क्षमता विकास करने में मदद मिल सके। इन गतिविधियों को कक्षा के अनुरूप ढ़ालकर भी उपयोग किया जा सकता है।

वर्गीकरण

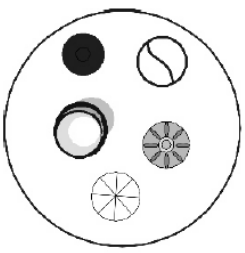
हम जानते हैं कि जब वस्तुओं को उनके एक ही प्रकार के गुणों के आधार पर साथ–साथ रखा जाता है तो इसे वर्गीकरण या समूहीकरण कहते हैं। (किसी बच्चे को वर्गीकरण आ गया, यह तभी कहा जा सकता है जब वह वर्गीकरण की कसौटी का निर्णय कर सके और गतिविधि के दौरान इस कसौटी को बनाए रख सकें) और यही क्षमता तार्किक अवधारणाओं के विकास की बुनियाद है।

बच्चे रोजमर्रा के कामकाज में अक्सर वर्गीकरण का प्रयोग करते हैं। उदाहरणतः इन्हें फूल, अनाज, बर्तन, कटे हुए कागज, खिलौने इत्यादि अलग–अलग रखने के लिए कहा जाता है तो वे वर्गीकरण तो करते ही है। लेकिन वर्गीकरण की अवधारणा को विकसित करने के लिए बच्चों की ऐसे और अनुभवों की जरूरत पड़ती है। खेल इसका अच्छा माध्यम हो सकता है।

एक शिक्षक शिक्षण के क्रम में बच्चों में वर्गीकरण की समझ विकसित करने के लिए निम्नलिखित गतिविधियां कर सकते हैं।

कक्षा–कक्ष/वर्ग शिक्षण करने के क्रम में:

1. बच्चों को तरह–तरह की सामग्री खेलने के लिए दी जा सकती है। खेलते वक्त वे अपने आप उन चीजों को व्यवस्थित करने के तरीकों के बारे में सोचते हैं। हो सकता है कि उनके द्वारा किया गया वर्गीकरण अटपटा सा लगे। किन्तु महत्वपूर्ण यह है कि इन्हें अलग–अलग सामग्री अपने ढंग से एक जगह संग्रहित करने का मौका मिल रहा है। बच्चों द्वारा वस्तुओं को अलग–अलग समूह में किये जाने पर उनका अवलोकन तथा बातचीत कर उनके द्वारा वस्तुओं के इस तरह के समूह क्यों बनाए गए, इस पर ध्यान देने की आवश्यकता है।
2. बच्चों को कुछ परिचित चीजें देकर उन्हें समान गुण के आधार पर समूहों में बाँटने के लिए कहा जा सकता है। आकृति, रंग या सतह की बनावट आदि के आधार पर शुरू में स्वयं शिक्षक द्वारा समान गुण वाली चीजों का एक समूह बच्चों को बनाकर दिखाया जाना चाहिए।



आकार के आधार पर समूह   बनावट के आधार पर समूह   खिलौनों का समूह

3. बच्चों को तरह–तरह की पत्तियाँ, कंकड़, दाल, गेंद, पेन देकर उन्हें समूहों में बाँटने के लिए कहा जाना चाहिए। समूह निर्माण के बाद, इन्हें साथ–साथ क्यों रखा गया है, यह पूछा जाना चाहिए। समान वस्तुओं को दूसरे समूह में नहीं रखें जाने का कारण भी पूछा जाना चाहिए आदि।
4. भोजन के समय कौन सी चीजें मीठी हैं, और कौन सी नमकीन, यह पूछ कर भी वर्गीकरण की अवधारणा विकसित की जा सकती है।

अनुक्रम बनाना (क्रम में रखना)

चीजों को क्रम में सजाने का अर्थ होता है, उन्हें किसी नियम के आधार पर क्रम में रखना। इसे हम गणित की भाषा में पैटर्न बनाना भी कहते हैं। यह आकृति, आकार, रंग या ऐसे ही किसी गुण के आधार पर हो सकता है।

क्रम बनाने का एक खास तरीका होता है। बच्चों को कुछ चीजें देकर उन्हें उनके घटते/बढ़ते हुए वजन के आधार पर क्रम में रखने के लिए कहा जा सकता है या कुछ छड़ियां देकर उन्हें घटती/बढ़ती हुई लम्बाई के आधार पर क्रम में रखने के लिए कहा जा सकता है।

यह सर्वविदित है कि क्रम में रखना एक पैटर्न बनाना भी होता है, अर्थात क्रम बनाने का सबसे आसान तरीका यह भी है कि किसी पैटर्न को आगे बढ़ाने के लिऐ कहा जाय। जैसे– एक पंक्ति में एक पेंसिल, एक पेन, एक पेंसिल, एक पेन, एक पेंसिल,................ के क्रम में पेंसिल एवं पेन रखकर बच्चों से पेंसिल व पेन के ढ़ेर से वैसी ही एक और पंक्ति बनवाई जा सकती है।

स्पष्ट है कि बच्चों को दिए जानेवाले हर काम में जिन तार्किक प्रक्रियाओं की जरूरत होती है, उसकी स्पष्ट समझ हमें होनी चाहिए। खासतौर से जब हम बच्चों से अनुक्रम बनाने की उम्मीद करें, तो हमें पहले यह पता कर लेना चाहिए कि वह दो दिशाओं में क्रम लगा सकता है। अनुक्रम सम्बंधी गतिविधियां करते वक्त 'पहली', 'आखिरी', 'इससे पहले' जैसे शब्दों का इस्तेमाल करने से बच्चों को इन अवधारणाओं को समझने में मदद मिलती है।

एक–एक की संगति

एक शिक्षक ने 9 गेंदे एक कतार में रख दी और पाँच वर्षीय रेखा को गिनने के लिए कहा। शिक्षक ने उसे कहा कि गिनते हुए वह गेंदों को छूती जाये। रेखा ने गेंदों को तीन बार गिना और हर बार अलग–अलग जवाब आया। हो यह रहा था कि गिनते वक्त वह या तो किसी गेंद को छोड़ देती या किसी गेंद को दो बार गिन लेती थी। उसकी गिनती गेंदों के साथ कुछ इस प्रकार की थी –

हमे सोचना है कि रेखा ने गिनती इस प्रकार से क्यों की ?

रेखा अभी इस बात को समझ नहीं पायी है कि गिनते वक्त किसी वस्तु को अछूता नहीं छोड़ते तथा अगर किसी वस्तु को एक बार छू लिया तो उसे वापस नहीं छूआ जाता। अर्थात रेखा को अभी एक–एक की संगति की अवधारणा बाकी है।

इस अवधारणा की समझ बनाने के लिए हमें बच्चों को कई अवसर देने होंगे जिनमें वे वस्तुओं को एक–एक की संगति में रखें।

एक–एक की संगति की समझ के तहत बच्चों को 'से ज्यादा' (>), से कम' (<) और 'बराबर' (=) जैसे शब्दों का मतलब समझाना होता है। एक–एक की संगति का अपने दैनिक जीवन में भी निरंतर उपयोग होता रहता हैं। हमें हमारे अनुभवों को और विस्तार देने की जरूरत है। इसी उद्देश्य से यहां पर कुछ क्रियाकलाप दी गयी हैं :

क्रियाकलाप

1. पेंसिलों की एक कतार बनाकर बच्चों से कहें कि वह उतनी ही कलमों की एक कतार बनाएँ ।
2. बच्चों से यह कहें कि वह उतनी ही पत्तियाँ इकट्ठा करें जितने की समूह में कुल बच्चें हैं।
3. कुछ बिल्लियों और कुछ चूहों के चित्रों का एक–एक समूह बना लें। अब बच्चों से कहें कि एक–एक बिल्ली को एक लाइन के जरिये एक–एक चूहे से जोड़ दें।
4. बच्चों को संग्रहों को पहचानने का अनुभव कराएँ। संग्रहों की तुलना करने की धारणा को तीर–आरेख खींच कर बताएँ।

ऐसी गतिविधियों से बच्चे यह देख और समझ पाएंगे कि एक–एक की संगति का अर्थ क्या है। हमें उन्हें इसलिए भी प्रोत्साहित करना चाहिए कि गतिविधि के दौरान वे आपस में सम्बंधित प्रश्न करें तथा उनका जवाब खोजने का प्रयास करें।

गिनती से परिचय

परिस्थिति / केस स्टडी

जब जसवंत चार वर्ष का था तो वह संख्याओं को बोलने के क्रम में वह संख्याओं को कभी तो क्रम में बोलता और कभी जो याद आ गयी वह। उसकी माँ पास ही बैठकर

घर का काम कर रही थी। उन्होंने जसवंत से पूछा, ''क्या तुम चार लिख सकते हो?'' जसवंत ने हाँ कहा, और निम्नानुसार लिख दिया:–

4 0000

माँ ने पूछा कि यह साथ में क्या बनाया है तो जसवंत बोला, **"गेंद"**। जब माँ ने पूछा कि गेंदें क्यों बनाया, तो जसवंत ने जवाब दिया, **"किताब में चार ऐसे ही लिखा है"**। माँ ने **"4** XXXX**"** जब लिखकर पूछा कि क्या यह चार है, तो जसवंत नहीं बोला।

इस उदाहरण से हमें यह तो पता चल ही गया कि जसवंत को इस बात की समझ नहीं थी कि चार, चार वस्तुओं के किसी भी समूह पर लागू हो सकता है। तब क्या हम कह सकते हैं कि उसे संख्या का अर्थ पता है? वैसे तो वह 1 से 10 तक संख्याएँ लिख सकता है।

जैसा कि हम पहले जान चुके हैं कि गिनने का मतलब क्या होता है? जब कोई बच्चा गिनती लिख लेता है तो इसका मतलब यह नहीं कि उसे गिनती करना आता है और यह ऊपर दिये गये उदाहरण से स्पष्ट होता है।

बच्चों में गिनती या गिनने की क्षमता विकसित करने में चीजों से सचमुच मदद मिलती हैं, वह है वास्तविक चीजों की गिनती। बच्चे को दों पत्तियाँ, दो पेंसिलें, दो किताबें दिखाकर, दो बार ताली बजाकर या इसी तरह की गतिविधियों से 'दो' का अर्थ समझने की कोशिश करने दें। हर बार शब्द 'दो' पर जोर दें। इन विविध अनुभवों से बच्चे धीरे–धीरे समझेंगे कि दो–दो चीजों के इन सारे समूहों में एक बात समान है, और वह समान बात है 'दो' का गुण।

इस तरह से हम उन्हें पाँच तक की संख्याएँ सिखा सकते हैं। कोई जरूरी नहीं कि ये संख्याएँ क्रम में ही सिखाई जाएँ। मसलन, बच्चे इन संख्याओं को 'एक', 'दो', ''पाँच'', ''तीन'', ''चार'' के क्रम में भी सीख सकते हैं। संख्याओं की परंपरागत क्रम वे बाद में सीख सकते हैं। इससे उन्हें छोटी और बड़ी संख्याओं की समझ बनाने में मदद मिलेगी। हर बार हम उनसे ऐसे प्रश्न पूछ सकते हैं: ''मेरे पास कितने कंचे हैं?'', मैं कितनी बार कूदी?'', कौन से चार बच्चे बोर्ड पर आएँगे?'', वगैरह।

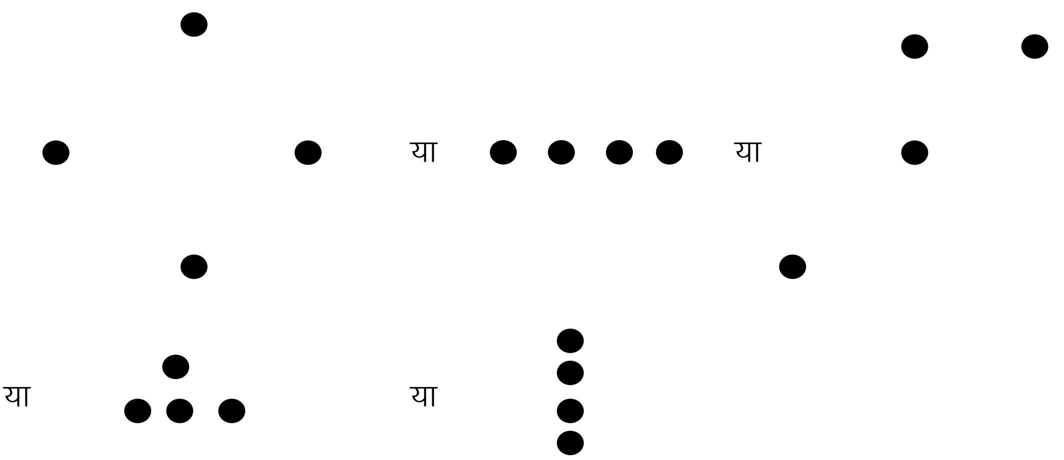
बच्चों को दिखाने के लिए गिनते वक्त हम अक्सर एक–एक चीज को छूते हुए 'एक, दो, तीन', वगैरह कहते जाते हैं। वे देखते हैं कि हम इन चीजों को छू रहे हैं और हर चीज के लिए एक नया शब्द बोल रहे हैं। हो सकता है कि वे समझें कि एक, दो, तीन, इत्यादि उन चीजों को नाम हैं, जैसा कि ऊपर दिए गए उदाहरण में हुआ था। हम बच्चों को यह कभी नहीं समझाते कि दूसरी चीज को 'दो' इसलिए कहते हैं क्योंकि हम वास्तव में दो चीजों के एक समूह की बात कर रहे हैं– एक चीज वह जो हमने पहले छुई थी और एक वह जिसे अब छू रहे हैं। चूँकि हम इस बात को समझते हैं, इसलिए हम मानकर चलते है कि बच्चे भी इसे समझ गए हैं। दरअसल हमें तो आभास तक नहीं होता कि बच्चे चक्कर में पड़ रहे हैं।

इस भ्रम से बचने का तरीका यह है कि अलग–अलग अवसरों पर अलग–अलग क्रम में तरह–तरह की चीजों या क्रियाओं को गिनने का अभ्यास करवाया जाये। हम यह भी कर

सकते हैं कि पहली चीज को छूकर कहें, ''यह एक पत्ती हुई'' एक और इसके बाद इस पत्ती को अलग रख दें। फिर दूसरी पत्ती को उठाकर पहली के साथ रख दें और कहें, यह एक और पत्ती है, यानी अब ये दो पत्तियाँ हो जाने चाहिए। यही अभ्यास क्रियाओं के साथ भी किए जा सकते हैं। जैसे आप एक दफा ताली बजाकर कहें, ''मैंने एक बार ताली बजाई''। फिर दो बार ताली बजाकर कहें, ''अब मैंने दो बार ताली बजाई''। इस तरह से जाहिर हो जाता है कि संख्या के नाम का संबंध उस वस्तु या क्रिया विशेष से न होकर उस समूह के आकार से है, जिसे हमने अलग किया है। इससे बच्चे को यह समझने में भी मदद मिलती है कि संख्याओं का एक क्रम होता है तथा आगे आने वाली हर संख्या, ठीक पिछली संख्या से एक ज्यादा होती है।

संख्याओं के संदर्भ में एक और पहलू है जिसे ध्यान में रखना जरूरी है। गिनती सिखाने के लिए चीजों का इस्तेमाल करते वक्त हम चीजों को हर बार एक खास पैटर्न में रख देते हैं। मसलन, हम ज्यादातर दो कंचों को ऐसे ●● तीन कंचों को ऐसे ●●● और चार कंचों को ऐसे ●●●● रखते हैं।

हो सकता है कि बच्चे को यह गलतफहमी हो जाएँ कि दो, तीन, चार इत्यादि का संबंध चीजों की उस खास सजावट से है और इस तरह हो सकता है कि बच्चे को दो कंचे बताएँ। यदि हम जमाने के तरीके को बदलते रहें, तो इस समस्या से बच सकते हैं। तीन चीजें दिखाते समय कभी उन्हें एक पंक्ति में तो कभी तिकोनी रहें, तो इस समस्या से बच सकते हैं। इसी प्रकार से चार चीजों को कई तरह से रखा जा सकता है–



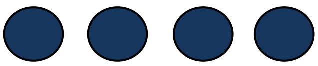
संख्या प्रत्यय की समझ का विकास एवं विभिन्न संकेतों के माध्यम से संख्याओं की प्रस्तुति

हम जानते हैं कि गणित एक अमूर्त विषय है और इसकी अमूर्तता इसके सभी हिस्सों में झलकती है। हम जिन बच्चों के बीच रहते हैं, वे अमूर्त अवधारणाओं को तभी सीख पाते हैं जब उनका मूर्तीकरण कर उनके सामने प्रस्तुत किया जाय। अतः संख्या की अवधारणा

स्पष्ट करने के लिए हमें बच्चों से परिचित ऐसी ठोस वस्तुओं के संकेत लेने होंगे जिससे हम संख्या की अमूर्त अवधारणा को स्पष्ट कर सकें।

सामान्यतया हम शिक्षक गिनती सिखाने के क्रम में चीजों का इस्तेमाल करते समय चीज़ों को हर बार एक खास क्रम/पैटर्न में रखकर संख्या का अभ्यास कराते हैं। जैसे हम ज्यादातर कंकड़ों, तीलियों या गोलियों से ● एक को ● ● दो को ● ● ● तीन को चार को ● ● ● ● के रूप में रखते हैं जबकि हमें संख्या लिखते समय संकेतों के एक ही पैटर्न को हर बार नहीं दुहराना चाहिए।

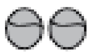
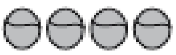
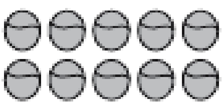
बच्चों को संख्या की धारणा स्पष्ट करने के लिए हम तरह–तरह की परिचित वस्तुओं का इस्तेमाल कर सकते हैं। साथ ही यह भी ध्यान रखने की ज़रूरत है कि संख्याओं के नाम पहले विशेषण के रूप में आएँ न कि संज्ञा के रूप में–

	= एक किताब
	= दो फूल
	= तीन पेंसिल
	= चार गोलियाँ

ठोस वस्तुओं और इनके समूह के माध्यम से हमें बच्चों में अलग–अलग संख्याओं का ज्ञान कराना चाहिए।

संख्या एवं संख्यांकः–

संख्याओं के लिए प्रयुक्त चिह्नों या संकेतों को संख्यांक कहते हैं, जैसे– संख्या एक का संकेत 1 तथा दो का संकेत 2 है। साथ ही जिस संख्या या संख्यांक का विचार हमारे मस्तिष्क में आ रहा हो उस संख्या या संख्यांक को शब्दों में लिखने या बोलने को उस संख्या या संख्यांक का नाम कहते हैं, जैसे– संख्यांक 2 का संख्यानाम 'दो' तथा संख्या संकेत 3 का संख्यानाम 'तीन' तथा संकेत 4 का 'चार' कहलाता है।

संख्या	संख्यांक	संख्यानाम
	2	दो
	3	तीन
	4	चार
–	–	–
–	–	–
	10	दस

परिस्थिति/केस स्टडी

पहली कक्षा में शिक्षक ने बोर्ड पर अंक 1,.......,9 लिखे थे। इसके बाद उन्होंने सभी बच्चों से प्रत्येक अंक से संबंधित संख्या के नाम दोहराने को कहा था और आखिर में उन्होंने सभी बच्चों से होम–वर्क पुस्तिका में कई बार ये अंक लिखवाए थे। इसके कुछ महिने बाद शिक्षक ने उन्हें दो अंक वाली संख्याएँ सिखाने इस तरह शुरू किया। सबसे पहले उन्होंने बच्चों को एक अंक वाली संख्याएँ याद दिलाई। इसके बाद उन्होंने बोर्ड पर लिखा–

10

11

12

–

–

19

उन्होंने जो भी लिखा था, बच्चों ने उसे ठीक वैसा ही उतार लिया। अब शिक्षक ने एक–एक संख्यांक की ओर इशारा करते हुए संख्याओं के नाम बोलना शुरू कर दिया। आखिर में उन्होंने बच्चों से हरेक संख्यांक पाँच–पाँच बार लिखवाए। साथ में बोलते गए,'' 1 के साथ 0 लिखो दस, 1 के साथ 1 लिखो ग्यारह,..........1 के साथ 9 लिखो, उन्नीस।''

थोड़े और अभ्यास के बाद वे संतुष्ट हो गए कि बच्चे 1 से 100 तक के संख्यांक व संख्यानाम जानते हैं। अगले साल इसी तरह से बच्चों को सिखाया गया कि 101 से 1000 तक की संख्याओं को कैसे दर्शाएँ। दूसरी कक्षा के शिक्षक ने उन्हें यह भी बताया है कि यदि उन्हें कोई संख्या, जैसे एक सौ बावन लिखने को कहें, तो पहले वे अपनी कॉपी में सै. द. ई. लिख लें। उन्होंने यह भी समझा दिया कि यहाँ सै. द. ई. का अर्थ सैंकड़ा, दहाई, इकाई होता है। चूँकि एक सौ बावन में एक सैकड़ा, पाँच दहाई और दो इकाई हैं, इसलिए बच्चे सै. के नीचे 1, द. के नीचे 5 और इ. के नीचे 2 लिखें।

इसके बाद शिक्षक ने उन्हें दो व तीन अंकों की संख्याएँ लिखने की काफी कवायद करवाई। शिक्षक ने ब्लैकबोर्ड पर कुछ उदाहरण देकर इसे समझाया।

इसके बाद बच्चों को निम्नलिखित किस्म के सवाल गृहकार्य के लिए दे दिएः 251 में कितनी दहाई है?

ज्यादातर बच्चों का जवाब था 5, मगर कुछ बच्चों ने कहा 25 है।

हमें यह सोचना होगा कि बच्चों के जवाब अलग–अलग क्यों आए?

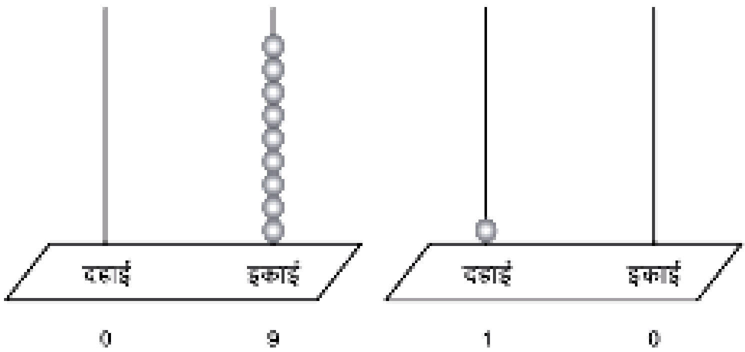
हममें से कई लोग इकाई, दहाई, सैंकड़ा की अवधारणा काफी मशीनी ढंग से सिखा देते हैं। इस तरीके से सिखाए जाने पर बच्चे कह देते हैं कि 251 में 5 दहाई हैं। हमें थोड़ा

गहराई में जाकर, कुछ ठोस गतिविधियों के इस्तेमाल से बच्चों को याद दिलाना चाहिए कि आखिरकार एक सैंकड़ा भी 10 दहाई के बराबर होता है, वगैरह। तभी वे यह समझ पाएँगे कि 251 में 25 दहाई है।

स्थानीय मान

हम संख्याओं को प्रतीकों के माध्यम से व्यक्त करते हैं। हमारी अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में 1 से 9 एवं 0 को प्रतीकों के रूप में इस्तेमाल किया जाता है। संख्याओं के निरूपण के लिए हम इन दस प्रतीकों का ही प्रयोग करते हैं। जिन्हें हम अंक के नाम से जानते हैं। अंतर्राष्ट्रीय पद्धति में दाशमिक प्रणाली की यह विशेषता है कि हर अंक का मान संख्या में उसके स्थान पर निर्भर करता है। अतः दाशमिक प्रणाली में बड़ी से बड़ी संख्या की बहुत छोटे रूप में व्यक्त की जा सकती है। अन्तर सिर्फ अंकों के स्थान का होता है।

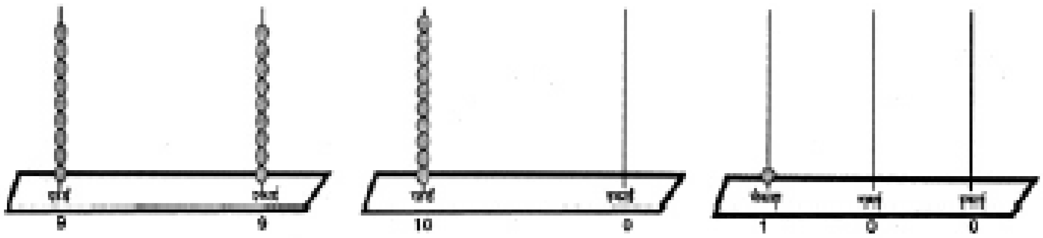
ऐसा इसलिए संभव हो पाता है क्योंकि हम हर स्थान का मान अलग–अलग निर्धारित करते हैं। अंकों के ये मान ही 'स्थानीय मान' कहलाते हैं। स्थानीय मान की अवधारणा स्पष्ट करने के लिए हम गिनतारे का प्रयोग कर सकते हैं। हम गणना करने के लिए दहाइयों द्वारा समूहन का प्रयोग करते हैं। अतः अब हम नौ के साथ एक और जोड़ देते हैं तो 'संपूर्ण समूह' एकल इकाई के रूप में परिवर्तित हो जाती हैं जिसे 'दहाई' के नाम से जानते हैं जबकि संख्या के पहले स्थान का अंक इकाई कहलाता है।



जैसा कि ऊपर दिए गए चित्र में दर्शाया गया है। गिनतारा में इकाई के स्थान पर 9 मोती लगे हुए हैं। जैसे ही हम 9 में एक मोती और जोड़ते हैं, वह 10 हो जाते हैं। उस स्थिति में दहाई के स्थान पर एक मोती तथा इकाई पर कोई मोती नहीं रहता। अर्थात 9 में एक जोड़ने पर 'दस की संख्या' एकल इकाई अर्थात दहाई के रूप के परिवर्तित हो जाती है। क्योंकि हमारी संख्या पद्धति में दहाइयों द्वारा समूहन का प्रयोग होता है इसलिए इस पद्धति का आधार 'दस' मानते हैं।

संख्यांकों को आगे बढ़ाने के लिए जोड़ प्रणाली का प्रयोग किया जाता है। जैसे– ग्यारह दस से एक ज्यादा होता है और इसका प्रतीक है–11, बारह में ग्यारह से एक ज्यादा होता है और इसका प्रतीक है–12, तेरह में बारह से एक ज्यादा होता है और इसका प्रतीक है–13।

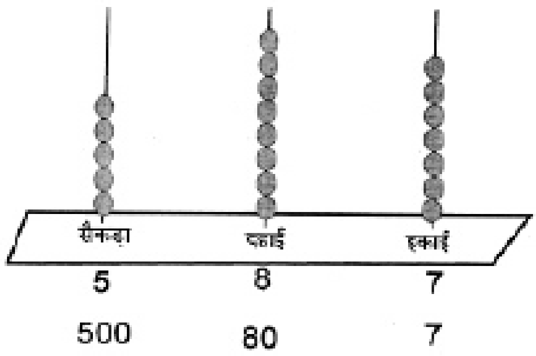
दूसरे शब्दों में हम यह भी कह सकते हैं कि 13 में दस से तीन अधिक होता है। इस क्रम को बढ़ाते हुए हम निन्यानवे तक जा सकते हैं। फिर निन्यानवे से एक ज्यादा होने पर हम देखते हैं दस–दस के दस समूह' बन जाते हैं। और इस प्रकार 'दस के समूह' में दस समूह फिर एकल इकाई के रूप में परिवर्तित हो जाती है जिसे हम सौ कहते हैं और इसके प्रतीक या 'संख्यांक' को '100' के रूप में जानते हैं। जैसा कि निम्न रूप से दर्शाया गया है–



इस प्रकार हम देखते हैं कि दस इकाईयाँ मिलकर एक दहाई बनाती है और दस दहाईयाँ मिलकर सैकड़े के रूप में परिवर्तित हो जाती हैं। इसी प्रकार दस सैकड़े मिलकर हज़ार, दस हज़ार मिलकर दस हजार तथा दस, दस हजार मिलकर लाख बनाते हैं और फिर यह क्रम आगे चलता रहता है।

उदाहरण:

587 में 5, 8 और 7 के स्थानीय मान गिनतारे की सहायता से–



इस प्रकार 587 में 5 का स्थानीय मान = 500

8 का स्थानीय मान = 80

तथा 7 का स्थानीय मान = 7 है।

स्थानीय मान की समझ हेतु निम्नांकित स्थनीय मान सारणी का उपयोग किया जा सकता है:–

स्थानीय मान चार्ट

करोड़		लाख		हजार				
दस	एक	दस	एक	दस	एक	सैकड़ा	दहाई	इकाई
10,0000000	1,0000000	10,00000	1,00000	10,000	1,000	100	10	1

3546 में सभी अंकों के स्थानीय मान को चार्ट में निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है:

करोड़		लाख		ळजार				
दस	एक	दस	एक	दस	एक	सैकड़ा	दहाई	इकाई
10,0000000	1,0000000	10,00000	1,00000	10,000	1,000	100	10	1
					3	5	4	6

स्थानीय मान चार्ट के अनुसार संख्यांक 3546 में प्रत्येक अंक का स्थानीय मान उसके द्वारा ग्रहण दिए गए स्थान के कारण होता है। अतः 3 का स्थानीय मान 3000, 5 का स्थानीय मान 500, 4 का स्थानीय मान 40 तथा 6 का 6 है।

हम इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं–

$3\times1000+5\times100+4\times10+6$ अथवा $3000 + 500 + 40 + 6$

इस प्रक्रिया को हम 3546 का विस्तारित रूप में व्यक्त करना कहते हैं तथा 3456 का विस्तारित रुप 3000+500+40+6 अर्थात $3\times1000+5\times100+4\times10+6\times1$ है।

यहां पर केवल दाशमिक प्रणाली के बारे में ही बताया गया है। इसके अतिरिक्त द्वि–आधारी प्रणाली, पंच–आधारी प्रणाली तथा साठ–आधारी प्रणाली होते हैं। द्वि–आधारी प्रणाली का उपयोग कम्प्यूटरों में, पंच–आधारी का अबेकस में तथा साठ–आधारी प्रणाली का उपयोग समय व कोण दर्शाने में किया जाता है।

प्रत्यक्ष या अंकित मानः

किसी संख्यांक में किसी अंक का जो वास्तविक मान है, वही उसका अंकित या प्रत्यक्ष मान है। जैसे संख्यांक 587 में 5, 8 एवं 7 के प्रत्यक्ष मान इन संख्याओं का प्रत्यक्ष मान के बराबर ही है।

गणितीय संक्रियाएं एवं उनमें अन्तर्सम्बन्ध

गणित में चार मूलभूत संक्रियाएँ हैं। यह कहने में कोई अतिश्योक्ति नहीं कि गणित में गणना इन्हीं चारों संक्रियाओं के इर्द गिर्द घूमता है। परन्तु हम यह भी जानते हैं कि गणित अमूर्त विषय है, अतएव ये सभी संक्रियाएँ भी अमूर्त हैं। इन अमूर्त संक्रियाओं की समझ

पक्की करने के लिए मूर्त उदाहरणों का प्रयोग कर इनका मूर्तीकरण आवश्यक होता है। गणित की संक्रियाओं के संपादन में एक या एक से अधिक अवधारणाओं एवं कौशलों का भी उपयोग करना पड़ता है। अतएव आवश्यकता इस बात की है कि आरंभिक स्तर पर संक्रियाओं की समझ हेतु कौशलों व अवधारणाओं के उपयोग की समझ सुनिश्चित कर लिया जाए। हम अक्सर देखते हैं कि गणित की कक्षा में बच्चों को जब निम्नांकित सवाल दिए जाते हैं तो उनका उत्तर कुछ इस प्रकार मिलता है।

53	68
+ 34	+ 45
87	1013

यहाँ बच्चे पहले सवाल को आसानी से हल कर देते हैं किन्तु दूसरे सवाल को वह सही तरीके से नहीं कर पाए। इसके क्या कारण हो सकते हैं?

वे 8 और 5 के नीचे 13 तथा 6 व 4 को नीचे 10 लिखकर बताते हैं कि इनका जोड़ 1013 है। सोचें कि 68+45 की जोड़ नहीं कर पाने के क्या कारण हो सकते हैं?

जोड. की प्रक्रिया में एक कारण यह भी हो सकता है कि वे जोड़ की प्रक्रिया में शामिल किसी एक या अधिक अवधारणाओं एवं कौशलों को नहीं समझ पाए है। हमने इसके पूर्व संख्याओं, संख्यांकों, गिनती व स्थानीय मान से सम्बंधित अवधारणाओं की चर्चा की है।यह आवश्यक है कि जोड़ने, घटाने, गुणा और भाग संबन्धी अवधारणाएं विकसित करने के लिए गतिविधियों पर आधारित रूचिकर तरीकों की चर्चा की जाए। चारों संक्रियाओं के परस्पर सम्बंध पर चर्चा करने के साथ–साथ यह भी जानने का प्रयास किया जाए कि कक्षा में इन अवधारणाओं को सिखाने के दौरान बच्चों के मन में कौन–सी गलतफहमियां पैदा होती है? इस दौरान हम इस बात पर भी जोर देंगे कि बच्चों के साथ इन संक्रियाओं की शुरूआत ठोस वस्तुओं की सहायता से की जानी चाहिए।

जोड़ की समझ का विकास :

हम दैनिक जीवन में प्रतिदिन विभिन्न संदर्भों में जोड़ की क्रिया करते रहते हैं। बच्चे भी खाते–खेलते, जाने–अनजाने जोड़ (समूहों को मिलान) की संक्रियाएँ करते रहते हैं। आवश्यकता इस बात की है कि बच्चे इससे संबन्धित अवधारणाओं और भाषा समझ जाएँ। इस उद्देश्य की पूर्ति कैसे करें? इसके लिए शुरू में बच्चों को ठोस अनुभवों की ज़रूरत होती है। जैसे बच्चे को 2 पत्ते और 3 पत्ते देकर कह सकते हैं, ये 2 पत्ते हैं और ये 3 और पत्ते हैं तो बताओ कि कुल कितने पत्ते हैं।'' इसी तरह की क्रिया गोली, टॉफी, बिस्कुट, बटन, पत्थर इत्यादि से संख्या बदल बदल कर करा सकते हैं, पर ध्यान रहे कि बच्चे संख्या तथा वस्तु का नाम साथ बोले। जैसे 5 गोलियाँ, 3 टॉफीयाँ आदि। शुरू में शिक्षक उसकी मदद के लिए सवाल पूछ सकते हैं, जैसे तुम्हारे पास कितने बिस्कुट थे? मैंने तुम्हें कितने बिस्कुट और दिए? कुल कितने बिस्कुट हुए?

जब बच्चे अपने द्वारा की गई क्रिया का वर्णन करते हुए बोलने लगे कि ''2 गोलियाँ और 3 गोलियाँ बराबर 5 गोलियाँ'' तब शिक्षक बता सकते हैं कि इस क्रिया को जोड़ना

कहते हैं और 2+3=5 को बोर्ड पर लिख सकते हैं। इसी तरह के कई उदाहरणों के बाद बच्चा 3+2=5 को जानने लगता है।

वस्तुओं के समूहों को मिलाने के काफी अनुभवों के बाद ही बच्चे जोड़ के गुण समझ पाते हैं।

जैसे– 3 + 2 = 5 या 2 + 3 = 5

5 = 3 + 2, 1 + 4 = 2 + 3 आदि

प्रारंभिक कक्षाओं के बच्चों को खेल, कहानी, गतिविधि, रोल–प्ले, पियर लर्निंग इत्यादि के माध्यम से गणित की अमूर्त अवधारणा को सहजता से सीखते हैं। इनमें जोड़ की समझ बनाने में खेलों की भूमिका भी महत्वपूर्ण हैं।

क्रियाकलाप

1 एक शिक्षक दो बच्चों को या दो टोलियों को पासे और कंचे दे देते हैं, हर बच्चा या टोली के द्वारा पासा फेंका जाता है और पासे पर आनेवाली संख्या के बराबर कंचे उठा लिया जाता है। यह गतिविधि करने के बाद जिसके पास ज्यादा कंचे होते हैं, वही विजेता होता है।

''3 कंचे और 5 कंचे बराबर 8 कंचे' अर्थात 3+5=8

2 इसी तरह कार्ड के माध्यम से विभिन्न चित्रों का उपयोग करते हुए जोड़ की समझ विकसित की जा सकती है। शिक्षक बच्चों को एक कार्ड देते हैं जिस पर तीन चिड़ियाँ एक डाल पर बैठी हैं और कहते हैं कि इस पर दो चिड़ियाँ और आकर बैठ जाती है तो कौन सा कार्ड बनेगा? रखे हुए कुछ कार्ड जिस पर चिड़ियाएँ अलग–अलग संख्याओं में बैठी होती हैं, बच्चे उनमें से 5 चिडियों वाले कार्ड को उठाते हैं।

3 और 2 मिलकर बनते हैं 5 अर्थात, 3 + 2 = 5

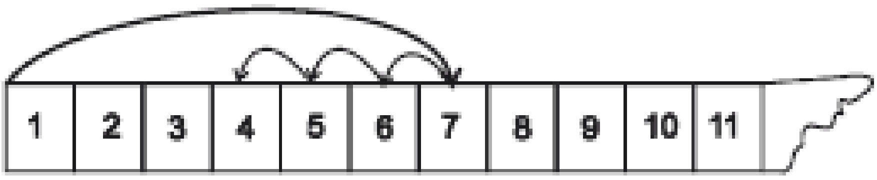
यहाँ हम देखते हैं कि बच्चों को जोड़ से परिचित कराने के तीन चरण हैं– 1– ठोस चीजों के संदर्भ में, 2– चित्रों की प्रस्तुति के संदर्भ में और 3– प्रतीकात्मक प्रस्तुति के संदर्भ मे, जैसे 3 टॉफी और 5 टॉफी मिलकर 8 टॉफी; 3+5 = 8

घटाने की समझ का विकास

घटाव की प्रक्रिया जोड़ की प्रक्रिया के विपरीत होती है। जोड़ की तरह घटाने से भी बच्चों का परिचय परिचित वस्तुओं के संदर्भ में ही कराया जाना चाहिए। उदाहरण के तौर पर 3 टॉफी में से 2 टॉफी निकालने या कम करने को कहा जा सकता है। इसी प्रकार लड्डूओं, चपातियों, कंकड़ों, गोलियों से संबंधित काफी अभ्यास कराने पर बच्चों में धीरे–धीरे घटाव की समझ विकसित होने लगती है। ध्यान देना है कि जब ये क्रिया करायें

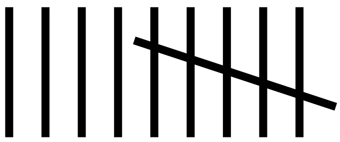
तो इससे जुड़े विभिन्न शब्द बच्चे भी दुहराते जायें। ऐसी कहानियाँ और खेल भी सोचे जा सकते हैं जो बच्चों की समझ विकसित करने में मददगार हो। जैसे– मुन्नी के घर में 7 लोग रहते थे। 3 लोग बाहर चले गये। तो 7 घटाव 3, यानी 4 लोग घर पर रह गये।

संख्या पट्टी (Number Strip) का भी इस्तेमाल घटाव की समझ विकसित करने में किया जा सकता है। इससे बच्चों में उल्टी तरफ से गिनने की क्षमता का विकास किया जा



सकता है। उदाहरण के तौर पर 7 में से 3 घटाने का अर्थ यह होगा कि पहले हम 7 तक गिनें और फिर 3 खाने वापिस जाएँ।

इसके अलावा बच्चे खड़ी रेखाएँ खींचकर भी घटाने की क्रिया कर सकते हैं। इसके लिए बड़ी संख्या के बराबर रेखाएँ खींचकर जितने को घटाना है, उतने काटकर शेष को गिन लेते हैं जैसे 9 में से 5 घटाने के लिए निम्न तरीके अपनाते हैं:



शेष = 4

यहाँ रेखा की जगह हम बिंदु (.) भी ले सकते हैं।

जब बच्चे को घटाने की प्रक्रिया समझ में आ जाए तो उन्हें घटाने का संकेत बताया जा सकता हैं। यहाँ यह भी आवश्यक है कि शब्द 'घटाव' तथा प्रतीक '–' की पहचान के लिए उन्हें बार–बार इनके उपयोग का मौका मिले। साथ ही वह घटाव से संबन्धित दैनिक जीवन के सवालों को भी हल करे।

घटाव से सम्बंधित बच्चों के संदर्भ पर आधारित इबारती सवाल दिए जाने चाहिए।इबारती सवालों की चार स्थितियां हो सकती हैं–

- निकालने या घटाने पर शेष (बची हुई) चीजों की संख्या प्राप्त करना– जैसे रामू के पास 10 टॉफियाँ थी वह 3 टाफियाँ खा गया, तो कितनी टॉफियाँ बचीं।
- दो समूहों या संख्याओं का अन्तर पता करना। जैसे– मुन्नी के पास 10 टॉफियाँ हैं तथा मुन्ना के पास 6 टॉफियाँ हैं, तो मुन्ना के पास मुन्नी से कितनी कम टॉफियाँ हैं।
- घटाई गई या निकाली गई राशि का पता करना। जब मूल राशि तथा शेष बची राशि पता हो, जैसे– मुन्नी के पास 10 टाफियाँ थीं और अब सिर्फ 4 बची हैं, तो वह कितनी टाफियाँ खा गई?
- पूरक जोड़ (कितने और) वाले प्रश्न, जिसमें किसी संख्या को बढ़ाकर किसी अन्य संख्या में बदलने के लिए कितना जोड़ना होगा। जैसे– किसी बॉक्स में 10 पेंसिलें रखी जा सकती हैं। इस बॉक्स में पहले से 2 पेंसिले हैं तो और

> कितनी पेंसिलें रखनी होंगी? पूरक जोड़ के प्रश्नों में बच्चे कों ज्यादा कठिनाई होती है, क्योंकि और ''कितना'' का संबन्ध जोड़ से होता है। ऐसे में बच्चे दिए गए अंकों को जोड़ देते हैं।

किन्तु कुछ ऐसे बच्चे भी होते हैं, जो घटाने के सारे सवालों को पूरक जोड़ के सवाल के रूप में हल करते हैं। जैसे '12 में 8 घटाओ' के प्रश्न को 8 में क्या जोड़ने से 12 प्राप्त होगा' के रूप में हल करते हैं। प्रायः दुकानदार इसी विधि से मन में हिसाब लगाते हुए शेष रूपये पैसे को लौटाते हैं, जैसे– 500–370 पता करने के लिए 370 में 30 जोड़कर 400 बना लेते हैं फिर 100 जोड़ कर 500 बना लेते हैं। 500–370=30+100 हो जाता है।

गुणा की समझ का विकास

गुणा की संक्रिया का मतलब यह होता है कि हम दी गई संख्या को निश्चित बार उसी में जोड़ें। दूसरे शब्दों मे बार–बार जोडने की संक्षिप्त क्रिया गुणा है। आम भाषा में गुणा शब्द का अर्थ वृद्धि से लगाया जाता है। अर्थात 4 गुणा 3 का अर्थ 4+4+4 होता है। लिहाजा गुणा सिखाना शुरू करने के पहले ज़रूरी है कि बच्चे कुछ हद तक जोड़ की संक्रिया को जानते हो। वह जोड़ को लेकर कोई परेशानी महसूस न करते हों तथा आसान संदर्भों में इसका अर्थ समझने लगें तो गुणा सीखने की प्रक्रिया प्रारम्भ की जा सकती है। गुणा की समझ विकसित करने के लिए जोड़ की समझ के अलावा बच्चों को बराबर मात्रा के समूह बनाना तथा इन समूहों को जोड़ना आना चाहिए। इसके बाद ही गुणा से औपचारिक रूप से परिचय कराना चाहिए।

आमतौर से बच्चे गुणा के तथ्य याद कर लेते हैं तथा तथ्यों को एक दूसरे से संबंधित नहीं कर पाते। इसलिए बच्चे को बराबर मात्रा के समूहों को जोड़ने की क्षमता हासिल करने में हमें मदद करनी होगी। बच्चों से इसका शुरूआती परिचय एक संक्रिया के तौर पर नहीं, बल्कि ठोस चीजों के साथ गतिविधियों के रूप में होना चाहिए। जैसे 3–3 चीजों वाले 5 समूहों का जोड़। इस तरह की गतिविधि के साथ–साथ खेलों, कहानियों, संख्या पट्टी, संख्या कार्डों व अन्य गतिविधियों द्वारा बच्चे धीरे धीरे बराबर मात्राओं वाले समूहों को नियमित अन्तर देकर क्रमानुसार गिनने लगते है। इसे छोड़–छोड़ कर गिनना (Skip counting) कहते हैं।

बच्चे खेलो, कहानियों व अन्य गतिविधियों के जरिए छोड़–छोड़ कर गिनने का अभ्यास कर सकते हैं। मसलन, वे 'बच' खेल सकते हैं।

क्रियाकलाप

> बच्चे एक गोल में बैठ जाते हैं और क्रम से गिनती बोलते हैं। हर बच्चे एक संख्या बोलते हैं। नियम यह है कि जिस बच्चे पर किसी पूर्व निर्धारित संख्या का गुणज आता है, वह संख्या बोलने की बजाय 'बच' कहते है। जैसे–अगर निर्धारित संख्या 4 है, तो पहला बच्चा 1 कहेगा, दूसरा 2 कहेगा, अगला बच्चा 3, बच, 5, 6, 7 और

फिर बच, वगैरह कहेंगे। अगली बारी में कोई और संख्या ली जाए। धीरे–धीरे बच्चों के दिमाग में इन गैरहाजिर संख्याओं का एक पैटर्न बनने लगता है। बराबर मात्रा के समूहों की गिनती तथा बच जैसी गतिविधियों से यह पैटर्न बनने में मदद मिलती है। इससे बच्चों को नियमित बराबर अंतर देकर गिनती करने की ओर बढ़ने में मदद मिलती है।

बच्चों को इस तरह से ठोस वस्तुओं के ज़रिए गुणा से परिचित कराते हुए हमें उनसे लगातार बातचीत करते जाना चाहिए कि वे क्या कर रहे हैं। इस तरह से उनमें समझ विकसित होगी कि गुणा करने का मतलब बारम्बार जोड़ना होता है। गुणा का औपचारिक प्रतीक '×' बच्चों को तभी बताना चाहिए जब वे यह समझ जाए कि गुणा होता क्या है। इसी प्रकार से गुणनफल, गुणक आदि जैसे औपचारिक शब्द बच्चों को थोड़ा आगे चलकर ही बताए जाने चाहिए और वह भी इनका उपयोग विभिन्न व्यावहारिक उदाहरणों में करके समझाए जाने चाहिए।

गुणा की क्रिया में होने वाली गलतियाँ

उदाहरण : बच्चों द्वारा किए गए निम्न गुणन संक्रिया पर गौर करें :

22		
547	26	35
×4	×31	×5
2848	66	1525

जब एक बच्ची से पूछा गया कि तुमने तीसरा गुणा कैसे किया तो उसने कहा, 5 को 5 से गुणा किया तो 25 आया तो वहाँ पर 25 लिख दिया तथा आगे 5×3=15 को लिख दिया। हम यह जानने का प्रयास करें कि ये गलतियां कुछ बच्चों ने क्यों की? गुणा के एल्गोरिद्म में कौन–सी प्रक्रियाएं शामिल हैं और यह विधि क्यों सही जवाब देती है?

इस ऐल्गोरिद्म को समझने के लिए स्थानीय मान, गुणा का अर्थ, हासिल, बंटन नियम (Distributive Law) की समझ ज़रूरी है। पूर्व में स्थानीय मान, गुणा का मतलब एवं हासिल की चर्चा की जा चुकी है। यहाँ जोड़ के सापेक्ष गुणा में बंटन नियम को देखें। सामान्य रूप में, किन्हीं तीन संख्याओं a, b और c के लिए नियम इस तरह लिखा जाएगा–

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$(a - b) \times c = (a \times c) - (b \times c)$$

जैसे– $(30 + 7) \times 9 = (30 \times 9) + (7 \times 9)\,) = 270 + 63 = 333$

$$(40 - 3) \times 9 = (40 \times 9) - (3 \times 9) = 360 - 27 = 333$$

बच्चों को यह नियम समझने में हम मदद कैसे करें? इसके लिए ठोस वस्तुओं द्वारा छोटी–छोटी संख्याओ के बंटन के उदाहरण इस प्रकार देने होंगे कि बच्चे स्वयं नियम खोज पाएँ। इसके लिए 4, 4 गोलियों की 7 थैलियाँ बना लें। तीन थैलियों को अलग और चार थैलियों को अलग रखें। अब बच्चों से पूछें सभी थैलियों में कुल कितनी गोलियाँ हैं।

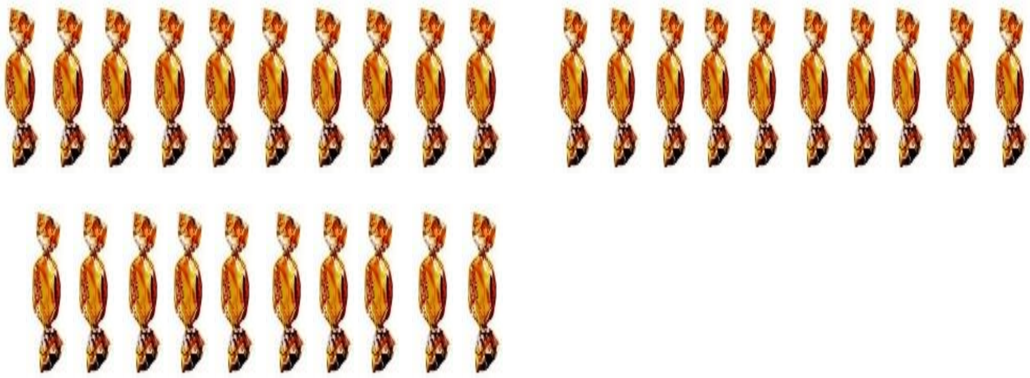
गौर करें बच्चे कैसे गिनते हैं 7×4 या 3×4, 4×4 दोनों तरीकों का अभ्यास कराते हुए दोनों के अन्तर पर चर्चा कराइए। इसी तरह फूलों के गुच्छे, पंक्तियों, कतारों के माध्यम से भी इस अवधारणा का विकास कराया जा सकता है। विभिन्न गतिविधियों एवं उदाहरणों के माध्यम से बच्चे धीरे–धीरे यह समझने लगते हैं कि जब किसी 2 अंक वाली संख्या को 1 अंक वाली संख्या से गुणा करना हो तो उसे दहाई व इकाई में बाँट लेते हैं। इन गुणनफलों को आपस में जोड़ने पर सही उत्तर मिल जाता है। जैसे–

$$12 \times 3 = (10\times3)+(2\times3)$$
$$= 30+6 = 36$$

हमें ध्यान देना होगा कि जब बच्चे गुणा सीख रहें हों तो बार–बार बंटन की बात पर लौटना होगा तभी धीरे–धीरे अवधारणा को समझ पायेंगे।

भाग की समझ का विकास

कुछ लोग भाग को गणित की चार बुनियादी संक्रियाओं में सबसे कठिन मानते हैं। क्या हम इससे सहमत हैं? क्या व्यावहारिक जीवन में अन्य संक्रियाओं की अपेक्षा भाग के मौके कम आते हैं। जब कक्षा 5 के बच्चों से 30 टॉफियों को 3 बराबर भागों में बाँटने के लिए कहा गया, तो अधिकांश बच्चों के जवाब सही थे।



किन्तु जब बच्चों से पूछा गया कि 30 टॉफियों में से 3, 3 टॉफियाँ बाँटने पर कितने बच्चों को टॉफियाँ मिलेंगे तो अधिकांश बच्चे चुप रहे।

वस्तुतः भाग की इन दोनों स्थितियों के परिचित संदर्भों में समझ विकसित नहीं होने के कारण बच्चे इबारती प्रश्नों में आसानी से यह नहीं पहचान पाते कि कब भाग देना है और किस संख्या से किस संख्या में भाग देना है।

हम बच्चों में भाग की विभिन्न स्थितियों की समझ विकसित करने के लिए क्या करें?

एक स्कूल के शिक्षक को यक़ीन है कि ठोस चीजों के साथ आसान गतिविधियाँ कराने से बच्चों में भाग की समझ विकसित होती हैं।

उदाहरण के तौर पर 20 बीजों/पंत्तियों/कंकड़ों को 4–4 के समूह में बच्चों से रखवाएँ और समूहों की संख्या गिनवाएँ, फिर बच्चों से पूछें 20 में कितने 4 हैं या 20 में से 4 को कितने बार घटाया जा सकता है।

$$\left.\begin{array}{r} 20 \\ -4 \\ \hline 16 \\ -4 \\ \hline 12 \\ -4 \\ \hline 8 \\ -4 \\ \hline 4 \\ -4 \\ \hline 0 \end{array}\right] \text{5 बार}$$

अभी तक हमने 'शून्य' शेष की चर्चा से भाग की समझ विकसित करने का प्रयास किया है। 7 को 3 से भाग देने पर शेष क्या रहेगा? जैसे सवालों को दैनिक जीवन एवं ठोस उदाहरणों से समझ को पुख्ता किया जा सकता है। उदाहरण के तौर पर मोहन 9 टाफियाँ खरीदता है और 4 बच्चों में बराबर–बराबर बाँटता है, तो उसके पास कितनी टॉफियाँ बची? बच्चों के सामने ऐसे कई उदाहरण रखे जा सकते हैं। किन्तु ध्यान रहे कि बच्चों के बीच भागफल, शेष की चर्चा होती रहनी चाहिए। साथ ही, बच्चों से ऐसी समस्याएँ बनाने को कहा जा सकता है, जिसमें 'शेष' आते हों। धीरे–धीरे सवालों में आने वाली संख्याओं को बड़ा किया जा सकता है। ये गतिविधियाँ समूहों में अलग–अलग संख्याओं पर तथा अलग–अलग संदर्भ में दोहराई जा सकती है।

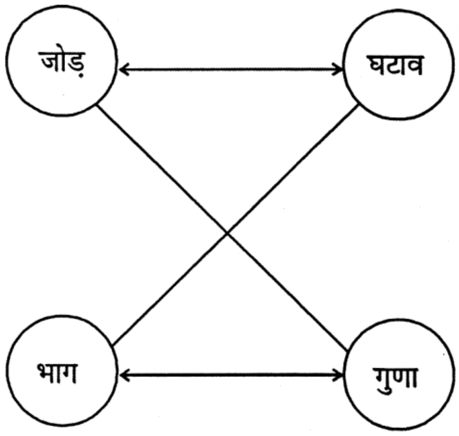
संक्रियाओं में अन्तर्सम्बन्ध

अभी तक हमने चारों मूलभूत संक्रियाओं, यथा जोड़, घटाव, गुणा और भाग की चर्चा बच्चों में संक्रियाओं की अवधारणा विकसित करने के रूप में की है। किन्तु बच्चों को इस बात से भी अवगत कराने की आवश्यकता है कि इन संक्रियाओं के बीच अन्र्तसंबन्ध होते हैं। हमें संक्रियाओं के बीच निहित अन्र्तसंबन्धों से संबंधित निम्नांकित प्रश्नों पर ध्यान देने की आवश्यकता है;

1. जोड़ और गुणा की संक्रियाएँ परस्पर कैसे समान है?
2. घटाव और भाग की संक्रियाएँ एक दूसरे से कैसे संबन्धित हैं?
3. क्या जोड़ और घटाव एक दूसरे के विपरीत प्रक्रिया है?
4. गुणा और भाग परस्पर विपरीत संक्रियाएँ कैसे हैं?

5. संक्रियाओं के अंतर्संबंध, संक्रियाओं की अवधारणा विकसित करने में कैसे मददगार हैं?
6. क्या बच्चे एक साथ एक से अधिक संक्रियाओं को सीख सकते हैं?

हम विभिन्न संक्रियाओं के अन्तर्सम्बन्धों को निम्न रेखाचित्र द्वारा समझ सकते हैं और बच्चों को समझाने का प्रयास भी कर सकते हैं।



हम देख सकते हैं कि जोड़ने की प्रक्रिया घटाने की प्रक्रिया की विपरीत है। जोड़ में किसी संग्रह में कुछ और मिलाकर (डालकर) उसे बड़ा बनाते हैं जबकि घटाव में उस संग्रह में से कुछ निकालकर उसे छोटा करते हैं– ये परस्पर विपरीत प्रक्रियाऐं हैं।

5+3 = 8 (मिलाना)

8–3 = 5 (निकालना)

स्पष्टतः घटाव सिखाने के लिए यह ज़रूरी नहीं है कि जोड़ का गहरा ज्ञान हो। जब बच्चे आसान परिस्थितियों में जोड़ और घटाव का अर्थ समझ लें तथा + और – के प्रतीक से परिचित हो जायें तो + और – के बीच संबन्ध समझाने के लिए बच्चों को कई गतिविधियाँ दी जा सकती हैं।

हम देख चुके हैं कि 4+4+4 = 4 × 3 = 12 = 3 ×4 = 3 + 3 + 3 + 3 इस तथ्य से स्पष्ट है कि गुणा जोड़ की लगातार प्रक्रिया है जिसे संक्षिप्त रुप में 4 × 3 या 3 × 4 लिखा जाता है।

भाग को घटाव के लगातार प्रक्रिया के रूप में देखा जा सकता है। शुरू में कई बच्चे बारम्बार घटाने का सहारा लेते हैं। जैसे 8÷2=........... बनायें या 8 में 2 कितनी बार आएगा? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए वे 2 का पहाड़ा 8 तक बोलते हैं और कहते हैं 8 भाग 2 बराबर 4 होगा। अर्थात्

भाग की संक्रियाएँ सीखते समय बच्चे × और ÷ के बीच संबन्ध को समझ सकते हैं और बच्चे दोनों संक्रियाएँ साथ–साथ सीखते हैं। गुणा और भाग परस्पर विपरीत संक्रियाएँ हैं। जैसे–

$4 \times 3 = 12$

$12 \div 4 = 3$ $\qquad$ $12 \div 3 = 4$

काफी समय तक गतिविधियों एवं अन्य अभ्यासों से गुजरने के बाद बच्चे $27 \div 3 = 9$ जैसे कथन को समझने लगते हैं जैसे कि:–

- 27 में 3 नौ बार आता है।

  000 000 000 000 000 000 000 000 000

- 27 चीज़ों को 3 बराबर भागों में बाँटा जाय तो एक भाग में 9 चीजें होंगी।

  000000000 000000000 000000000

- 27 चीजों के समूह में 3–3 के 9 समूह होंगे।

  000 000 000 000 000 000 000 000 000

- 27 में 3 को 9 बार घटाया (निकाला) जा सकता है।

  000 000 000 000 000 000 000 000 000

  1 2 3 4 5 6 7 8 9

- 9 तिया 27 होते हैं।

  000000000 000000000 000000000

- 3 नवाँ 27 होते हैं।

  000. 000 000. 000. 000 000. 000. 000 000

अभ्यास के प्रश्न

1. कब कहेंगे कि किसी बच्चे को गिनती की समझ हो गई है? गिनने में मुख्य प्रक्रियाओं को उदाहरण के साथ समझाइए।
2. संख्या के विकास में वर्गीकरण से क्या अभिप्राय है? बच्चों में वर्गीकरण की समझ विकसित करने के लिए आप किन–किन गतिविधियों का संचालन कर सकते हैं? इनमें से किन्हीं तीन गतिविधियों का वर्णन करें।

3. मूर्त वस्तुओं की सहायता से संख्या की समझ विकसित करने की एक गतिविधि के आयोजन की प्रक्रिया का उल्लेख करें।

4. जोड़ एवं गुणा तथा घटाव एवं भाग की संक्रियाएँ एक दूसरे से कैसे संबंधित हैं? उदाहरण देते हुए समझाइए।

5. दो अंकीय संख्याओं के गुणा में हम दहाई वाले अंक से गुणा करते समय एक स्थान छोड़कर लिखते हैं। ऐसा करने के कारण एवं इसके पीछे की अवधारणा को बच्चे को कैसे समझाएँगे?

6. निम्नांकित पर टिप्पणी लिखिए–

क संख्या रेखा व संखाएँ

ख संख्या की अवधारणा में एक–एक की संगति

7. स्थानीय मान की अवधारणा को सरल बनाने के लिए आप कौन–कौन सी शिक्षण सामग्री का उपयोग करेंगे? किसी एक की सहायता से किसी संख्या के अंकों के स्थानीय मान समझाने की विधि का वर्णन करें।

8. संख्या रेखा की सहायता से जोड़ की अवधारणा विकसित कीजिए।

9. आप कब कह सकते हैं कि बच्चे को गिनती की समझ हो चुकी है?

10. आपके विचार से गिनती सिखाने की क्या प्रक्रिया हो सकती है ? अपना तर्क प्रस्तुत कीजिए।

11. नीचे लिखे कथनों में कौन सही है और कौन गलत ? गलत वाक्यों को सही करने के लिए आप क्या बदलाव करेंगे ?

क यदि कोई बच्चा गिन नहीं सकता, तो वह संख्याओं के नामों को एक क्रम में बोल ही नहीं सकेगा।

ख यदि कोई बच्चा गिन नहीं सकता, तो संभव है कि वह यह नहीं समझ पाया हो कि दी गई वस्तुओं और संख्याओं के नामों की जोड़ी कैसे बनाई जाए?

12. आप ऐसी दो गतिविधियों का निर्माण कीजिए जिनसे बच्चों में वर्गीकरण की क्षमता का विकास करने में मदद मिले।

13. बच्चों के समक्ष अगर अनुक्रम संबंधी गतिविधियाँ करते समय 'पहली' आखिरी, पहले वाली, 'बाद वाली' जैसे शब्दों का इस्तेमाल किया जाए तो इसका क्या प्रभाव होगा?

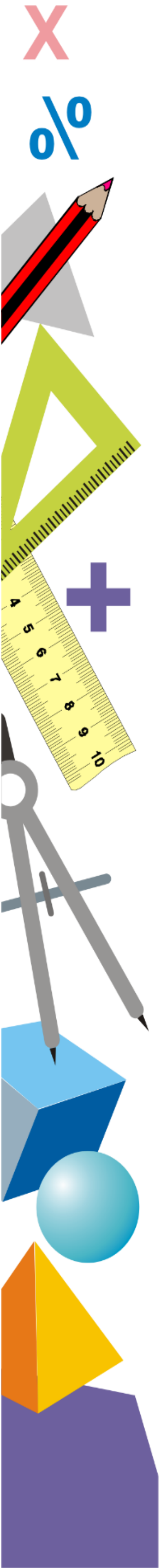
14. आपकी समझ से संख्या ज्ञान से पहले पूर्व संख्या अवधारणाओं की समझ बनाना क्यों आवश्यक है?

15. क्या आप दिए गए एक स्थानीय मान सारणी का अवलोकन कर किसी संख्यांक में सम्मिलित अंकों के स्थानीय मान का निर्धारण कर सकते हैं ? अपने विचारों को तर्कों की सहायता से स्पश्ट करें।

16. 28×17 हल करने के लिए क्या–क्या तरीके हो सकते हैं? गुणा इकाई स्थान से क्यों शुरू करते है तथा गुणा की दूसरी पंक्ति में एक स्थान खाली (या, 0) क्यों रखते हैं।

परियोजना कार्य

1. स्वयं एक–एक गतिविधि सुझाइए जिनसे बच्चे आकार, वजन या किसी अन्य गुण के आधार पर अनुक्रम बनाएँ ।
2. एक बच्ची 203 को तेईस पढ़ती है। उसे अपने गलती का अहसास कराने के लिए आप क्या गतिविधियाँ सुझा सकते हैं।
3. क्या आप बच्चों में इकाई, दहाई और सैकडें की समझ विकसित करनें के लिए कोई गतिविधि का उपयोग कर सकते हैं? कैसे?
4. कक्षा 2 या 3 में पढ़ रहे बच्चों से जोड़ने व घटाने के कुछ सवाल बनवाइए। इन सवालों में कुछ सवाल खड़े व कुछ आड़े रूप में रखिए। अवलोकन कीजिए कि वे इन समस्याओं को हल करने के लिए कौन–कौन से तरीके अपनाते हैं। बच्चों द्वारा अपनाए गये तरीकों को नोट कीजिए। साथ ही, यह भी पता करने की कोशिश कीजिए कि इन्हें हल करते समय उन्हें कौन–कौन सी दिक्कतें आई और उन्होंने किस तरह की गलतियां की?
5. आप कक्षा 4 या 5 के किसी बच्चे को 38×4 हल करने को दें। अब तुरन्त बाद उससे 39×4 का हल पूछें। बच्चे द्वारा किए गए कार्य का अवलोकन करें। क्या बच्चा अपने पहले हल से दूसरे का हल तुरन्त निकाल लेता है?



इकाई 4

मापन एवं आँकड़े

- परिचय
- मापन का अर्थ
- मापन और अनुमान
- अमानक एवं मानक इकाईयाँ
- मापन के दौरान होने वाली गलतियाँ
- लम्बाई, क्षेत्रफल, धारिता, आयतन तथा समय का मापन
- आँकड़ों का प्रत्यय तथा प्रस्तुतीकरण
- अभ्यास के प्रश्न
- परियोजना कार्य

परिचय

गणना, मापन एवं आँकड़े संबंधी गणितीय समस्याओं का सामना हमें प्रतिदिन करना पड़ता है। मापन गणित का एक ऐसा क्षेत्र है जिसकी आवश्यकता हमें कदम–कदम पर पड़ती है। घड़ी में समय देखना हो या डेयरी अथवा दुकान से दूध लाना हो या मोटर–साइकिल या कार में डीजल या पेट्रोल भरवाना हो या बाज़ार में कपड़े खरीदना हो या एक स्थान से दूसरे स्थान के बीच की दूरी का अनुमान लगाना हो या दूरी सटीकता के साथ ज्ञात करना हो, घर में चाय बनाने के लिए दूध, पानी, चीनी की मात्रा का निर्धारण करना हो या घर मकान बनाने के लिए नक्शा बनाना और क्षेत्रफल ज्ञात करना हो और इसे बनाने के लिए आवश्यक सामग्रियों का अनुमान लगाना हो, इन सब कार्यों में हमें मापन की आवश्यकता पड़ती है। इसी प्रकार के अन्य बहुत से कार्यों में मापन का उपयोग हम करते हैं।

वास्तव में किसी वस्तु को मात्रात्मक रूप में व्यक्त करना 'मापन' कहलाता है। किसी वस्तु की ख़रीददारी करते समय हम एक निश्चित मात्रा में वस्तु खरीदते हैं, अर्थात्, वस्तु के मापन के बिना वस्तु–क्रम संभव नहीं है। इसी प्रकार समय के मापन की भी हमें आवश्यकता पड़ती है जैसे–किसी कार्य को पूरा करने में कितना समय लगेगा या किसी व्यक्ति ने कितने समय तक कार्य किया या किसी की आयु बताना हो तो हमें व्यतीत हुए समय की मात्रा का निर्धारित करना होता है अर्थात हमें समय की माप की आवश्यकता पड़ती है। एक और महत्वपूर्ण चीज का हम मापन करते हैं वह है मुद्रा या राशि। खरीदी हुई वस्तु की मात्रा के बदले में एक निश्चित राशि का भुगतान हम करते हैं अर्थात मुद्रा का भी निर्धारण या मापन किया जाता है। वस्तु की लंबाई, वजन, आयतन या क्षेत्रफल का आकलन करना हो, मुद्रा या समय का निर्धारण करना हो ये सभी किसी न किसी रूप में एक दूसरे से जुड़े हुए होते हैं जैसे– विद्यालय में दौड़ प्रतियोगिता का आयोजन किया जा रहा हो तो दौड़ की लंबाई का मापन और समय का मापन साथ–साथ करना होता है या वस्तु खरीदते समय वजन और उसके अनुरूप वस्तु की कीमत का मापन साथ साथ करना होता है। मापन हमारे गणितीय सोच को बढ़ावा देता है तथा गणितीय ढंग से समस्याओं का समाधान ढूँढने के लिए प्रेरित करता है। मापन की हमारे जीवन में उपयोगिता एवं महत्व को देखते हुए प्राथमिक स्तर से ही मापन की प्रक्रियात्मक और अवधारणात्मक पक्षों से बच्चों का परिचय कराना आवश्यक है।

बच्चों में मापन की गणितीय अवधारणा की समझ विकसित करना तथा मापन की अवधारणाओं का दैनिक जीवन के कार्यों को पूर्ण करने के लिए सटीकता के साथ उपयोग करने के लिए आवश्यक कौशलों का विकास करना अत्यंत महत्वपूर्ण हो जाता है। इस इकाई में मापन और मापन से जुड़े विभिन्न अवधारणाओं तथा मानक और अमानक मापन विधियों, उपकरणों के बारे में तथा मानक और अमानक मापन इकाईयों में भिन्नताओं के बारे में चर्चा की गई है। साथ ही लंबाई, भार, मुद्रा, धारिता एवं समय व क्षेत्र की माप की अवधारणात्मक एवं प्रक्रियात्मक पहलुओं की समझ विकसित करना तथा आँकड़ों की अवधारणा की समझ तथा उनके प्रस्तुतीकरण के विभिन्न तरीकों से परिचित कराया जाएगा।

मापन का अर्थ

मापन एक ऐसा कौशल है जो हर व्यक्ति के जीवन में जरूरी होता है। मापन को जानने के लिए हमें तीन बातों को समझना जरूरी है। ये बातें पूर्व अनुभव की तरह होती है– संक्रमिता (Transitivity), संरक्षण व इकाई के सिद्धान्त। जब तीन वस्तुएँ दी गयी हो– A, B तथा C जिसमें A, B से बड़ा हो तथा B, C से बड़ा हो, तो A, C से भी बड़ा होगा। हमने A व C के मध्य का संबंध, इनके B के साथ संबंध के आधार पर किया। इस तरह की तुलना संक्रमिता के सिद्धान्त में मुख्य भाग अदा करती है। इसी तरह एक बड़े गिलास में भरे जल की मात्रा दो छोटे गिलासों में डालने पर नहीं बदलती है तथा इसी तरह एक काग़ज़ का पृष्ठीय क्षेत्रफल उसके दो टुकड़ों के पृष्ठीय क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है। इससे हमें संरक्षण के सिद्धान्त के बारे में पता चलता है। जब किसी मात्रा जैसे– लम्बाई, भार, आयतन आदि का मापन किया जाता है तो इसकी एक अन्तर्राष्ट्रीय इकाई होती है जो कि हर जगह मान्य हो। जैसे– पानी की मात्रा को लीटर में मापा जाता है तथा यह इकाई दुनिया में हर जगह मान्य होती है।

मापन को जानने व समझने के दो पायदान होते हैं–

1. मापन का पूर्ण अनुभव हो जो कि उन्हें मापन के विभिन्न क्षेत्रों की अवधारणा समझा सकें।
2. इकाइयों की सहायता से मापन के विभिन्न क्षेत्रों को व्यक्त करना आना चाहिए।

आकार (Size) का अनुमानः

विभिन्न चीजों के लिए आकार (Size) की अवधारणा की समझ भी एक महत्वपूर्ण बात है। ज्यादातर हम यही देखते हैं कि शुरूआती जुड़ाव तीन विमा वाली वस्तुओं के साथ होता है।

जैसे :

त्रिविमीय चीजों की तुलना, उनके 2–विमाओं वाले चित्रण से करने पर बच्चे विभिन्न 2–विमीय आकृतियों व इनके गुणधर्मों से परिचित हो जाते हैं। ब्लैकबोर्ड, डस्टर, किताब, तार, छड़ी, कागज़, चौकोर डिब्बा, अलमारी, बेलनाकार डिब्बे आदि चीजों के उनकी विमाओं के अनुसार तीन समूहों में बाँटने जैसी गतिविधियों से यह समझने में मदद मिलती है कि एक विमीय चीजों के साथ केवल एक संख्या, लम्बाई जुड़ी होती है, जबकि दो–विमीय चीजों के साथ लम्बाई व चौड़ाई होती है और तीन विमीय चीजों के साथ लम्बाई चौड़ाई व ऊँचाई तीनों जुड़ी होती है।

अतः विभिन्न वस्तुओं को उनकी विमाओं के आधार पर अलग–अलग समूहों में बाँट कर उनसे संबंधित, लंबाई, चौड़ाई एवं उँचाई के मापन संबंधी समझ विकसित करनी चाहिए। सामान्य बच्चे एक आकृति वाली चीजों जैसे– पेन, पेंसिल, किताब, कॉपी इत्यादि की साइज की तुलना तो कर लेते हैं किन्तु अलग–अलग आकृति या विमाओं वाली चीजों के बीच तुलना करना थोड़ा मुश्किल लगता है। इसके लिए हम अलग–अलग आकृति वाली चीजों

के बीच तुलना करने के लिए एक को दूसरे पर ढक कर, उनमें द्रव भर कर उनकी लंबाई, मोटाई आदि की तुलना कर सकते हैं।

आपके अनुसार क्या 9 वर्ष की किसी बच्ची को 2 मीटर ऊपर लगे आम को तोड़ने के लिए कितनी बड़ी ड़ंडी चाहिए? इसी प्रकार वह क्या 1 किलोग्राम दूध लाने के लिए सही बर्तन का चुनाव कर पाएगी? क्या वह अपना खिलौना पैक करने के लिए सही आकार (Size) का डिब्बा चुन पाएगी? इन सारी क्रियाओं में आकार (Size) की अवधारणा आती है।

एक बच्ची शायद दो पेंसिलों में से बड़ी वाली पेंसिल या दो पत्थरों में से ज़्यादा वजनी पत्थर का पता लगा ले। परन्तु ऐसी दो चीजों की तुलना करने में कठिनाई होगी किसकी आकृति अलग–अलग हो या जो एक से ज़्यादा विमीय हो।

दैनिक जीवन में बच्चे बड़ी, छोटी, लम्बी, मोटी, पतली, दुबली, भारी इत्यादि शब्दों का इस्तेमाल चीज़ों की विशेषता बताने के लिए करते हैं।

अगर कोई दो छड़े चित्र–1 जैसी स्थिति में रखी हैं तो वे बता देंगे कि दोनों बराबर हैं परन्तु चित्र–2 जैसी स्थिति में रखे तो शायद वह गलत उत्तर दें।

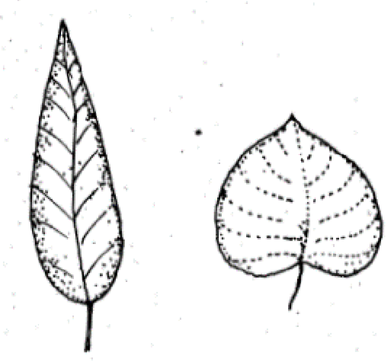
चित्र–1

चित्र–2

क्रियाकलाप

दो पत्तियाँ लिजिए। एक पत्ती ज्यादा लम्बी व दूसरी ज्यादा चौड़ी हो।

दोनों में से कौन–सी पत्ती ज़्यादा बड़ी है। आमतौर पर बच्चे ज़्यादा लम्बी पत्ती को बड़ी बताते हैं। परन्तु आप लम्बी पत्ती को चौड़ी पत्ती पर रखकर, अतिरिक्त हिस्सा काट ले। अब काटे हुए हिस्से को चौड़ी पत्ती के खुले हिस्से पर फैलाकर दिखा सकते हैं। यदि इस तरह करने पर चौड़ी पत्ती पूरी तरह ढ़क जाए और लम्बी पत्ती का कुछ हिस्सा फिर भी शेष रहे तो लम्बी पत्ती ज़्यादा बड़ी है। परन्तु यदि चौड़ी पत्ती का कुछ हिस्सा खुला ही रह जाए तो चौड़ी पत्ती ज़्यादा बड़ी है। इससे क्षेत्रफल की अवधारणा का औपचारिक रूप में परिचय कराए बगैर ही कुछ अंदाजा हो जाएगा।



क्रियाकलाप

> अलग–अलग आकार के काँच के बर्तन लीजिए और बच्चों से पूछिए कि कौन ज्यादा बड़ा है?
>
> बच्चों से ऐसे प्रश्न पूछने पर वे भ्रमित हो जाते हैं। यदि वे न बता सके तो किसी एक बच्चे से एक बर्तन में पानी भरवाएँ। फिर इस पानी को दूसरे बर्तन में डालें। अगर बर्तन का पूरा पानी डालने के बाद भी दूसरे बर्तन में जगह बच जाती है तो बच्चों से बड़ा–छोटा के लिए पुनः प्रश्न करें। जैसे– किसमें ज्यादा पानी अँटा? किसकी धारिता ज्यादा है? आदि।

क्या साइज की तुलना करने के लिए यह सबसे उपयुक्त विधि है? इस पर विचार करें। क्या हम विभिन्न वस्तुओं की साइज की तुलना करने के निर्धारित माप वाले मापकों का उपयोग कर सकते हैं? क्या ये मापक बिल्कुल ठीक–ठीक तुलना करने के लिए सबसे उपयुक्त स्रोत हैं? विचार करें।

दो चीजों के साइज की तुलना करना मापन का पहला कदम है। आकार (Size) की तुलना कई तरीकों से की जा सकती है।

1. देखकर।
2. चीजों को एक दूसरे के ऊपर रखकर (अध्यारोपण)।
3. परोक्ष तरीकों से।
4. गैर मानक इकाइयों के उपयोग से।
5. मानक इकाइयों के उपयोग से।

प्रारंभ में मापन हेतु हम पहले दो तरीकों का प्रयोग कर बच्चों की मापन संबंधी समझ विकसित कर सकते हैं। तत्पश्चात् गैर मानक इकाईयों का प्रयोग और अंत में मानक इकाईयों का प्रयोग कर मापन की सटीक समझ विकसित की जा सकती है।

लम्बाई का मापन

कक्षा 5 के विद्यार्थियों को गणित की प्रश्नोत्तरी प्रतियोगिता में एक सवाल पूछा गया था कि सेंटीमीटर में एक आदमी की ऊँचाई कितनी हो सकती है? रिकार्ड में जो आँकड़ा था, उसमें दशमलव बिन्दु साफ नहीं दिख रहा था। संख्या 1642 से.मी. नजर आ रही थी। दशमलव बिन्दु की सही जगह कहाँ होगी? हमें बहुत निराशा हुई कि 30 में से मात्र 1 बच्चे ने ही सही जवाब दिया था। अधिकतर बच्चों के उत्तर 16.42 से.मी. लिखा था।

एक अन्य मौके पर एक स्कूल में शिक्षक के चयन हेतु साक्षात्कार के दौरान उम्मीदवार से प्रश्न किया गया कि 'क्या आप इस कमरे की यानी जहाँ हम बैठे हैं, सन्निकट ऊँचाई बता सकते हैं? उम्मीदवार ने दीवारों पर नजर दौड़ाई कुछ समय तक अनुमान लगाया और बोला ''लगभग 20 मीटर होगी''

सोचिएः क्या उक्त बच्चों व शिक्षक उम्मीदवार की ऊँचाई की अवधारणा की समझ थी? आपको क्या लगता है?

मापन और अनुमान

मापन में अनुमान की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। अनुमान वह प्रक्रिया है जिसके जरिए, वगैर किसी उपकरण/कागज़ पेंसिल पर परिकलन किए, एक सन्निकट उत्तर हासिल किया जाता है। इसके जरिए माप की त्रुटियों को पहचानकर दूर भी किया जा सकता है बशर्ते कि बच्चे के पास इतना अनुमान का हुनर हो कि वह इस प्रश्न का उत्तर खोज लें कि 'क्या मेरा उत्तर उचित है?'

अनुमान एक तरह से मापन ही है जो दिमागी ढंग से किया जाता है किसी जानी–पहचानी मानक या गैर मानक इकाई के संदर्भ में।

किसी चीज को मापने से पहले बच्चों को उसकी लम्बाई का अनुमान लगाने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। तभी वे मापन में प्राप्त संख्या का अर्थ देख पाएंगे। यदि कोई बच्ची गलती से मीटर स्केल को उल्टा पकड़कर डिब्बे की लम्बाई मापने लगे जो 37 से.मी. ऊँची है, तो होगा यह कि वह 60 से.मी. का अंक पढ़कर आगे गिनने लगेगी। अगर यदि उसने मापने से पहले अनुमान लगाया है कि डिब्बा लगभग 40 से.मी. ऊँचा है तो वह शायद अपने मापन की जाँच करके गलती पकड़ लेगी।

सोचिएः क्या आप खम्भे या किसी कमरे की ऊँचाई का अनुमान लगा सकते हैं? दो उदाहरण दीजिए कि कैसे साइज का अनुमान लगाने की क्षमता उपयोगी है?

अमानक एवं मानक इकाइयाँ

अमानक इकाईयाँः

हम हमेशा मापन की मानक इकाइयों का इस्तेमाल नहीं करते। मानक इकाइयों का उपयोग करना इस बात पर निर्भर है कि उस कार्य–विशेष में कितनी सटीकता की जरूरत है। हमने भी अपने अनुभव से बहुत कुछ मापा होगा।

जैसे बच्चे कीत्–कीत् के खेल में कदम या पैर से मापकर घर बनाते हैं। किसान अपने खेतों में प्रायः कदम, बित्ता, पैर, हाथ से मापकर क्यारी बनाते है। यूँ तो बच्चे गैर–मानक इकाइयों का प्रयोग करते हैं मगर उन्हें पता नहीं होता कि वे ऐसा कर रहे हैं। हम उनके सामने वास्तविक जीवन की विभिन्न स्थिति रख सकते हैं, जहाँ मापन की जरूरत पड़े।

- हम मापन के किन–किन तरीकों को जानते हैं?
- हम मापन की किस शब्दावली का इस्तेमाल करते हैं?

एक रस्सी कपड़े सुखाने के लिए छत पर तानी गई थी किन्तु अब यह इतनी कमजोर हो गई है कि टूट सकती है।

अगर इस पुराने रस्सी की जगह नई रस्सी लानी है तो क्या करें? बच्चों के संभावित उत्तरों में निम्नांकित उत्तर शामिल हों सकते हैं :–

- मैं पुरानी रस्सी के बराबर नई रस्सी माप लूँगा।
- मैं अपने बित्ते से रस्सी को माप कर उतनी ही बित्ते की नई रस्सी लूँगा।
- मैं धागे से पुरानी रस्सी माप कर नई रस्सी लाऊँगा।
- मैं एक छड़ी या डण्डे से पुरानी रस्सी को माप कर प्राप्त डंडो की संख्या का पता करूँगा एवं उतने डंडो की माप के बराबर नई रस्सी लाऊँगा।
- मैं पुरानी रस्सी को हाथ से या कदम से माप कर उतने ही हाथ या कदम के बराबर नई रस्सी ले आऊँगा।

इन उत्तरों से यह पता चलता है कि बच्चे मापन के लिए कई तरह की इकाइयों का प्रयोग करते हैं। फिर भी उन्हें विभिन्न भौतिक इकाइयों का इस्तेमाल करने के अभ्यास की जरूरत है, जिससे कि वह सही माप सकें। बच्चे ऐसी इकाइयों का उपयोग करते हैं जिन्हें देखा, छुआ व गिना जा सकता है। ये माचिस की डिब्बी, पेसिंल, डंडी, क्रेयान इत्यादि हो सकते हैं। जैसे–

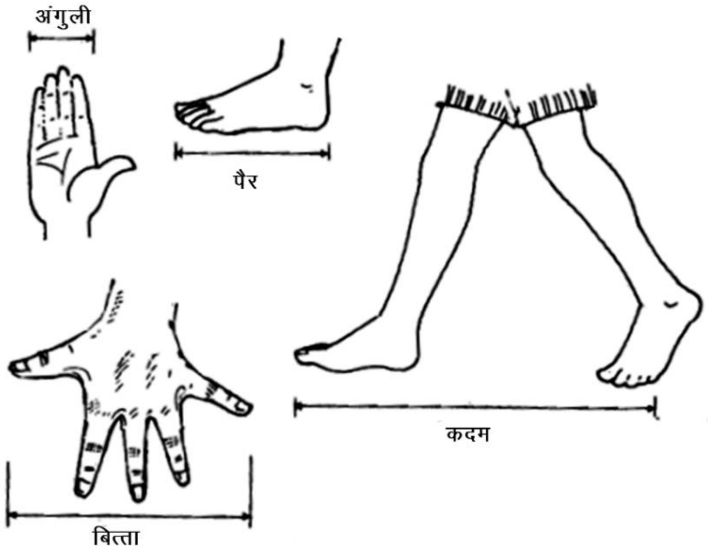
- किसान धूप व उससे बन रही परछाईं से समय का अंदाजा लगा लेता है कि थोड़ी देर बाद 6 बजे जाएंगे और घर जाने का समय हो जाएगा।
- कपड़े सूखाने के लिए छत के एक कोने से दूसरे कोने तक कितनी लंबाई की रस्सी चाहिए, गृहिणी यह अनुमान लगाकर दुकानदार से रस्सी खरीदती है।

चूँकि मापन के लिए अक्सर अनुमान लगाना होता है अतः इस क्षमता को बेहतर करने व मापन का अभिप्राय समझने के लिए अनुमान लगाने के अवसर देने चाहिए। यथा–

- मेज को ढकने के लिए कितनी माचिस की डिब्बी चाहिए?
- एक बाल्टी में से कितने गिलास पानी भरेंगे?
- आपके मकान की ऊँचाई कितनी है?
- पोस्टकार्ड की लंबाई कितनी है?
- कक्षा के श्यामपट्ट को ढकने के लिए कितनी कॉपियों की जरूरत होगी?

दैनिक जीवन से जुड़ी निम्नांकित अंगिक इकाइयाँ का भी मापक के रूप में प्रयुक्त होती है

लंबाई मापन में: अंगुली, बालिश्त / बित्ता, हाथ, कदम, पाँव, बाँह इत्यादि।



गहराई मापन में :

घुटने तक गहरा, टखने तक, कमर तक, गले तक, सिर से ऊपर इत्यादि।

मात्रा एवं आयतन में :

चुटकी भर, मुट्ठी भर, हथेली भर इत्यादि।

चुँकि उपर्युक्त भौतिक इकाईयाँ माप लेने वाले व्यक्ति पर निर्भर है। अर्थात् अलग–अलग व्यक्ति द्वारा उपयोग में लाए गए डण्डे, गिल्ली, पेंसिल, बित्ता, कदम, हाथ इत्यादि की माप अलग–अलग हो सकती है अतः ऐसी चीजों के माध्यम से हम अमानक इकाईयों की अवधारणा स्पष्ट कर सकते हैं।

शुरूआत में गैर मानक इकाइयों से मापने का अभ्यास बच्चों के लिए कई तरह से मददगार होता है–

- इकाई में मापने की बात से बच्चों का परिचय सीधे ही सेंटीमीटर जैसी चीज़ के जरिए न होकर, जानी पहचानी चीज़ों के माध्यम से होता है।
- मापन की शुरूआती कार्य में गैर–मानक इकाइयाँ ज्यादा उपयुक्त होती है। 1 से.मी. बहुत छोटा होता है तो मेज मापते वक्त या दोस्त का कद मापते वक्त उनके हिसाब से से.मी. की संख्या बहुत ज्यादा हो जाता है। इसी काम के लिए मीटर बहुत बड़ी इकाई है।
- इन अनुभव से बच्चों को यह गुंजाईश भी नजर आएगी कि जब मानक पैमाना न हो या अनुपयुक्त हो तब किसी खास काम के लिए पैमाने भी बनाए जा सकते हैं।

- गैर–मानक इकाई के जरिए बच्चे मानक इकाई की जरूरत महसूस कर पाएंगे जैसे– वे यह देखेंगे कि जब वे बेंच बित्ते से मापते हैं तो लम्बाई 10 बित्ता आती है और जब शिक्षक मापते है तो उसी बेंच की लम्बाई 8 बित्ता रह जाती है।

यदि सारे बच्चे कई चीज़ों की लम्बाई बित्ते/कदम से मापे तो शायद उन्हें इस निष्कर्ष पर पहुँचने में मदद मिलेंगी कि एक ही चीज़ को अलग–अलग व्यक्ति मापे तो ये इकाइयाँ अलग–अलग लम्बाई बताती हैं।

मानक इकाईयाँ:

बच्चों को मानक इकाईयों की धारणा से तब अवगत कराना चाहिए जब वे उसकी आवश्यकता महसूस करें। यदि शिक्षक पहले ही झटके में ब्लैकबोर्ड पर एक रेखाखण्ड खींचकर उसकी लम्बाई स्केल से माप दें तो बच्चे यह समझ ही नहीं पाते कि सेंटीमीटर को मानक इकाई क्यों कहते हैं?

इस संदर्भ में निम्न उदाहरण पर गौर कीजिए–

एक बार श्रीमती मंजू ने बाजार से खरीदी गई नई साड़ी को अपने बच्चों आदित्य, आकृति तथा अनन्या से अलग–अलग मापने के लिए कहा। तीनों ने बारी–बारी से अपनी बाँह से साड़ी मापी।

आदित्य	:	इस साड़ी की माप 10 बाँह है।
आकृति	:	9 बाँह
अनन्या	:	$7\frac{1}{2}$ बाँह

श्रीमती मंजू ने बच्चों से माप में अंतर आने का कारण पूछा तो बच्चों ने बताया कि उनकी बाँहों की लंबाई छोटी–बड़ी है जिससे माप में अंतर आया।

आकृति	:	तो फिर हम किससे मापे?
श्रीमती मंजू	:	मीटर स्केल एक ऐसा पैमाना है जिससे चाहे कोई भी मापे तो माप सदैव समान ही आता है। क्या हम मीटर स्केल को मानक मापक मान सकते हैं?

हम ऐसी स्थितियों का उपयोग कर के मानक इकाई की धारणा बच्चों में ला सकते हैं। इसी प्रकार हमें अलग–अलग विमाओं वाली वस्तुओं की मापन क्रिया में प्रयुक्त होने वाली मापन की मानक इकाईयों की व्याख्या करनी चाहिए।

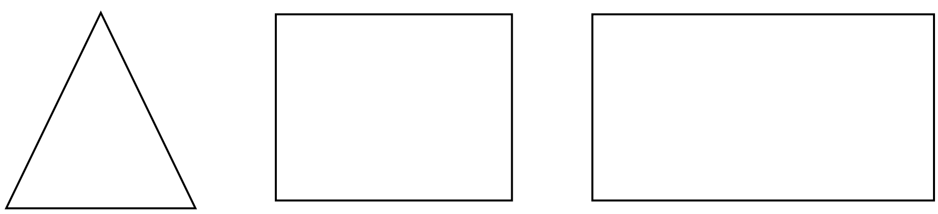
चनपटिया प्रखंड के एक शिक्षक ने अपने विधालय के चार बच्चों से सारणी में लिखी चीजों की लंबाई बित्ते और स्केल की सहायता से मापने को कहा और परिणाम पर चर्चा किया :–

क्रम सं०	मापी जाने वाली चीज का नाम	पहला बच्चा		दूसरा बच्चा		तीसरा बच्चा		चौथा बच्चा	
		बिना की माप	स्केल की माप	बिना की माप	स्केल की माप	बिना की माप	स्केल की माप	बिना की माप	स्केल की माप
1	श्यामपट्ट								
2	गणित की पुस्तक								
3	कक्षा–कक्ष की कोई एक खिड़की								
4	कक्षा–कक्ष की कोई एक बेंच								
5	किसी एक बच्चे का स्कूल बैग								

शिक्षक ने कार्ड बोर्ड की एक पट्टी या कोई डण्डी लिया। 1–1 से० मी० के 15 भाग बाँटकर 15 से० मी० का एक स्केल तैयार किया और इसकी सहायता से नीचे दी गई पेंसिल की माप ज्ञात किया

शिक्षक ने प्रत्येक बच्चे को एक कार्ड बोर्ड की पट्टी लेने के लिए कहा और उसे 1–1 से० मी० के 10 भागों में बँटवाया। हर भाग को अलग–अलग रंग से रंगवाया इस स्केल पर कोई अंक नहीं लिखें हैं। शिक्षक ने बच्चों को बताया कि एक रंगीन भाग की दूरी को 1 सेंटीमीटर कहते हैं।उन्होंने शुरू में बच्चों को ऐसी चीजों की लम्बाई मापने को कहा जिसकी लम्बाई 10 सेंटीमीटर से छोटी हो इसके लिए उन्होंने स्केल को उस चीज से सटाकर रखवाया और गिनवाया कि स्केल के कितने रंगीन भाग उस चीज से सटे हैं।

बच्चे अपनी बनाई इस स्केल का उपयोग पुस्तक के विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों को मापने में भी कर सकते हैं।



जब बच्चे पुस्तक के ज्यामिती आकृतियों को माप रहे होते हैं, तब उसे पुस्तक की लम्बाई मापने के लिए प्रेरित किया जा सकता है। बच्चे स्वतः सोच पाते हैं कि 10 सेमी० से ज्यादा लम्बी चीजों को कैसे मापें? तब उसे आसपास की कई चीजे, जैसे पेंसिल बॉक्स, कुर्सी, टेबल, श्यामपट्ट इत्यादि को मापने के लिए कह सकते हैं। साथ–ही तालिका के अनुसार बच्चों से उनका अपना अनुमान, माप और अन्तर लिखने के लिए कह सकते हैं।

चीजों का नाम	अनुमान	माप	अन्तर
किताब			
पेन्सिल			
कुर्सी			
बेंच			
श्यामपट्ट			

शिक्षक ने पुनः इस गतिविधि को कक्षा–4 के बच्चों के साथ कराया तथा उनके प्रत्युत्तर को देखा।

जब बच्चों ने अपनी बनाई 10 सेमी० लम्बी स्केल के इस्तेमाल का काफी अनुभव हासिल कर लिया, तब शिक्षक ने 15 सेमी० वाले स्केल से भी मापने का उन्हें मौका दिया। साथ ही साथ स्केल को दिखाते हुए चर्चा भी किया। इस पर 0 से 15 संख्याएँ लिखी हुई है। यह सेंटीमीटर वाला हिस्सा कहलाता है इसे संक्षेप में से०मी० लिखते हैं। इसमें 0 से 1 के बीच की दूरी 1 से 2 के बीच की दूरी सभी 1 सेमी० के बराबर है। सभी 1 से०मी० का अन्तराल 10 छोटे–छोटे भाग में विभाजित है, प्रत्येक छोटे विभाजन को 1 मिलीमीटर कहते हैं। उन्होंने इसके अनुभव हासिल करने का मौका बच्चों को दिया।

जब बच्चे सेन्टीमीटर और मिलीमीटर के इस्तेमाल का काफी अनुभव प्राप्त कर लिए तब शिक्षक ने छड़/सीधी छड़ी या विद्यालय परिवेश में उपलब्ध सीधी–लम्बी वस्तु से मीटर स्केल बच्चों द्वारा बनवाया। उन्होंने यह भी ध्यान दिया कि मीटर स्केल बनाने में बच्चे 10 सेमी० वाले स्केल का प्रयोग किया। अब बच्चों को ऐसी गतिविधियों को करने के लिए प्रेरित किया जिससे 1 मीटर लम्बाई का अहसास होने में मदद मिले।

बच्चे मीटर/सेन्टीमीटर का अनुमान लगा पायें, इसके लिए शिक्षक ने प्रश्नों का भी सहारा लिया।

उदाहरण के लिए:

(1) सीता जमीन से 3 मीटर ऊपर बैठी हुई थी, क्या वह –

क. स्टूल पर बैठी हुई थी।

ख. अपनी झोपड़ी का छप्पर ठीक कर रही थी।

ग. अपनी टांगों पर बैठी थी।

(2) निम्नलिखित चीजों में से कौन सी चीज 1 सेमी० से कम लम्बाई की होंगी।

क. माचिस की तीलीं — ख. जीरा

ग. टूथब्रश — घ. किताब

शिक्षक ने विद्यालय परिवेश के कमरे, बरामदे, मैदान, बगीचे की लम्बाई मीटर स्केल से मापने के लिए बच्चों को दिया। उन्होंने बताया कि मापने के क्रम में अन्त में जो अतिरिक्त लम्बाई बचे, जो मीटर स्केल से कम हो, उसे छोड़ा जा सकता है। फिर शिक्षक ने बच्चों को निम्न तालिका में लिखने के लिए कहा।

चीज का नाम	अनुमान से लम्बाई	लम्बाई कितने मीटर से ज्यादा है।	लम्बाई कितने मीटर से कम है।	लम्बाई कितने मीटर है।
कमरा				
बरामदा				
मैदान				

बच्चे के मन में यह सवाल आना स्वाभाविक है कि यदि उसके पास सिर्फ एक मीटर की स्केल हो, तो एक मीटर से कम या एक मीटर से थोड़ी ज्यादा लम्बाई कैसे मापेंगे?

ऐसी स्थिति में बच्चों के सामने वास्तविक जीवन की कोई ऐसी स्थिति रखनी होगी, जहाँ से एक मीटर से कम या एक मीटर से थोड़ी ज्यादा लम्बाई मापनी हो। क्या विद्यालय परिवेश में ऐसे अनेक वस्तु हो सकते हैं, जिसकी लम्बाई मापने में ऐसी छोटी इकाई की जरूरत महसूस हो?

इस मौके पर बच्चों के सामने दर्जी का फीता रखा जा सकता है, जो एक मीटर से ज्यादा लम्बी है। इसमें निशान सेंटीमीटर में होते हैं तथा इसके उपयोग से किसी भी चीज की लम्बाई मापी जा सकती है, चाहे वह लम्बाई 1 मीटर से कम हो या 1 मीटर से ज्यादा हो।

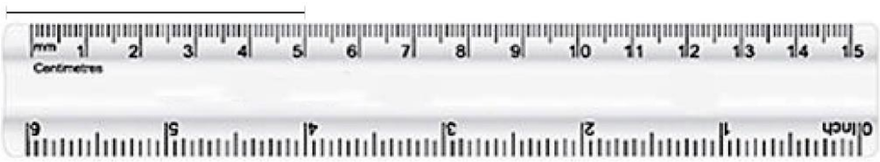
मापन के दौरान होने वाली गलतियाँ

गलत माप मिलने के कई कारण हो सकते हैं जैसे–

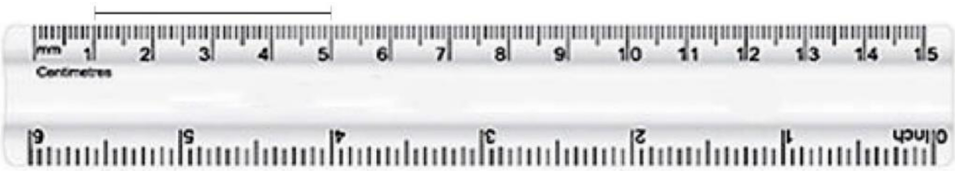
1. स्केल के किनाने मोटी होने से उन्हें पढ़ते वक्त गलतियाँ करते हैं।
2. स्केल को पढ़ते वक्त आँख इस बिन्दु (सिरे) के ठीक सीध में नहीं रखते। फिर भी हमें याद रखनी चाहिए कि कोई भी मापन एक दम सही नहीं होता।
3. नम पढ़ने में गलती।
4. मापन यंत्र का उपयोग करने वाले व्यक्ति द्वारा माप का सन्निकटन अपने ढ़ंग से किया जाना।
5. मापते वक्त यंत्र रखने में गलती।
6. एक ही यंत्र से एक ही चीज को दो व्यक्ति मापे तो भी माप अलग–अलग आ सकते हैं।

स्केल के उपयोग में गलतियाँ:

अक्सर स्केलों का उपयोग करते वक्त गलतियाँ होते हैं। स्केल के एक सिरे को चीज के सिरे की सीध में रख लेते हैं और ध्यान नहीं रखते कि स्केल पर शून्य का निशान कहाँ है।

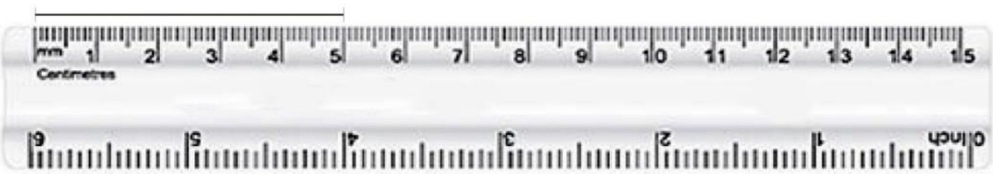


दूसरी ओर कई बच्चे रेखाखण्ड के सिरे को स्केल पर लगे '।' के निशान की सीध में रखते हैं और दूसरे सिरे के माप को ले लेते हैं।



नतीजा यह होता है कि उनका परिणाम वास्तविक लम्बाई से 1 सेमी० ज्यादा आता है। इसलिए स्केल को सही–सही रखने की समझ आवश्यक है। हमें सिखाते वक्त यह ध्यान देना होगा कि बच्चे खुद स्केल का इस्तेमाल करें और हम इस्तेमाल का तरीका बतायें। क्योंकि किसी को मापते देखने से बच्चों को मापने का अनुभव नहीं मिलता।

पहले हम उन्हें यह दिखा सकते हैं कि 5 से० मी०, 6 से० मी०, 10 से० मी० वगैरह की चीजों या रेखाखण्डों की लम्बाई कैसे मापी जाती है। इसके लिए हम सारी उपलब्ध स्केलों का प्रयोग कर सकते हैं। हम उन्हें दिखा सकते हैं कि स्केल को किसी भी स्थिति में रखें, रेखाखण्ड की लम्बाई 5 से० मी०, है, तो 5 से० मी०, ही रहेगी।



लम्बाई, क्षेत्रफल, धारिता, आयतन तथा समय का मापन

लम्बाई मापन

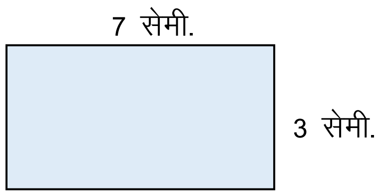
लम्बाई मापन के लिए इंची टेप, एक मीटर स्केल, 30 से० मी० स्केल, 15 से० मी० स्केल इत्यादि उपलब्ध होते हैं। किस कार्य के लिए कौन से स्केल उपयुक्त होगा इसकी समझ होनी चाहिए। इस संदर्भ में निम्न गतिविधि मददगार हो सकती है–

एक शिक्षक ने बच्चों को समूहों में बाँट दिया। हर समूह को एक इंची टेप, एक मीटर स्केल, एक 30 से० मी० स्केल और 15 से० मी० की स्केल दिया। प्रत्येक समूह विद्यालय में उपलब्ध चीजों को मापने के लिए कहा और यह तय करने के लिए कहा कि कौन सी स्केल उपयुक्त रही और क्यों? उन्होंने बच्चों से अपनी माप और उपयुक्त स्केल निम्न सारणी में भरने के लिए कहा।

चीज का नाम	लम्बाई	उपयुक्त स्केल
कॉपी		
पेंसिल		
बरामदा		
खंभे की मोटाई		
....		

क्षेत्रफल

एक बार कक्षा 5 में पढ़ने वाली सीमा अपनी कॉपी में गृह कार्य कर रही थी। उसके अध्यापक ने उसे मापने से सम्बन्धित कुछ सूत्र लिखवाए थे। वह उसी की मदद से अपने सवाल हल कर रही थी। वह दिए गए आयत का क्षेत्रफल व परिमाप के सूत्र लगाकर हल कर रही थी। मेरी बहन ने मुझे उसका काम जाँचने को कहा। मैं सीमा के पास जाकर बैठ गई व उसके हल किए हुए सवाल देखने लगी। उसने एक सवाल इस तरह हल किया हुआ था–



परिमाप = 2 (ल. x चौ.)
= 2 (7 x 3)
= 42 सेमी.

क्षेत्रफल = ल० + चौ० = 7 + 3 = 10 सेमी.

इस सवाल को देखकर मुझे लगा कि सीमा केवल सूत्र का इस्तेमाल कर सवाल हल कर रही है परन्तु वह क्षेत्रफल व परिमाप का अर्थ नहीं समझ पायी है। अब मैंने सीमा से कुछ बात की।

मैं : क्षेत्रफल क्या होता है?

सीमा : आँ...... 2 (ल0 + चौ0), नहीं शायद यह तो परिमाप होता है। ल0 चौ0 या....... आँ. ... मुझे याद नहीं।

सीमा ने अपनी कॉपी देखी व अपने अध्यापक द्वारा लिखवाया हुआ सूत्र मुझे बता दिया।

यह बात तो साफ पता चल रही थी कि सीमा के लिए क्षेत्रफल व परिमाप का मतलब केवल एक सूत्र था जिसको वह अभी तक याद नहीं कर पाई थी।

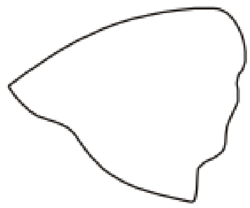
कक्षा में हम अक्सर बच्चों को सूत्रों का उपयोग करके माप निकालना बताते हैं। ढेर सारे सूत्र बच्चों को याद करवाए (रटवाए) जाते हैं व उनका इस्तेमाल कर पुस्तक में दिए गए सवाल हल करवा दिए जाते हैं। इस प्रक्रिया में बच्चे सूत्र रट तो लेते हैं पर वह यह नहीं समझ पाते कि सूत्र को इस्तेमाल कब किया जाए। कई बार तो बच्चे दो–तीन सूत्रों में भ्रमित (;Confuse) भी हो जाते हैं, जिसके कारण वह पूरा सूत्र ही गलत लिख बैठते हैं। इसका कारण यह होता है कि बच्चे मापन में प्रयोग होने वाली शब्दावली जैसे– क्षेत्रफल, परिमाप, पृष्ठीय क्षेत्रफल, आयतन, धारिता इत्यादि शब्दों का अर्थ समझ नहीं पाते हैं।

सूत्र रटवाने से पहले, हमें बच्चों को इन शब्दों से परिचित करवाना जरूरी है। इन शब्दों से परिचित करवाते समय हमें कुछ और बातों का ध्यान रखना होगा, जैसे इन सभी का आपस में संबंध व इनका अंतर।

जैसे सीमा भी दो विमीय आकृति आयत के परिमाप व क्षेत्रफल में भ्रमित (Confuse) हो गई थी। इसका कारण यह हो सकता है कि उसे क्षेत्रफल व परिमाप का अर्थ नहीं पता पर उनमें कुछ बातें समान दिख रही थीं, जैसे– दोनों सूत्रों में 'लम्बाई' व 'चौड़ाई' का प्रयोग दिख रहा था। इसलिए हमें यह भी कह सकते हैं कि वह सूत्रों में उलझ गई थी।

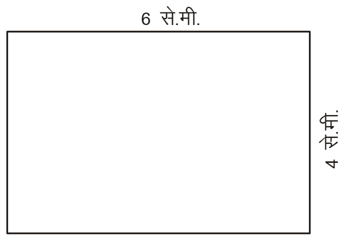
क्षेत्रफल का अर्थ

क्षेत्रफल किसी भी आकृति का दो विमीय फैलाव होता है। किसी आकृति या वस्तु के तल जितनी जगह घेरती है वह उस वस्तु का क्षेत्रफल होता है।

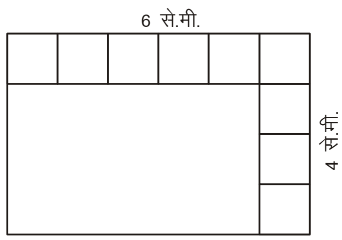


यह आकृति जितना कागज घेरती है वह इसका क्षेत्रफल है।

किसी वस्तु के कोई तल द्वारा घेरी गई जगह को जब हम मात्रात्मक रूप में व्यक्त करते हैं तो हमें सबसे पहले आवश्यकता पड़ती है एक इकाई की। जब हम किन्हीं आकृतियों या वस्तुओं का क्षेत्रफल ज्ञात करना चाहते हैं तो हम उसे किसी इकाई से मापते हैं, यह इकाई मानक व गैर मानक कोई भी हो सकती है।



यदि हमें केवल किन्हीं दो वस्तुओं के क्षेत्रफल की तुलना करनी हो तो हम गैर–मानक इकाईयों का इस्तेमाल भी कर सकते हैं।



जैसे– दोनों वस्तुओं के क्षेत्रफल को डाक टिकट माचिस की

खाली डिब्बियों से ढक कर देखने और यह पता लगाना कि कौन बड़ा और कौन छोटा है।

परन्तु यदि यहाँ पर किसी दूर बैठे व्यक्ति को किसी जगह के क्षेत्रफल के बारे में बताना हो तो हमें क्षेत्रफल मापने की एक सर्वमान्य इकाई (जो सबके लिए सटीक हो) की आवश्यकता होगी। हमें क्षेत्रफल मापने की भी एक ऐसी मानक इकाई चाहिए जो पूरी दुनिया में सर्वमान्य हो। यह इकाई 1 वर्ग कि.मी. या 1 वर्ग मीटर या 1 वर्ग सेन्टीमीटर है।

यदि बच्चे लम्बाई मापने की इकाई सेन्टीमीटर से परिचित हैं तो उन्हें वर्ग सेन्टीमीटर को इस्तेमाल करने में कोई दिक्कत नहीं आएगी।

अगर बच्चों के पास क्षेत्रफल मापन की गैर मानक इकाईयों से मापने का अनुभव है तो आप उन्हें 1 सेमी. भुजा वाले वर्गों को आकृतियों पर जमा कर उनका क्षेत्रफल निकलवा सकते हैं। धीरे–धीरे बच्चों की आकृतियों को देखकर अन्दाजा लगा कर इस बात का उत्तर देने में वक्त नहीं लगेगा कि किसी आकृति का क्षेत्रफल कितना होगा। यदि बच्चे एक बार इस बात को समझ जाएं तो उन्हें क्षेत्रफल के सूत्र से परिचित करवाना व उसका इस्तेमाल करना बहुत मुश्किल नहीं होगा।

मोहन ने अपनी कक्षा में बच्चों को 1 सेमी. वर्ग जमाकर आकृतियों के क्षेत्रफल पता लगवाए। बच्चे इस प्रकार से क्षेत्रफल निकालने से वे काफी आकृतियों के क्षेत्रफल का अन्दाजा भी लगाने लगे थे। अब मोहन उन्हें क्षेत्रफल के सूत्र बताना चाहता था। उसने बच्चों को एक आयताकार आकृति दिखाई व पूछा–

मोहन : इस आकृति का क्षेत्रफल कितना होगा?

एक बच्चा : इसमें लगभग 25 वर्ग आ सकते हैं तो 25 वर्ग से.मी.।

दूसरा बच्चा : नहीं कुछ कम होने चाहिए। लगभग 20 वर्ग से.मी.।

तीसरा बच्चा : सही उत्तर जाँचने के लिए हम इसमें 1 सेमी. के वर्ग बनाकर देख सकते हैं।

मोहन ने आकृति में वर्ग बनाने शुरू किए। मोहन ने इस तरह से आकृति में वर्ग बनाए।

मोहन : क्या अब सही क्षेत्रफल पता लगाया जा सकता है?

बच्चा : आँ.... हाँ, इसमें 24 वर्ग आ सकते हैं।

मोहन : शाबाश। तुमने यह कैसे बताया?

बच्चा : इसकी लम्बाई में 6 वर्ग हैं और चौड़ाई में 4 वर्ग हैं। तो जब मैं ऐसे ही 6 वर्गों को इस आकृति में 4 बार लगाऊँगा तो पूरा आयत 24 वर्ग सेमी. से ढक जाएगा।

मोहन : इस आकृति की लम्बाई कितनी है?

बच्चे : 6 सेमी.

मोहन : अच्छा! तो अब 6 सेमी. की लम्बाई में 1 सेमी. भुजा वाले कितने वर्ग लगाए जा सकते हैं?

बच्चा : अँ..... 6 वर्ग।

मोहन : हाँ, बिल्कुल ठीक।

और अगर ऐसे 6 वर्ग की कितनी पंक्तियाँ 4 सेमी. की चौड़ाई की इस आकृति में जमाई जा सकती है?

बच्चा : 4 पंक्तियाँ।

मोहन : तो कुल कितने वर्ग इस आकृति में जमाए जा सकते हैं?

बच्चे : 4 बार 6 वर्ग, यानी अँ.... 24 वर्ग।

मोहन : 4 बार 6 वर्ग का मतलब (4 × 6) वर्ग।

24 वर्ग सेमी. जो कि इसका क्षेत्रफल भी होगा।

मोहन ने बच्चों को ऐसे ही कुछ और आयतों का क्षेत्रफल पता लगाने को दिए। धीरे–धीरे बच्चे यह समझ गए कि जितनी आयत के भुजा की लम्बाई हो उतने वर्ग, जितनी चौड़ाई हो उतनी बार लगाएं तो आकृति को वर्ग पूरा ढक लेंगे और वर्गों की यह संख्या उस आयत का क्षेत्रफल होगा।

फिर मोहन ने बच्चों को इन सभी उदाहरणों की मदद से क्षेत्रफल पता लगाने का सूत्र बनवाया। बच्चों ने यह देखा कि जब भी वह आयत की लम्बाई को चौड़ाई से गुणा करते थे तो उनका क्षेत्रफल मिल जाता था। तो उन्होंने इसको सामान्यीकृत किया।

आयत का क्षेत्रफल = ल. × चौ.

क्योंकि क्षेत्रफल को मापा 1 से०मी० के वर्गों से जा रहा है तो क्षेत्रफल मापने की इकाई होगी वर्ग से०मी० ।

यदि हमें किसी टेबल के चारों ओर रिबन लगाना हो तो हमें कितना लम्बा रिबन चाहिए होगा? क्या यह माप टेबल के ऊपर लगाने वाली लकड़ी के माप से अलग होगा?

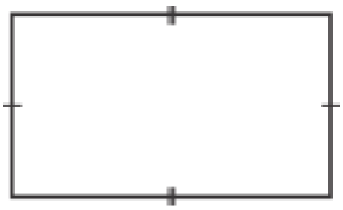
हाँ, क्योंकि जब मुझे टेबल के चारों ओर लगाने को रिबन चाहिए तो मुझे केवल टेबल के चारों ओर के माप को मिला के उसी लम्बाई का एक रिबन चाहिए होगा। पर जब मुझे उस पर रखे लकड़ी को मापना होगा तो मेरा काम केवल 1 माप (यानी लम्बाई) से नहीं चलेगा। मुझे उसके क्षेत्रफल को मापना पड़ेगा। (दो माप, लम्बाई व चौड़ाई)

यही अन्तर परिमाप व क्षेत्रफल में भी है। जब हम किसी समतल बन्द आकृति के किनारों को मापते हैं तो वह परिमाप होगा पर यदि हमें उस आकृति के तल को मापना है तो वह उसका क्षेत्रफल होगा।

परिमाप किसी भी दो विमीय आकृति के किनारों को एक विमीय में मापना है जबकि क्षेत्रफल, दो विमाओं में माप है। अब यदि किसी आयत के परिमाप के बारे में सोचें तो वह कुछ इस प्रकार होगा।

परिमाप = चारों भुजाओं का जोड़

= ल0 + चौ0 + ल0 + चौ0



चूंकि आयत की आमने–सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं तो सूत्र होगा–

परिमाप = 2 ल0 + 2 चौ0

= 2 (ल0 + चौ0)

जब बच्चों को सूत्र इस्तेमाल कर सवाल हल करने को दिए जाते हैं तो वे कुछ शब्दों के अर्थ नहीं समझ पाते, केवल सूत्र रटते हैं। इन सूत्रों में लम्बाई व चौड़ाई के बीच कुछ संक्रियाओं के निशान लगे होते हैं जैसे जोड़ (+) या गुणा (×) का।

यह सूत्र बच्चों को मतलब न समझा कर उलझन में डाल देते हैं जिसकी वजह से बच्चे केवल सूत्रों को रट लेते हैं पर इनका इस्तेमाल कब व कैसे होगा यह समझ नहीं पाते।

आयतन

आयतन की समझ

आयतन 3–विमीय फैलाव का माप है। डिब्बे, नोट बुक, बन्द पीपा, आलमारी, ईंट, पत्थर जैसी 3–विमीय बन्द वस्तुएँ जितनी जगह घेरती हैं वह उनका आयतन होता है। आयतन यानी इन वस्तुओं द्वारा घेरी गई जगह। बच्चों को घेरी गई जगह का अहसास देने के लिए कुछ पत्थर, ईंटें, लोहे के टुकड़े इत्यादि इकट्ठे कर लें। प्लास्टिक की एक बाल्टी में पानी भर लीजिए। हर वस्तु को धागे से बांधकर उन्हें एक–एक करके पानी में डुबाइए। देखिए कि क्या हर बार पानी का तल एक बराबर ही बढ़ता है। बच्चों से निम्न प्रश्नों पर चर्चा कीजिए।

- पानी का तल सबसे ऊंचा कब उठा?
- ऐसा क्यों होता है?
- तल अलग–अलग क्यों बढ़ता है?
- डुबाई गई वस्तु के साइज और पानी के तल के बीच क्या संबंध होता है? इत्यादि।

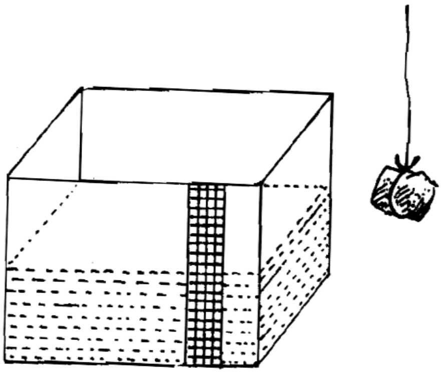
एक बार बच्चों को घेरे गए आयतन का अहसास हो जाए तो वे दो वस्तुओं के आयतन की तुलना कर सकते हैं। दो असमान वस्तुओं के आयतन की तुलना निम्नलिखित गतिविधि द्वारा की जा सकती है।

उदाहरण: दो पत्थर लीजिए, जिनके आयतन की तुलना करनी है और कांच का एक आयताकार बर्तन लीजिए। कांच के बर्तन को $\frac{3}{4}$ पानी से भर दीजिए। इस पर चित्रानुसार ग्राफ पेपर की एक पट्टी चिपका दीजिए।

सबसे पहले ग्राफ पेपर की पट्टी के खाने गिनकर पानी का तल पढ़ लीजिए। अब पत्थरों को एक–एक धागे से बांध लीजिए। चित्र 2 के अनुसार एक पत्थर को पानी में डुबाइए और पानी के तल में हुए परिवर्तन को नोट कीजिए। इसी प्रकार से दूसरे पत्थर को पानी में डुबाकर पानी के तल को पढ़ लें।

बच्चों से पूछिए कि पानी का तल कब ज्यादा चढ़ा? क्यों? कौन सा पत्थर ज्यादा जगह घेरता है? किसका आयतन ज्यादा है? इत्यादि।

कभी–कभी दो वस्तुओं के आयतन की तुलना उनके द्वारा घेरी गई जगह की तुलना से भी की जाती है। जैसे मेज की दराज में कौन सी वस्तु ज्यादा जगह घेरती है – माचिस या साबुन की डिबिया? कौन सी वस्तु बड़ी है? किसका आयतन ज्यादा है? इत्यादि।



चित्र–1

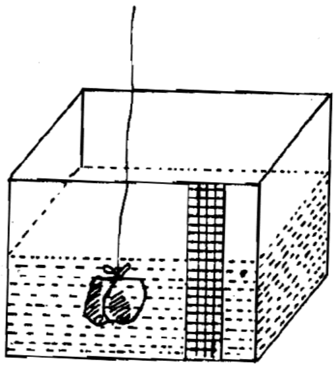
उपरोक्त गतिविधियों से यह समझने में मदद मिलेगी कि

(i) हर वस्तु का एक नियमित या अनियमित आकार होता है।

(ii) बड़ी वस्तुएँ ज्यादा जगह घेरती हैं।

(iii) बड़ी वस्तुएँ पानी की सतह को ज्यादा ऊपर उठाती हैं।

(iv) जिस वस्तु का साइज ज्यादा हो, उसका आयतन भी ज्यादा होता है।

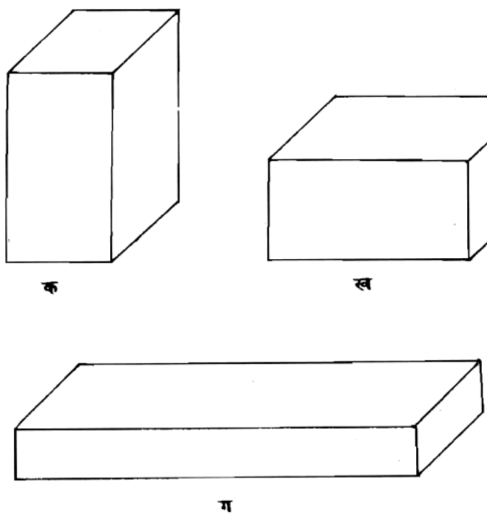


चित्र–2

आयतन का संरक्षण

घेरे गए आयतन की अवधारणा सीखते हुए पदार्थ की मात्रा के संरक्षण का भी अहसास रहना चाहिए। इसका आकलन करने के लिए गतिविधि।

उदाहरण : एक शिक्षक अपनी कक्षा में बच्चों को घेरे गए आयतन का अहसास पहले ही दे चुके थे। अब वे उन्हें यह समझाना चाहते थे कि अलग–अलग आकृतियों की वस्तुओं का आयतन समान भी हो सकता है। इसके लिए उन्होंने बच्चों को लकड़ी के कुछ गुटके दिखाए। (चित्र 3) ।



चित्र 3

शिक्षक : क्या इन गुटकों का आयतन समान है?

(किसी से कोई उत्तर नहीं मिला, तो उन्होंने अपने प्रश्न को अलग ढंग से रखा)

शिक्षक : क्या इन सभी गुटकों को बराबर जगह चाहिए?

(इस बार भी चुप्पी रही।)

शिक्षक : चलो, मान लो कि ये चॉकलेट के गुटके हैं। अब बताओं कि क्या इन सबमें बराबर मात्रा में चॉकलेट हैं?

पहला बच्चा : नहीं, सबमें चॉकलेट की मात्रा अलग–अलग है।

दूसरा बच्चा : नहीं सर, मुझे लगता है कि पहले दो गुटकों में तो मात्रा बराबर है। बस उन्हें अलग–अलग तरह से रखा गया है। परन्तु तीसरे गुटके में मात्रा अलग है।

शिक्षक : क्या तुम यहां आकर समझा सकते हो?

लडके ने कई तरह से दूसरे गुटके की तुलना पहले गुटके के साथ की। वह यह कर ही रहा था कि अन्य बच्चे चिल्ला पड़े।

कई बच्चे : जी हां सर, पहले दो गुटके एक ही साइज के हैं।

शिक्षक : क्यों?

कक्षा में अस्पष्ट फुसफुसाहट होने लगी और एक बच्चा चिल्लाया।

एक लड़का : सर, ये बराबर जगह घेरते हैं।

शिक्षक : क्या तुम सब इससे सहमत हो?

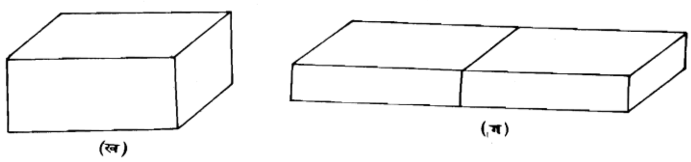
सारे बच्चे : जी सर।

शिक्षक : क्या मैं कह सकता हूं कि इनका आयतन समान है?

बच्चे सहर्ष सहमत हुए।

शिक्षक : परन्तु तीसरे गुटके के बारे में क्या कहोगे? इसका भी आयतन उतना ही है। यदि तुम इसे ध्यान से देखोगे तो पता चलेगा कि इसकी ऊंचाई तो (ख) से आधी है मगर लम्बाई उससे दुगनी है।

परन्तु बच्चे भ्रमित नजर आ रहे थे। इसलिए शिक्षक ने उनके सामने (ख) और (ग) के ही समान दो और गुटके रखे। अन्तर सिर्फ इतना था कि इस बार (ग) दो भागों में बंटा हुआ था। ।



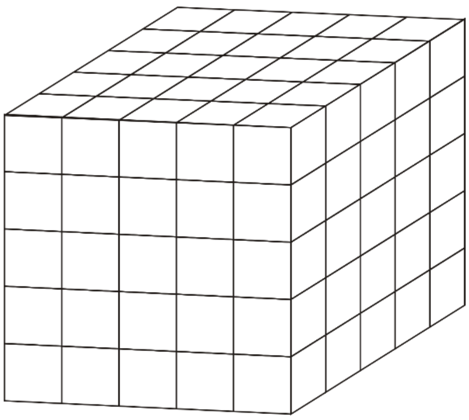
चित्र 4

शिक्षक ने दूसरे गुटके के टुकड़ों को अलग–अलग किया और उन्हें एक–दूसरे के ऊपर इस तरह जमाया कि नया गुटका हु–ब–हू चित्र 4 (ख) में दिखाये गुटके जैसा दिखने लगा। तब बच्चे यह समझ गए कि सभी गुटकों चित्र 3 (क, ख व ग) के साइज/आयतन समान थे।

प्रश्न : आप बच्चों को यह अवधारणा समझने में कैसे मदद करेंगे कि अलग–अलग आकृतियों वाली वस्तुओं का आयतन समान भी हो सकता है?

आयतन की इकाई

आयतन मापने की मानक इकाई बताने के लिए 1 सेमी. × 1 सेमी. × 1 सेमी. माप वाले छोटे घन को इकाई के रूप में इस्तेमाल किया जा सकता है। बच्चों को यहां दिक्कत यह आती है कि किसी ठोस वस्तु द्वारा घेरे गए आयतन तथा इसके संरक्षण की अवधारणा समझ लेने के बाद भी वे यह बात नहीं समझ पाते कि आयतन की तुलना किसी घन इकाई के बार–बार उपयोग से की जा सकती है। ठोस वस्तुओं के इकाई घनों से मिलकर बने होने की बात इसलिए स्पष्ट नहीं होती क्योंकि इसमें कई सारी घन इकाइयां तो उन्हें नजर ही नहीं आती। जैसे, किसी घनाकार ठोस के मध्य भाग में जो इकाइयां होती हैं। इस के लिए आप गतिविधि की मदद ले सकते हैं। वे लकड़ी के गुटकों (ब्लॉक्स) को तरह–तरह से जोड़–तोड़ कर अलग–अलग आकृतियां बनाये। उन्हें छोटे–छोटे घनाकार गुटकों को जोड़कर बना कोई ब्लॉक दिखाइए व उन्हें खुद पता करने दीजिए कि इस ब्लॉक में कितने छोटे घन लगे हैं (चित्र 5)।



उनसे यह पता करने को कहिए कि घनाकर गुटकों के रूप में ब्लॉक का आयतन कितना है। कुल कितने सेंटीमीटर घन हैं। आप उन्हें टोलियों में काम करने को भी कह सकते हैं। हर टोली इन घनाकार गुटकों से कोई ढांचा बनाए – जैसे समान्तर–षट्फलक या घनाभ। हर टोली से निम्न बिन्दुओं पर चर्चा करे–

i) पूरे ढांचे को बनाने में लगे घनों की संख्या।
ii) ढांचे में परतों की संख्या।
iii) एक परत में कतारों की संख्या।
iv) एक कतार में घनों की संख्या।
v) एक परत में घनों की संख्या।
vi) इन घनों के रूप में ढांचे का आयतन।
vii) सारे घनों को गिनने के बजाय आयतन निकालने का छोटा तरीका।

जब आप उनके उत्तर से संतुष्ट हो जाएं तो उनसे इस घन की भुजा मापने को कहें। इससे पता चलेगा कि इस घन की हर भुजा 1 सेमी. है। तब आप उन्हें बता सकते हैं कि इसे एक सेंटीमीटर घन कहते हैं और ढांचे का जो आयतन उन्होंने मापा है वह सेंटीमीटर घन में है। सेंटीमीटर घन को (से०मी०)^3 भी लिखते हैं। यह आयतन मापने की मानक इकाई है। इसी प्रकार से बड़े ढांचों का आयतन मापने के लिए 1 मीटर भुजा वाले घन का इस्तेमाल किया जाता है। तब (मी.)^3 को आयतन मापने की मानक इकाई कहा जाता है।

इस गतिविधि से बच्चों को घन व घनाभ के आयतन का सूत्र खुद प्राप्त करने में भी मदद मिलेगी। वे यह समझ पाएंगे कि

घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौडाई × ऊंचाई

और घन का आयतन = (लम्बाई)^3 होता है।

धारिताः

किसी बर्तन की धारिता का अर्थ है कि उसमें कितना तरल पदार्थ या रेत या नमक भरा जा सकता है। बच्चों को तरल पदार्थ की मात्रा का अनुमान लगाने में ठोस पदार्थों की अपेक्षा दिक्कत होती है। क्योंकि द्रव पदार्थ का कोई निश्चित आकार नहीं होता, जिस पात्र में इसे रखा जाता है यह उसी के आकार धारण कर लेता है। एक बर्त्तन की धारिता द्रव के आयतन को प्रदर्शित करता है, इसी प्रकार नमक या चूर्ण जैसी वस्तु का आयतन भी ज्ञात किया जा सकता है। यदि जग को पूर्ण रूप से 10 समान कप पानी से भरा जा सकता है तो 10 कप पानी जग की धारिता है। यदि प्रत्येक कप की धारिता 100 मि०ली० है तो जग की धारिता 1 लीटर होगी।

शुरूआत में बच्चों को अलग–अलग बर्त्तनों की धारिता अमानक इकाई का उपयोग करके मापने का अवसर प्रदान करना चाहिए। कुछ इसी प्रकार के क्रियाकलाप जिन्हें बच्चे स्कूल के भीतर या बाहर कर सकते हैं, नीचे दिया गया है।

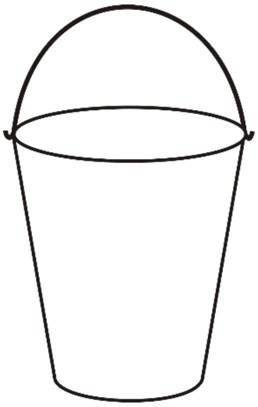
- एक बाल्टी में बोतल से पानी भरना
- एक कप से जग में पानी भरना
- एक बाल्टी से विद्यालय के पीने के पानी की टंकी भरना
- एक ग्लास से एक घड़े में पानी भरना

जब बच्चे को अमानक इकाईयों अर्थात् ग्लास, कप, जग, लोटा की सहायता से किसी बर्तन की धारिता मापने का काफी अभ्यास हो जायें, तभी उन्हें मानक इकाईयों की आवश्यकता महसूस कराने के लिए निम्नलिखित क्रियाकलाप कराये जा सकते हैं। यथा –

क्रियाकलाप–01

एक शिक्षक ने तीन अलग–अलग आकार के गिलास तथा एक छोटा कप लिया। अब तीनों गिलास की धारिता कप से प्राप्त किया।

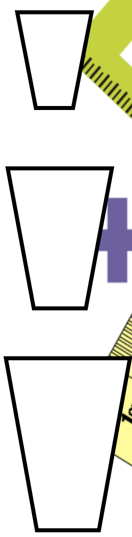
इस मामले में कप धारिता मापने की भौतिक इकाई मानी जायेगी तब धारिता की बात इस भौतिक इकाई के संदर्भ में कर सकते हैं। यहाँ छोटे ग्लास की धारिता 2 कप है। मंझले गिलास की धारिता 4 कप है और बड़े गिलास की धारिता 5 कप है। अब शिक्षक एक बाल्टी लाए और तीनों प्रकार के गिलासों से बाल्टी की धारिता निकालने का मौका बच्चों को दिया।



बाल्टी की धारिता 10 छोटे गिलास

बाल्टी की धारिता 5 मंझले गिलास

बाल्टी की धारिता 4 बड़े गिलास

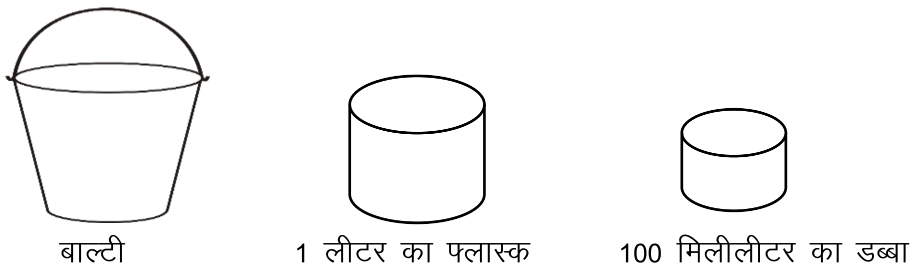


कुछ इसी तरह की गतिविधियों से बच्चे जल्दी समझ जाते हैं कि एक ही नाम के पात्र (बर्त्तन) की धारिता अलग–अलग होती है और वे धारिता मापने के लिए मानक इकाई की जरूरत समझने लगते हैं। उन्हें मानक इकाई की जरूरत महसूस कराने के लिए आप उसी तरह की चर्चा शुरू कर सकते हैं, जैसे लम्बाई के संदर्भ में की थी।

धारिता मापने की मानक इकाई लीटर है। एक लीटर 100 घन सेंटीमीटर या 100 से०मी०^3 के बराबर होता है। व्यावहारिक दृश्टि से लीटर और मिलीलीटर (1 लीटर = 1000 मिलीलीटर) का प्रयोग प्राथमिक कक्षाओं में उपयुक्त है। इसके निम्न क्रियाकलाप किए जा सकते हैं:–

क्रियाकलाप–02

बच्चों को एक ऐसा फ्लास्क दिया जा सकता है जिसमें 1 लीटर पानी आ सकता है। साथ में एक खाली डब्बा या शीशी हो जिसमें 100 मिलीलीटर (यानी लीटर का 10वां भाग) पानी आता हो (100 मिलीलीटर के दूध, दवा आदि के बर्त्तन आसानी से उपलब्ध होते हैं।) इससे बच्चे आसानी से देख पाएंगे कि ऐसे डिब्बे और फ्लास्क की सहायता से दूसरे बर्त्तन जैसे बाल्टी की धारिता ज्ञात की जा सकती है। मान ले बाल्टी में 4 फ्लास्क और 5 डब्बे पानी आ जाता है,



तो इसका अर्थ होगा कि बाल्टी की धारिता 4 लीटर 500 मिलीलीटर है। इसके बाद बच्चों को किराने की दुकान में तेल मापने वाले उपकरण या दूध मापने वाले उपकरण से परिचित करा सकते हैं।

समय की माप

मैंने अपने पड़ोसी के बेटे मोनू से पूछा कि 'अभी घड़ी में कितने बजे हैं तो उसने सही सही बता दिया कि 10 बजे हैं।' फिर मैंने उससे पूछा कि उसकी क्लास उससे पहले शुरू होती है या बाद में तो उसके पास कोई जवाब न था। क्या आप यह कह सकते हैं कि मोनू ने समय की अवधारणाएँ समझ ली है? समय की अवधारणा में एक अवधारणा है घटनाओं को सिलसिलेवार रखना। यानि कौन सी घटना किसी अन्य घटना से पहले या बाद में हुई और उनके बीच कितने समय का अन्तर रहा। अन्य अवधारणाओं में 'समय का बीतना' समय का एक क्षण और समय का अन्तराल शामिल है।

कल, आज और कल

सभी बच्चों को समय का एक मोटा–मोटा अहसास तो होता ही है। मसलन जब कोई बच्ची यह शिकायत करती है कि उसे स्कूल जाने के लिए 'जल्दी' उठनी पड़ती है जबकि उसकी बहन सोती रहती है, तो उसके शब्द 'जल्दी' का संबंध समय से ही तो है। इसी तरह से बच्चे अलग–अलग कामों में लगने वाले समय की तुलना के लिए कई शब्दों का इस्तेमाल करते हैं। गाँवों में यह एक आम खेल है कि जब बच्चे नदी–तालाब में नहाते हैं तो एक बच्चा पानी में डुबकी लगाता है और दूसरे बच्चे किनारे पर बैठकर 1, 2, 3, ... गिनना शुरू कर देता है। इस तरह से देखा जाता है कि वह कितनी देर तक पानी के अंदर डुबकी लगाकर रह सकता है। और फिर कौन सबसे ज्यादा देर तक पानी में रहा, इस बात को लेकर एक दूसरे से तुलना की जाती है।

समय से संबंधित ऐसे और कौन–कौन से शब्द हैं जिनका इस्तेमाल 6–7 साल के बच्चे आमतौर पर करते हैं? निम्नलिखित अभ्यास करते हुए आप कुछ ऐसे उदाहरण सोच सकते हैं।

हम अगर 7 वर्श की किसी बच्ची से पूछें कि उसकी उम्र ज्यादा है या उसके पिता की, तो शायद वह आसानी से बता देगी। हम अगर उनसे यह पूछें कि 'उन दोनों में से कौन पहले पैदा हुआ था', तो शायद जवाब देने से पहले वह थोडा सोचेगी और हम अगर उससे यह पूछ लें कि 'तुम्हारे पिता और दादा में से कौन पहले पैदा हुए थे', तो शायद उसके लिए सचमुच एक समस्या उठ खड़ी हो। इससे क्या पता चलता है? इससे ज़ाहिर होता है कि जो तभी घटा हो, उसको समझ पाना उसके लिए इतना मुश्किल नहीं है मगर काफी समय पहले घटी घटनाओं में समय का हिसाब लगा पाना उसके बस के बाहर है।

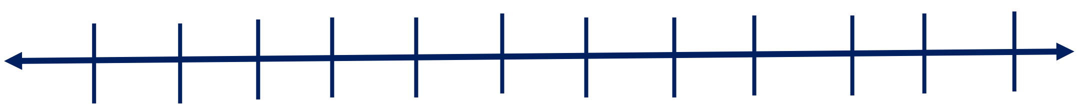
हम बच्चों से पूछ सकते हैं कि वे सुबह से अभी तक के कार्यों को क्रम से सुनाएँ। हम उनसे बातचीत शुरू करके बीते हुए कल, पिछले महीने, पिछले वर्ष या कुछ वर्ष पूर्व के घटनाओं को क्रम से व्यवस्थित करके उनमें समय की समझ विकसित कर सकते हैं।

इसी प्रकार बच्चों के साथ ऐसे कार्यक्रमों की सूची बना सकते हैं, जिसे हम बच्चों के साथ मिलकर आने वाले कल, अगले सप्ताह या अगले माह पूरा करेंगे। इन सबके लिए हम बच्चों से औपचारिक और अनौपचारिक रूप से विभिन्न समयावधि में धटित घटनाओं के बारे में बात करते हुए प्रश्न कर सकते हैं।

एक शिक्षिका बच्चों से बातचीत के क्रम में इस प्रकार के प्रश्न पूछती है :

- आपके घर में सबसे पहले कौन जगता है?
- आज क्लास में सबसे बाद में कौन आया?
- आज कौन–सा दिन है?
- कल कौन–सा दिन था?
- कल कौन–सा दिन होगा?
- कल आपकी कक्षा में गणित कौन से कालांश (पीरियड) में पढ़ाया जायेगा?
- कौन बड़ा है आप या आपका दोस्त?
- आप मोजे तथा जूते में से बाद में किसे पहनते हैं?

समय से संबंधित जितनी अधिक बातें हम बच्चों के साथ करेगें उतनी ही उनकी समय की समझ तेज होगीं। इन बातों के अतिरिक्त बच्चों को ऐसी स्थितियाँ उपलब्ध करायी जा सकती है जिनमें वे घटनाओं को समय रेखा पर व्यवस्थित करने का प्रयास करेगें। इस प्रकार बच्चे समय रेखा को समझते हुए निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर ढुंढ सकते हैं।



2009 10 11 12 13 14 15 16 2017 18 19 2020

1) आपका जन्म किस वर्ष में हुआ ?
2) आपकी पहली सालगिरह कब थी ?
3) अभी आपकी उम्र कितनी है ?
4) सन् 2020 में आपकी उम्र कितनी होगी ?

इस रेखा से बच्चे को यह भी समझने में मदद मिलती है कि भूत और भविष्य दोनों ही अन्तहीन हैं। कल, आज, और कल की समझ के लिए एक शिक्षिका ने निम्नलिखित गतिविधि कराई जिसमें तीन चरण अपनाएँ–

चरण 1. शिक्षिका ने 5–6 कार्ड बनाएँ जिसमें उन्होंने सिर्फ एक चीज–तारीख, महीना या साल बदला जैसे–

5 जनवरी 2020	2 जनवरी 2020	15 जनवरी 2020
30 जनवरी 2020	20 जनवरी 2020	18 जनवरी 2020

उन्होंने बच्चों को इन्हें क्रम में सजाने को कहा।

चरण 2. उन्होंने चरण दो में दो चीजे बदलकर कार्ड बनाया तथा

चरण 3. तीन में तीनों चीजें–तारीख, महीना और वर्ष बदलकर कार्ड बनाया और बच्चों से क्रम में सजाने को कहा।

Note:- तीनों चरणों को समझने में बच्चों को अधिक समय लग सकता है।

क्षण और समयावधिः

मैनें एक बच्ची से पूछा कि आपका विद्यालय किस समय शुरू होता है? उसका जवाब था– सुबह 9 बजे। बताओ 12 बजे तक कितने घंटे होंगे? उसने मन में बुदबुदाते हुए कहा– 3 घंटे। मैनें पूछा कैसे, तो उसने बताया कि 10, 11, 12 – कुल तीन घंटे हुए। यहाँ पहले सवाल का संबंध समय के एक क्षण से है और दूसरे का संबंध समय अन्तराल या समय की अवधि से है। समय के एक क्षण का मतलब उस समय से है जिस पर कोई घटना घटती है। जैसे– 9 बजे, सोमवार को, 1947 ई० इत्यादि।

बच्चों में समझ विकसित करने के लिए उसे अपने दिन भर के क्रियाकलापों की एक सूची बनाने के लिए कहा जा सकता है और साथ में यह भी लिखवाया जा सकता है कि कौन

सा काम वह किस समय करता है। इसी प्रकार उससे ऐसे सवाल भी पूछ सकते हैं कि ''अगर मैं 6 बजे सुबह उठा और 14 घंटे बाद सो गया, तो बताओ मैं कितने बजे सोया?

यहाँ यह बात सामने आती है कि स्कूल पूर्व स्तर से ही बच्चों को कई गतिविधियों के जरिए घटनाओं को क्रम में रखने का प्रशिक्षण देना शुरू करना जरूरी है। इससे आगे चलकर बच्चे को समय की स्पष्ट समझ विकसित करने में मदद मिलेगी। 'समय की अवधारणा' की समझ धीरे–धीरे बनती है। जैसे–जैसे बच्चों का अनुभव बढ़ता है वैसे–वैसे उसकी समझ बेहतर होती जाती है।

उदाहरणः एक शिक्षिका कक्षा 4 के बच्चों को सारे विषय पढ़ाती थी। स्कूल सुबह 9 बजे से दोपहर 1 बजे तक लगता था। वह अपने साथ कई कार्ड लेकर आई थी। हर कार्ड पर दिन का कोई समय लिखा, जिसे 10.00, 11.15, 11.40, 12.10, 12.30 वगैरह। दीवार पर एक घड़ी भी टंगी थी। उसने बच्चों से घड़ी की ओर इशारा करते हुए कहा।

शिक्षिका : क्या आप सब घड़ी पढ़ना जानते हैं?

विद्यार्थी : हाँ।

शिक्षिका : अब मैं जाँच करूंगी कि तुम घड़ी सही–सही देख सकते हो या नहीं। ये कुछ कार्ड हैं। (वे हर बच्चे को एक–एक कार्ड दे देती हैं और बच्चे कार्ड देखते हैं।) हर कार्ड पर एक समय लिखा है। अब तुम्हें करना यह है कि बीच–बीच में घड़ी देखते रहो। जब भी घड़ी में वही समय हो जाए जो तुम्हारे कार्ड पर है, तो कार्ड मुझे लौटा दो। जो भी यह काम सही सही करेगा, उसे इनाम मिलेगा।

कुछ बच्चे सही–सही यह काम कर पाए और कुछ नहीं। जो बच्चे सही नहीं कर पाए थे, उन्हें उसने कुछ समझाया और अगले दिन फिर से कोशिश करने को कहा। पहली कक्षा के बाद मैंने उससे पूछा कि इस गतिविधि के करने का मकसद क्या है? उसने बताया कि इस गतिविधि का मकसद यह है कि सही समय बताने की उनकी क्षमता बेहतर बने। इससे वे दिन के समय के प्रति ज्यादा जागरूक बनते हैं। उसने बताया कि वह यह गतिविधि एक हफ्ते तक नियमित समय अन्तराल पर देती रहेगी। इस समय तक बच्चे घड़ी देखकर सही समय बताना सीख जाएंगे। फिर उसने मुझे अगले हफ्ते किसी भी दिन आने को कहा।

अगली बार गई तो वह कोई अन्य गतिविधि आजमा रही थी। यह गणित की कक्षा थी और उसने उनके साथ एक अन्य गतिविधि करने का फैसला किया था। उसने कक्षा को 5 टोलियों में बांटा। हर टोली को उसने 5 खाली कार्डों का एक एक सेट दे दिया। फिर उन्होंने एक टोली से दूसरी टोली के पास जा जाकर बच्चों को यह गतिविधि सिखाई। उदाहरण के तौर पर–

शिक्षिका : घड़ी देखकर बताइए कि समय क्या हुआ है?

टोली 1 : 9:30

शिक्षिका : सही। अब आपको हर आधे घण्टे बाद एक कार्ड वापस करना है। घड़ी देखकर कार्ड वापस करने से पहले उस पर समय भी लिखना होगा। इसमें थोड़ी कठिनाई होती है तो आपस में चर्चा करके साफ तौर पर समझकर लिखें।

वह इसी प्रकार हर टोली के साथ गतिविधि करती रही और उसने टोली 2 को कार्ड का एक सेट दिया। उनसे उसने हर 1 घण्टे में कार्ड लौटाने को कहा। इसी प्रकार के कार्ड

उसने टोली 3, 4, 5 को भी दिए और समय के अलग–अलग अंतराल भी बताए। उसने उन टोलियों को इनाम भी देना तय किया जो 5 कार्ड सही–सही वापिस लौटा देगी। उन्होंने इस गतिविधि को कुछ दिनों तक 'समय समय पर दोहराई'। बहुत मुमकिन है कि अगर कोई बच्ची इस गतिविधि को सही–सही कर लेती है, तो वह यह समझ चुकी है कि 9.30 + 30 मिनट बराबर 10 होता है। पर इससे यह जाँचने में कैसे मदद मिलेगी कि बच्ची 1/2 घण्टे की अवधि का मतलब भी समझ गई है या नहीं?

इसके लिए उसने गतिविधि में थोड़ा संशोधन करके बच्चों को कहा कि घड़ी की सहायता के बगैर ही हर आधे घण्टे (या 1 घण्टे) में एक–एक कार्ड लौटाएं। उसने इसके लिए इस गतिविधि को अलग अलग तरह से दे दिया है अवधि को बदलकर '20 मिनट', '10 मिनट' वगैरह करके उसने बताया कि इस गतिविधि से बच्चों को 'समय की अवधि का मोटा–मोटा अन्दाज़' लगाने में मदद मिलेगी।

उसने टोलियों के अनुसार एक गतिविधि यह भी आजमाई कि हर टोली को करने के लिए कोई क्रिया दे दी– जैसे कोई गीत गाना, दीवार तक जाना और उसे छूना, ताली बजाना, किसी किताब से कोई अंश उतारना इत्यादि। उन्हें इस काम को एक तयशुदा अवधि के लिए करना होता है। मसलन शुरू में आधा घण्टा, फिर 5 मिनट, 1 मिनट वगैरह। इससे उन्हें समयावधि का अहसास बनाने में मदद मिलेगी। इससे उन्हें यह भी समझने में मदद मिलती है कि एक ही काम को करने में अलग–अलग लोगों को अलग–अलग समय लगता है। मैंने गौर किया कि वह हर मर्तबा टोलियों से खूब बातचीत करती थी। उसने उन्हें उनके रोज़मर्रा के काम से संबंधित कई अभ्यास घर पर करने को भी दिए।

दिन, सप्ताह, महीने और वर्षः

एक सूर्योदय से अगले सूर्योदय के बीच के समय को एक दिन कहते हैं। परन्तु वैज्ञानिक लगातार दो मध्य रात्रियों के बीच के समय को एक दिन के रूप में गणना करते हैं। इसे सूर्य–दिवस भी कहा जाता है। अर्थात् पृथ्वी द्वारा अपने अक्ष पर एक चक्कर पूरा करने में लिए गये समय को एक सूर्य–दिवस समय कहते हैं। एक दिन का मतलब घंटे की किसी भी अवधि से हो सकता है इसी प्रकार से एक सप्ताह, महीने और वर्ष को भी जानी पहचानी घटनाओं के बीच की अवधि से जोड़ा जा सकता है। जैसे– एक पूर्णिमा से दूसरी पूर्णिमा के बीच की अवधि 1 महीना है या 1 महीना 4 हफ्तों के बीच की अवधि है।

कैलेण्डर बच्चों को समय के बीतने का हिसाब–किताब रखने का एक व्यवस्थित तरीका सिखाता है। हर वर्ष मौसम बदलने के साथ हम दिनों, हफ्तों, महीनों के एक नियमित चक्र में से गुज़रते हैं। सालगिरह और छुट्टियाँ साल–दर–साल आती हैं। लिहाज़ा अगली बार जब आप कैलेण्डर खरीदने जाएं, तो अपने बच्चे को साथ ले जाएं। ऐसा कैलेण्डर तलाश करें जिस पर आकर्षक चित्र के अलावा बड़े–बड़े खाने हों जिनमें लिखा जा सके, चित्र बनाए जा सकें। शुरूआत में आप बच्चे से कह सकते हैं कि वह कैलेण्डर पर उन दिनों को नोट करें जो परिवार के लिए खास महत्व रखते हों। आप हफ्ते या महीने की महत्वपूर्ण घटनाएं भी अंकित कर सकते हैं। यहाँ कैलेण्डर के साथ एक गतिविधि दी जा रही है। इससे हम यह पता लगा सकते हैं कि बच्चे इस बात को कितना समझते हैं कि किस महीने में 30 दिन होते हैं और किसमें 31।

1 सूर्य दिवस = 24 घंटे, 1 घंटा = 60 मिनट, 1 मिनट = 60 सेकेंड

गतिविधि

हम एक पुराना कैलेण्डर ले सकते हैं। इसमें से महीनों के नाम हटा देंगे, सिर्फ तारीख वाला हिस्सा रहने देंगे। अब किसी एक बच्चे से कैलेण्डर को फिर से सही तरीके से प्रदर्शित करने के लिए कहेंगे बच्चा खुद ही तय करेगा कि कौन सा पन्ना किस महीने का है और उसे ठीक क्रम में सजाएगा।

सूर्य वर्षः

पृथ्वी सूर्य की एक परिक्रमा करने में जितना समय लेता है उसे एक सूर्य वर्ष कहते हैं।

1 सूर्य वर्ष = 365 दिन 5 घंटे, 48 मिनट 47 सेकेंड

एक कैलेण्डर वर्ष में 365 दिन होते हैं। इससे प्रत्येक वर्ष लगभग 6 घंटे बच जाते हैं। इसे पूरा करने के लिए प्रत्येक 4 वर्ष में एक वर्ष 366 दिन रखा जाता है और उस वर्ष को लीप वर्ष कहते हैं।

जो वर्ष 4 से पूर्ण रूप से विभाजित हो जाता है, वह लीप वर्ष होता है और उस वर्ष के फरवरी माह में 28 दिन के बजाय 29 दिन होते हैं।

बच्चों को महीनों, ऋतुओं, छुट्टियों, मौसम इत्यादि से परिचित कराने का एक तरीका यह भी है कि उन्हें इससे सम्बंधित गीतों, कविताएँ, गाने और रचनाएँ का अवसर दिए जा सकते हैं। उदाहरणत :

महीनों के गीत

30 दिन का माह सितम्बर

अप्रैल, जून और नवम्बर।

28 दिन का फरवरी जानो

बाकी सब को 31 मानो।

लीप वर्ष जब आता है

फरवरी एक बढ जाता है।

कक्षा–3 की पुस्तक में, एक हाथ की मुट्ठी बाँध कर शुरूआत में उभरी हुई हड्डी और गड्ढा पर आगे बढ़ने से उभरी हुई हड्डियों पर आए महीने 31 दिन के होते हैं। इससे बच्चे महीनों और दिनों की समझ बना सकते हैं।

अपवादः

ऐसे वर्ष अंक जिसमें इकाई और दहाई के स्थान पर '0' (शून्य) हो तो वह 4 से विभाजित होता है परन्तु तभी लीप वर्ष होते हैं जब ऐसे वर्ष 400 के गुणज हैं। इस प्रकार 2000 लीप वर्ष है परन्तु 1900, 1800, 2200 आदि लीप वर्ष नहीं है।

घड़ी में समयः

5–7 वर्षीय बच्चों को तब बहुत दिक्कत होती है जब वे 24 घंटे की घड़ी के आधार पर व्यक्त समय देखते है। उन्हें समझ नहीं आता कि यह क्या समय दिखा रहा है। यह इसलिए होता है कि जब उन्होंने अपने शिक्षक या माता–पिता से समय सीखा था, तब साधारण घड़ी का ही इस्तेमाल हुआ था। यानी 12 बजे से 12 तक का। 24 घंटे की घड़ी तो स्कूल में थोड़ी देर से सिखाई जाती है और नहीं भी।

हमें दोनों प्रकार की घड़ियों से बच्चों का परिचय कराना चाहिए। सामान्यतः हम 12 घंटा–घड़ी का इस्तेमाल करते हैं किन्तु रेलवे और वायुयान में 24 घंटे वाली घड़ी का इस्तेमाल होता है।

12 घंटा–घड़ी में डायल पर 1 से 12 तक घंटों के निशान बने होते हैं। घंटे की सूई 12 घंटे में एक चक्कर पूरा करती है और मिनट की सूई 1 घंटे में एक चक्कर पूरा करता है। मध्य रात्रि और दोपहर को 12 से निरूपित किया जाता है। 12 मध्यरात्रि और दोपहर के मध्य की अवधि को AM के रूप में चिह्नित करते हैं जैसे सुबह 6 बजे को 6 AM के और 12 बजे दोपहर से 12 बजे मध्यरात्रि के बीच की अवधि को PM से चिह्नित करते हैं, जैसे शाम के 6 बजे को 6 PM ।

24 घंटा–घड़ी में मध्यरात्रि को 24 घंटा से निरूपित किया जाता है तथा उसके बाद के घंटो को 1 बजे, 2 बजे .... और इसी प्रकार अगले मध्यरात्रि तक गणना करते हैं, इसमें AM और PM के इस्तेमाल की आवश्यकता नहीं होती है।

अगर कोई 8 साल की बच्ची 19:00:00 जैसा कोई समय देखकर हमसे पूछती है कि इस समय का क्या मतलब है? हम उसे कैसे यकीन दिलाएंगे कि यह समय शाम 7 बजे (7 PM) का है? इसके लिए एक

उदाहरण इस प्रकार दिया जा सकता है–

टी.वी. पर खबर (समाचार) शुरू होने से पहले समय दिखाया गया 16:00:00। 8 साल के अब्दुल ने यह देखकर अपने दादाजी से पूछा–

टी.वी. पर यह कौन सा समय लिखा है? – 16:00:00

उसके दादाजी ने बताया कि यह समाचार शुरू होने का समय है।

उसने घड़ी की ओर देखा और बोला अभी तो 4 बजे हैं, टी.वी. पर तो 4 बजे नहीं दिख रहा है।

दादाजी ने सोचा कि कैसे समझाऊ कि 4 बजे और 16:00:00 एक ही बात है।

फिर उन्होंने समझाया–

दादाजी – तुम्हें पता है एक दिन में कितने घंटे होते हैं?

अब्दुल – 24 घण्टे।

दादाजी – अभी क्या समय हुआ है?

अब्दुल – 4 बजकर तीस मिनट।

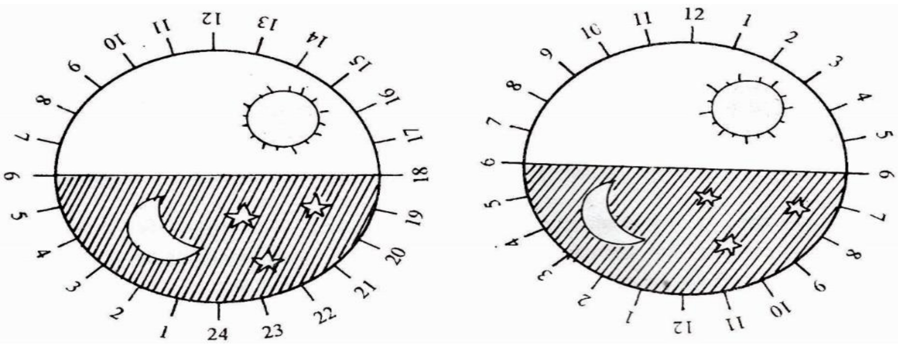
दादाजी – क्या तुम्हें पता है 4 बजकर तीस मिनट का समय सुबह भी आता है।

अब्दुल – हाँ, मेरी मम्मी इस समय जग जाती है।

दादाजी – अगर हम शाम वाले समय के लिए E (Evening) व सुबह वाले के लिए M (morning) लिखेंगे तो सुबह के लिए 4:30 M व शाम के लिए 4:30 E होगा।

तुम्हें पता होगा कि रात 12 बजे से दोपहर 12 बजे के बीच घड़ी का छोटा कांटा एक पूरा चक्कर काट लेता है।

लेकिन हम सिर्फ घड़ी देखकर नहीं बता सकते कि उस समय सुबह है या शाम। इस बात का पता हम दिन–रात देखकर लगाते हैं। अब मैं एक घड़ी इस तरह से बनाता हूँ।



(क) (ख)

यहाँ छायादार भाग रात बताता है और सफेद भाग दिन बताता है। इस घड़ी में एक ही कांटा चक्कर लगाता है यह कांटा जो टाइम बताएगा वहीं सही टाइम है चित्र ख में 1 से 12 लिखे है जो मध्यरात्रि 12 बजे से दोपहर 12 बजे तक का समय दर्शाते हैं। इसके बाद फिर से 1, 2, ... 12 लिखे हैं जो दोपहर 12 से रात 12 का समय दर्शाते हैं।

अब हम एक ऐसी घड़ी बनाते हैं जिसमें 1, 2 ..... 12 तक होंगे। उसके बाद 1, 2 ..... पूनः लिखने की बजाय 13, 14 .... 24 तक होंगे। दादाजी ने दोनों डिस्क को एक–दूसरे के ऊपर इस तरह से रखा कि उनके केन्द्र बिन्दु एक–दूसरे के ऊपर रहे। इसके जरिए उन्होंने समझाया कि 13 वास्तव में 1 से मेल खाता है। इसे 24 घंटा घड़ी कहते हैं।

फिर दादाजी ने उससे पूछा कि इस समय कितने बजे हैं?

अब्दुल : 18:00:00

इस प्रकार वह समझ गया कि समय को 24 घंटे के पैमाने पर भी दिखाया जाता है।

समय में संक्रियाएँ:

हम में से कई लोग समय की गणनाओं में भी अनजाने में दाशमिक प्रणाली लागू कर देते हैं। वास्तव में समय का मापन साठमिक (Sexagesimal) प्रणाली के आधार पर होता है। यानी स्थानीय मान की ऐसी प्रणाली जिसका आधार 60 होता है। उदाहरण के लिए 1 घंटा 45 मिनट और 2 घंटा 25 मिनट को कैसे जोड़ें?

घंटे	मिनट
घंटे	मिनट
1	4 5
+ 2	2 5

मिनट को जोड़ने पर 70 आता है, जो 60 से ज्यादा है, तो इसको घंटे–मिनट में बदलना चाहिए अर्थात् 1 घंटा 10 मिनट। अब एक घंटा को घंटे वाले कॉलम में ले जायेंगे अर्थात् घंटे 3 + 1 = 4 हो जायेंगे। अतः हल होगा 4 घंटे 10 मिनट।

> **प्रश्न:** जब एक बच्चे को यह सवाल दिया गया:
> ''2 घंटे 15 मिनट–1 घंटे 45 मिनट'' बच्चे का जबाब था 1 घंटा 15 मिनट। उसकी दिक्कत क्या है? इस दिक्कत से निजात पाने में हम उसकी मदद कैसे करेंगें?

संक्षेप में बच्चों में समय मापन के कौशल विकसित करने के लिए हमें कई प्रकार के क्रियाकलापों की योजना बनाने की आवश्यकता है।

आँकड़ों का प्रत्यय तथा प्रस्तुतीकरण–

गणित शिक्षण का एक महत्वपूर्ण क्षेत्र है आँकड़ो का एकत्रीकरण एवं प्रबंधन। हमारे दैनिक जीवन में कदम–कदम पर हमें किसी न किसी रूप मे कई प्रकार के आँकड़ों का सामना करना पड़ता है तथा उनका इस्तेमाल भी करना पड़ता है। जैसे किराने के दुकान के सामानों का रेटलिस्ट बोर्ड ले लीजिये। उसमें विभिन्न सामग्रियों की कीमत क्रम से लिखी हुई मिलेंगी या कपड़े की दुकान में कई प्रकार के कपड़ों की क्वालिटी और कीमत संबंधी आंकड़े दुकानदार आपको बताता है या विद्यालय में प्रत्येक कक्षा में प्रतिदिन बच्चों की उपस्थिति का रिकार्ड हो या परीक्षाफल का रिकार्ड हो, टीवी या समाचार पत्रों में विभिन्न शहरों का तापमान या वर्षा की मात्रा से संबन्धित जानकारी हो या खेल से संबन्धित रिकार्ड हो, ये सभी रिकार्ड या लिस्ट कुछ आँकड़ो को प्रदर्शित करते हैं। इन आँकड़ों को क्यों एकत्रित किया जाता है? इन आँकड़ों से हमें क्या मिलता है? क्या इस प्रकार के आँकड़ों से हमारी कुछ जरूरतों की पूर्ति होती है? हाँ, हमें आंकड़े एकत्रित करने की आवश्यकता है क्योंकि आंकड़े हमें कुछ जानकारी या सूचना उपलब्ध कराते हैं। आँकड़ों द्वारा उपलब्ध कराई गयी जानकारी के आधार पर हम किसी चीज या घटना को बेहतर ढंग से समझ सकते हैं तथा उसके बारे में कुछ निष्कर्ष निकाल सकते हैं। इन आँकड़ों के माध्यम से हम कुछ निष्कर्ष निकालते हैं जो हमारी समस्या की समाधान निकालने में सहायता करता है तथा कई तरह से हमारे लिए उपयोगी साबित होता है। जैसे–यदि विद्यालय में बच्चों की उपस्थिति कम है या किसी कक्षा की एक सप्ताह के दौरान बच्चों की औसत उपस्थिति ज्ञात करनी हो तो हमें इससे संबन्धित आंकड़े एकत्रित करने पड़ेंगे। इन एकत्रित आँकड़ों से वांछनीय जानकारी प्राप्त की जा सकती है। हमारे जीवन में आँकड़ों की महत्ता एवं

उपयोगिता को देखते हुये प्राथमिक कक्षाओं से ही बच्चों को आंकड़ा एकत्रीकरण एवं आंकड़ा प्रबंधन की अवधारणा से परिचित कराना आवश्यक है।

इस उपभाग में हम आंकड़े एकत्रीकरण एवं उसके प्रबंधन के कुछ विधियों के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे

आंकड़े क्या हैं?

आंकड़े अंकों या संख्याओं या राशियों का संग्रह होता है जो किसी एक कार्य या चीज या घटना से संबन्धित होता है। नीचे एक सारणी में सब्जियों के मूल्य (रुपयों में) दिए गए हैं जो सब्जियों से संबन्धित आँकड़े हैं।

सब्जियों के मूल्य	**तिथि: 10–06–2019**
सब्जियाँ	**1 किलोग्राम का मूल्य**
आलू	20 रू०
प्याज	25 रू०
टमाटर	20 रू०
बैगन	16 रू०
लौकी	15 रू०
भिन्डी	24 रू०
कटहल	26 रू०
गोभी	40 रू०

सब्जियों की कीमत संबंधी आंकड़े

निम्न सारणी मे दिल्ली में एक सप्ताह मे रिकार्ड किए गए विभिन्न दिनों का तापमान को प्रदर्शित कर रहा है–

तिथि	**उच्चतम तापमान डिग्री सेल्सियस में**	**निम्नतम तापमान डिग्री सेल्सियस में**
09–06–2019	42	29
10–06–2019	41	27
11–06–2019	43	28
12–06–2019	40	25
13–06–2019	43	29
14–06–2019	44	30

उपरोक्त दोनों सारणियों के आँकड़ों में संख्याओं का समावेश है (मापन इकाई अलग अलग है)। तापमान से संबन्धित आँकड़ो को एकत्रित करने में 6 दिन लगे। वही सब्जियों की कीमत प्रति किलोग्राम एक निश्चित तिथि के अनुसार प्रदर्शित है।

आँकड़ों का एकत्रीकरण एवं स्रोत–

हमें दैनिक जीवन में अनेक प्रकार की जानकारी या सूचनाओं की आवश्यकता होती है जिसे हम विभिन्न माध्यम से प्राप्त करते हैं, जैसे–किसी रेल का प्रस्थान या आगमन समय की जानकारी चाहिए तो हम यह जानकारी रेलवे की समय–सारणी में एकत्रित आँकड़ों से प्राप्त हो सकता है। हमारी जरूरतों या समस्या के आधार पर हम आंकड़े एकत्रित करते हैं या सूचना एकत्रित करते हैं। आंकड़े समस्या से संबन्धित स्रोत से एकत्रित किए जाते हैं। कुछ आंकड़ों का एकत्रीकरण आवश्यकतानुसार एक बार करना पड़ता है, जबकि कुछ आँकड़ों का एकत्रीकरण कई बार करना पड़ता है। जैसे–कक्षा चतुर्थ के सभी विद्यार्थियों का वजन और ऊँचाई ज्ञात करना है, तो ये आंकड़े कक्षा चतुर्थ के सभी बच्चों का वजन तौलकर प्राप्त किए जा सकते हैं। यदि हम 1 वर्ष पश्चात् इन बच्चों की वजन और ऊंचाई में वृद्धि की जानकारी प्राप्त करना चाहते हैं तो इन सभी बच्चों का वजन और ऊँचाई की माप 1 वर्ष बाद हमें पुनः एकत्रित करनी पड़ेगी। तभी हम बच्चों की वजन और ऊँचाई में वृद्धि की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।

हम कक्षा के सभी बच्चों का जन्मदिन एकत्रित करने के लिए कह सकते हैं तथा उन्हें इन एकत्रित आँकड़ों से यह पता लगाने के लिए कह सकते हैं कि किस वर्ष में सबसे अधिक बच्चों का जन्म हुआ या किस महीने में सबसे अधिक बच्चों की जन्मतिथि है या किन–किन बच्चों की जन्मतिथि समान है।

आँकड़ों का प्रबंधन –

एकत्रित आँकड़े सदैव व्यवस्थित नहीं होते हैं। अव्यवस्थित आँकड़ो से सूचना प्राप्त करना कठिन होता है इसलिए आँकड़ो से आसानी से सूचना प्राप्त करने के लिए हमें आँकड़ों को क्रम से व्यवस्थित करना पड़ता है। आँकड़ों को सारणीबद्ध किया जा सकता है।

उदाहरण–

मान लीजिए, इकाई परीक्षा में गणित विषय में 15 बच्चों के प्राप्तांक (अधिकतम अंक 10) निम्न हैं–

4, 6, 9, 3, 5, 7, 4, 6, 5, 6, 4, 5, 8, 6, 7

उपरोक्त आँकड़ों को देखकर आसानी पता नहीं लगाया जा सकता है कि कितने बच्चों के अंक समान है तथा सबसे अधिक बच्चों ने कितने अंक प्राप्त किए हैं। यदि इन आँकड़ों को हम बढ़ते क्रम में लिखते हैं, तो हमें आंकड़े निम्न रूप में दिखाई देंगे–

3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9

अब इस आँकड़े को देखने से हम उपरोक्त प्रश्नो का उत्तर आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। आँकड़ो को क्रमबद्ध रूप मे व्यवस्थित करने से सूचना आसानी से प्राप्त की जा सकती है।

क्रियाकलाप

कक्षा चतुर्थ के विद्यार्थी एक सैर (Picnic) पर जाने की तैयारी कर रहें हैं। शिक्षक ने बच्चों से चार फलों केला, सेब, आम और पपीता में से एक फल चुनने को कहा इसकी सूची बनाने का कार्य रीतू को सौंपा गया। उसने सभी बच्चों की एक सूची बनाई और प्रत्येक नाम के सामने उसके द्वारा चुना हुआ फल इस प्रकार लिख दिया–

अनुराधा	–	केला
फातिमा	–	आम
मनोज	–	पपीता
जावेद	–	सेब
रितू	–	आम

ये सारणी ही हमें आँकड़े उपलब्ध कराती है। इस प्रकार एकत्रित की गई सूचनाऐं आँकड़े (Data) कहलाती है। बच्चे आँकड़ा का मतलब समझ पायें, इसके लिए उनके घर, गाँव तथा विद्यालय से संबंधित विभिन्न तरह के आँकड़े इकठ्ठा करने का मौका देना होगा। बच्चों के दैनिक जीवन से संबंधित निम्नलिखित आँकड़ो को इकठ्ठा करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए –

- विभिन्न टूथपेस्टों के नाम जो आपके कक्षा के बच्चे प्रयोग करते हों।
- आपके कक्षा के विभिन्न महीनों में जन्म लेने वाले बच्चों की संख्या।
- विभिन्न साबुनों के नाम, जो आपके कक्षा के बच्चे प्रयोग करते हों।
- किसी बच्चे के चार दोस्तों के भाई और बहनों की संख्या।
- आपके कक्षा के एक सप्ताह में अनुपस्थित बच्चों की संख्या।
- विद्यालय के विभिन्न कक्षाओं में बच्चों की संख्या।
- कक्षा में विभिन्न बच्चों का पसंदीदा खेलों का नाम।
- बच्चों द्वारा पसन्द किए जाने वाली मिठाईयों के नाम इत्यादि।

यों तो आँकड़े इक्ठ्ठा करना बच्चों के लिए मनोरंजक गतिविधि होता है, पर उसकी पूरी उपयोगिता तभी है जब आँकड़ो पर चर्चा की जाय। आँकड़ो का संग्रह, और उसे सजाने से बच्चे अपने अनुभवों को संगठित कर पाते हैं, तथा उनसे निष्कर्ष तक पहुँचने में बच्चों को सहायता मिलती है।

आँकड़ो का प्रस्तुतीकरण एवं विश्लेषण –

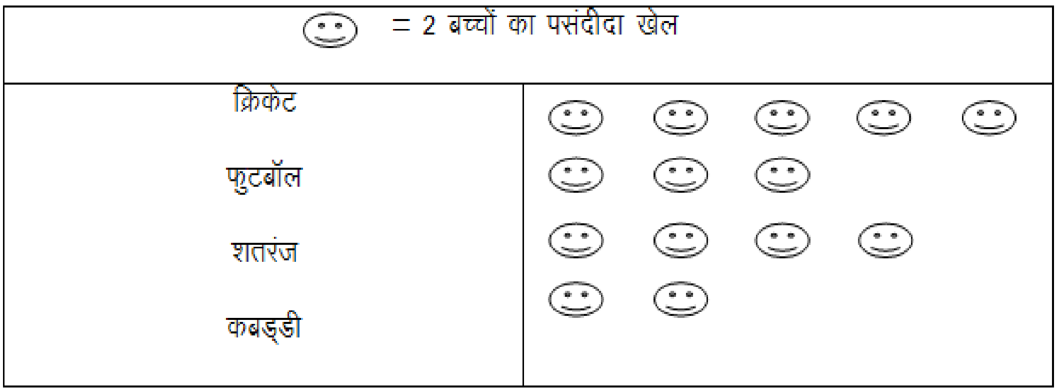
आँकड़ो के एकत्रीकरण तथा व्यवस्थिकरण के पश्चात आँकड़ो का विश्लेषण करना भी जरूरी है। विश्लेषण करके हम विभिन्न प्रकार की जानकारी आँकड़ो से प्राप्त कर सकते हैं। विश्लेषण करने का अर्थ है आँकड़ो का सूक्ष्मता के साथ अध्ययन करना तथा सुस्पष्ट और सटीक जानकारी प्राप्त करना। उपरोक्त उदाहरणों से कई जानकारी एकत्रित की जा सकती है, जैसे–सब्जी की कीमत के आँकड़ो से सबसे महंगी और सबसे सस्ती सब्जी का दाम ज्ञात किया जा सकता है या किन सब्जियों के दाम मे कम अंतर है? सीजन की कौन–कौन सी सब्जी उपलब्ध है, आदि जानकारी प्राप्त की जा सकती है। बच्चों को उनके द्वारा एकत्रित आंकड़ो से अधिकतम सूचना या जानकारी प्राप्त करने के लिए प्रेरित करने की अवश्यकता है ताकि वे गहन रूप से एकत्रित आँकड़ों का विश्लेषण करने की कुशलता अर्जित कर सकें।

यहाँ बच्चे न सिर्फ आँकड़ो का विश्लेषण करते हैं, बल्कि आँकड़ो की प्रस्तुति पर भी अपनी समझ बना लेते हैं। प्रायः हमें उपलब्ध आँकड़े असंगठित रूप में प्राप्त होते हैं, जिन्हें यथाप्राप्त आँकड़े (Raw Data) कहा जाता है। इसे बढ़ते या घटते क्रम में लगाने पर संगठित आँकड़े कहलाते हैं। आँकड़ो को क्रमबद्ध रूप में संगठित करने का अभ्यास बच्चों में गतिविधियों के माध्यम से की जानी चाहिए। सबसे पहले आँकडो का अधिकतम तथा न्यूनतम मान बताने को कहें, फिर अनुक्रम (Ordering) का अभ्यास कराएं आँकड़ो के अधिकतम मान तथा न्यूनतम मान के अन्तर को आँकड़ो का परिसर (Range) कहा जाता है। कक्षा अध्यापिका सुश्री वीणा चाहती थी कि उनके बच्चे आँकड़ो के आधार पर स्वयं निष्कर्ष तक पहुँचे। इसके लिए उसने एक तालिका बनाई, जो बच्चों के पसंदीदा खेल से संबंधित था। फिर उसने बच्चे द्वारा अपने मित्र से पूछकर तालिका को भरने की गतिविधि कराई:

पसंदीदा खेल	प्रत्येक बच्चे की पसन्द (मिलान चिन्ह)	बच्चों की कुल संख्या (बारंबारता)
क्रिकेट	卌 卌	10
फुटबॉल	卌 I	6
शतरंज	卌 III	8
कबड्डी	IIII	4

वह जानती है कि जब बच्चे स्वयं अपने मित्र से पूछकर सारणी में मिलान चिह्न (Tally Mark) लगाते हैं, तो इसकी समझ और बारम्बारता की समझ स्वयं बना लेते हैं। अतः इसका मौका बच्चे को अधिक से अधिक देना चाहिए। उपर्युक्त सारणी बारम्बारता बंटन सारणी (Frequency distribution table) कहलाती है। यह बात भी बच्चे समझ पाते हैं।

सुश्री वीणा मानती है कि जब बच्चे आँकड़ो का सारणी बनाये तब उसे चित्रालेख (Pictograph) में भी प्रदर्शित करना चाहिए। एक चित्रालेख आँकड़ो को चित्रों, वस्तुओं या



वस्तुओं के भागों के रूप (आलेखीय रूप) निरूपित करता है। यहाँ उपर्युक्त आँकड़ो को भिन्न चित्रालेख द्वारा निरूपित किया गया है।

शिक्षिका बच्चों को चित्रालेख की व्याख्या के लिए प्रोत्साहित करती हैं। इसके लिए वह एक या दो प्रासंगिक प्रश्न पूछती है। जैसे–चित्रालेख हमें क्या बताता है? एक संकेत कितनी वस्तुओं को निरूपित करता है?

गतिविधि

अब शिक्षिका ने अपनी कक्षा के बच्चों के परिवारों के सदस्यों की संख्या से संबंधित आँकड़े (सूचनाऐं) एकत्रित कर उन्हें निम्नांकित सारणी के रूप में निरूपित कराया।

परिवार के सदस्यों की संख्या	मिलान चिह्न	बारंबारता

अब उन्होंने निम्नलिखित प्रश्नों के हल ढूंढने के लिए कहा :–

1) कौन–सी संख्या न्यूनतम बार आती है।
2) कौन–सी संख्या अधिकतम बार आती है।
3) इस आँकड़े का परिसर क्या है?
4) कौन–सी संख्याऐं बराबर बार आती है।
5) क्या इन आँकड़ो को चित्रालेख द्वारा दिखाया जा सकता है?

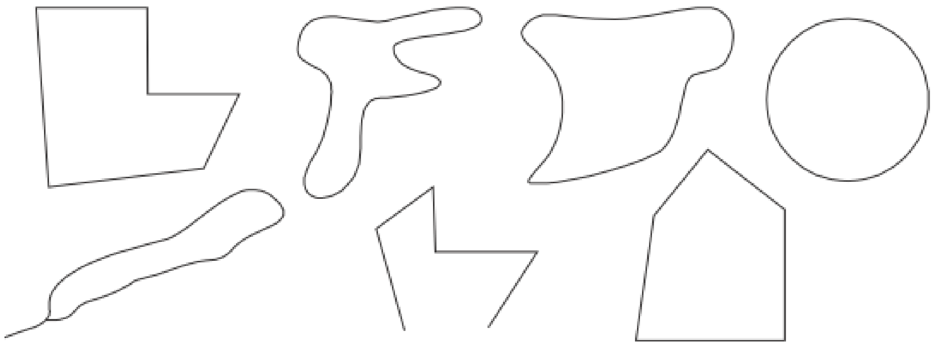
इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् हमने मापन का अर्थ एवं उसकी आवश्यकता की समझ विकसित तो की ही है, साथ ही अमानक एवं मानक इकाईयों की उपादेयता एवं इनके उपयोग से मापन के तरीकों पर भी चर्चा की। इतना ही नहीं हमने यह भी जाना कि अपने परिवेश की विभिन्न त्रिविमीय चीजों के साथ बच्चों को बचपन में हुए अनुभवों का उपयोग उन्हें साइज का एहसास देने के लिए किया जा सकता है। हमने यह भी जाना कि

शुरूआत में बच्चों को मापन की भौतिक इकाईयों (स्थानीय अमानक इकाईयों) के उपयोग का प्रशिक्षण दिया जा सकता है। इसके लिए बित्ता, कदम, हाथ, पैर इत्यादि का उपयोग लंबाई मापन तथा कटोरा, गिलास का उपयोग धारिता मापन के लिए किया जा सकता है। किन्तु इन अमानक इकाईयों के प्रयोग से मापन का परिणाम भिन्न–भिन्न हो सकता है। अतः एक मानक परिणाम प्राप्त करने हेतु हमें मानक इकाईयों की जरूरत पड़ती है। आँकड़ो को चित्रात्मक रूप में प्रस्तुत करके परिणामों की जानकारी करना आसान होता है। हमने इस इकाई के माध्यम से मानक इकाईयों के उपयोग से लंबाई, भार, धारिता, समय इत्यादि के मापन की समझ विकसित की। इतना ही नहीं हमने इस इकाई में आँकड़ों के संग्रहण एवं इसकी प्रस्तुत की विधियों आदि की जानकारी प्राप्त की जिससे हम अपने वर्ग–विनिमयन को प्रभावी बना सकें।

अभ्यास के प्रश्न

1. ''जीवन के हर क्षेत्र में मापन की आवश्यकता है।'' इस कथन से आप कहाँ तक सहमत हैं, स्पष्ट करें।
2. तीसरी कक्षा के बच्चे को लंबाई की अवधारणा विकसित करने के लिए आप क्या करेंगे?
3. तुलना मापन की पहली क्रिया है– इस कथन को स्पष्ट करें।
4. अमानक इकाईयाँ बच्चों में मापन की अवधारणा स्पष्ट करने में किस प्रकार सहायक है? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट करें।
5. अमानक इकाईयों के आधार पर आप मानक इकाईयों की समझ कैसे विकसित करेंगे? आप बच्चों को कैसे विश्वास दिला पाएँगे कि मापन में अमानक इकाईयाँ अपर्याप्त है?
6. मानक इकाईयाँ ही मान के लिए सटीक इकाईयाँ हैं? इसे आप कैसे स्पष्ट करेंगे?
7. आप कैसे जाँचेंगे कि बच्चे को भार की अवधारणा समझ में आ गई है?
8. आपके परिवेश में लोग लम्बाई मापने के लिए कौन–कौन से अमानक इकाई का प्रयोग करते हैं। सूची बनाएं। इनके प्रयोग से उन्हें कौन–कौन सी कठिनाइयाँ होती है।
9. लम्बाई मापन में शुद्धता के लिए कौन–कौन आवश्यक सावधानियाँ बरतेंगे?
10. जब बच्चे तराजू का उपयोग स्वयं करते हैं, तो उससे उन्हें कौन–कौन से अनुभव प्राप्त होते हैं?
11. बच्चों में धारिता की समझ विकसित करने के लिए एक गतिविधि बनाइए।
12. घड़ी की सहायता से आप समय की अवधारणा कैसे विकसित करेगें?
13. कुछ प्रश्नों की सूची बनायें, जिससे जाना जा सकें कि बच्चे समय की आवधारणा को समझते हैं।
14. मुद्रा की पहचान और उसके मूल्य की समझ हेतु बच्चों के लिए एक गतिविधि बनाइए तथा बतायें कि यह कैसे उपयोगी होगा।
15. आँकड़ों का एकत्र करना क्यों जरूरी है? अपने आसपास एकत्र किये जा सकने वाले आँकड़ों की सूची तैयार कीजिए।

16. आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण का क्या महत्व है? उदाहरण सहित चर्चा कीजिए।
17. क्या मापन की मानक इकाईयों की आवश्यकता है? मानक तथा अमानक इकाईयों के कोई तीन अंतर बताइए।
18. आप वर्ग व त्रिभुज के क्षेत्रफल की समझ विकसित करते हुए सूत्र तक कैसे पहुँचाएँगे? उदाहरण द्वारा समझाइए।
19. अगर क्षेत्रफल मापने की इकाई 1 सेमी. भुजा वाले वर्ग की जगह 1 सेमी. भुजा वाले समबाहू त्रिभुज हो, तो आयत के क्षेत्रफल का सूत्र क्या होगा? ज्ञात कीजिए।
20. इनमें से किन आकृतियों का परिमाप मापा जा सकता है? परिमाप मापते हुए तरीके सुझाइए।



21. आप कक्षा में धारिता की अवधारणा सिखाने के लिए क्या प्रक्रिया अपनायेंगे?
22. आप धारिता और आयतन की अवधारणा का अन्तर कैसे समझाएंगे?
23. 'एक क्षण' और 'समय अंतराल' की समझ का अन्दाज़ लगाने के लिए आप उसे किस तरह के अभ्यास/गतिविधियाँ करायेंगे?
24. एक मैदानी खेल सुझाइए जिससे 'समय अंतराल' की अवधारणा की समझ बेहतर बने।
25. एक गतिविधि बताइए जिससे सामान्य समय को 24 घंटे वाले समय में और 24 घंटे वाले समय को सामान्य समय में बदलने की क्षमता का विकास हो?

परियोजना कार्य

- विभिन्न भौतिक इकाईयों जैसे डण्डा, माचिस की डिब्बी, पेंसिल, गिल्ली इत्यादि की सहायता से वर्ग कक्ष, मेज, श्यामपट, बेंच इत्यादि की माप कर एक चार्ट पर प्रदर्शित कीजिए।
- अपने आसपास के बच्चों से बातचीत करके ऐसे 10 शब्दों की सूची बनाइए जिनका इस्तेमाल वे समय को व्यक्त करने के लिए करते हैं।

सीखने की योजना

प्रशिक्षु का नाम

कक्षा 2 कालांश ....तिथि...

विषय गणित

शीर्षक : इकाई, दहाई, सैकड़ा
अध्याय : 7

विषय वस्तु से संबंधित पूर्व समीक्षा

नए विषय वस्तु की चर्चा शुरू करनी है हाँ/ना

पिछले कालांश के विषय वस्तु का विस्तार करना है हाँ/ना

यह विषय–वस्तु इस कक्षा के पाठ्यचर्या–पाठ्यक्रम में उल्लिखित किन उद्देश्यों/बिंदुओं से जुड़ी है?

बच्चों को खेल–खेल में गणितीय अवधारणाओं से परिचित कराना। गणित की किसी अवधारणा के प्रति बच्चों की अपनी व्यावहारिक समझ क्या है, उसे समझाना तथा बच्चों को स्वयं से सीखने का मौका देना।

क्या यह विषय वस्तु पूर्व की कक्षाओं के पाठ्यक्रम में भी शामिल है? कैसे?

अंक गिनती आदि शामिल है लेकिन इकाई दहाई सैकड़ा की अवधारणा एक साथ नहीं है

यह विषय–वस्तु कक्षा के और किन–किन विषयों/इकाइयों से जुड़ी है?

जहां–जहां गिनती या स्थानीय मान की बात है उससे यह विषय वस्तु जुड़ी हुई है।

विषय वस्तु/उप विषय वस्तु का विवरण/उद्देश्य:

इस अध्याय में इकाई दहाई और सैकड़ा की अवधारणा को समझने के लिए कुछ रोचक गतिविधियां दी गयी हैं।

इस इकाई से बच्चे 3 अंकों की संख्या को शब्दों में लिखना जानेंगे।

इस अध्याय के माध्यम से बच्चे तीन अंको की संख्याओं के मान को समझ पाएंगे

सीखने सिखाने की विधि :	कुछ सुझावात्मक उदाहरण	
पहले स्वयं से समझना फिर कुछ गतिविधियों को एकल कार्य के रूप में बच्चों को करने के लिए देना। उसके बाद कक्षा में इससे संबंधित एक खेल या प्रदर्शन का उपयोग करना।	सामूहिक चर्चा	प्रयोग
	समूह कार्य	खोज
	एकल कार्य	खेल
	पठन – लेखन	रोल–प्ले

.इस विधि/विधियों को क्यों चुना गया :

3 अंको वाली संख्याओं की अवधारणा से बच्चों को पहली बार परिचित कराया जा रहा है इसलिए इसके विषय में कुछ आधारभूत बातों को पहले समझाना जरूरी है फिर उस समझ के साथ बच्चों को जुड़ने के लिए उस समय देना चाहिए ताकि वह कुछ प्रश्नों से यह आजमा पाए कि वे इस अवधारणा को कैसे समझ रहे हैं? बच्चे खेल और प्रदर्शन के माध्यम से ज्यादा सीखते हैं और यह सीख उनके लिए ज्यादा पक्की होती है साथ ही ये विधियां बच्चों को आकर्षित भी करती हैं, इसलिए इन विधियों को चुना गया है।

सीखने की विधि तथा शिक्षा शास्त्र का संक्षिप्त विवरण	
योजना	**ध्यान में रखने योग्य समावेशी बिंदु**
पूर्व अंकित उद्देश्य को प्राप्त करने के लिए हमें यहां योजना का विवरण देना है इसके लिए हम गिनतारे की मदद से इकाई दहाई सैकड़ा की अवधारणा विकसित करेंगे। फिर चित्र के माध्यम से हम यह बताएंगे कि गिनतारे के सबसे दाएं तरफ की छड़ जिसे इकाई नाम दिया गया है, उसमें डाले गए गोली इकाई के प्रतीक हैं। इसके बाद किसी एक बच्चे से मोती की गिनती कराएंगे जैसे 4 अर्थात 4 इकाइयां। फिर दूसरी छड़ के मोती दहाई को इंगित करते हैं। अर्थात् 2 = दो दहाइयाँ। यहां यह भी बताएंगे कि प्रत्येक दहाई का मतलब होता है; 10 इकाइयाँ। इस प्रकार श्यामपट्ट पर लिखते जाएंगे, 2 दहाई = 2 X 10 = 20 इसी प्रकार तीसरी छड़ मे एक मोती का मतलब एक सौ है। इस प्रकार तीनों छड़ों की संख्याओं को मिलाने पर 100 +20+4 = 124 संख्या प्राप्त होगी, अर्थात् गिनतारा एक सैकड़ा 2 दहाई तथा 4 इकाइयों को प्रदर्शित करेगा। इस प्रकार हम 124 के प्रत्येक अंक के स्थानीय मान की समझ भी विकसित करेंगे अर्थात संख्या 124 में 1 का मान सौ 2 का मान 20 कथा 4 का मान 4। तत्पश्चात बच्चों को बारी बारी से श्यामपट्ट पर कुछ संख्याओं को देखकर उनमें अंकित संख्या में अंको की इकाई दहाई एवं सैकड़ा की पहचान कराएंगे तथा अंकों के	• क्या बच्चों के संदर्भ को ध्यान में रखा गया है आप किस प्रकार के उदाहरणों को प्रस्तुत करेंगे। • बच्चों को स्वयं से सीखने का कितना अवसर है ? • उन्हें सवाल पूछने का कितना अवसर है? • सीखने सिखाने का समय अनुपात क्या है? एक कालांश का कितना समय शिक्षक के सक्रिय निर्देशन में है और कितना समय बच्चों को स्वतंत्र चिंतन व कार्य करने के लिए दिया गया है? • क्या चर्चा में सामाजिक सांस्कृतिक राजनीतिक आदि मुद्दों को शामिल करने की संभावना है? • NCF-2005 बी सी एफ 2008 के सुझाए बिंदुओं का कितना ध्यान रखा गया है? • क्या योजना में सामाजिक व संवैधानिक मूल्यों को समाहित करने की संभावना है? • क्या सतत एवं व्यापक मूल्यांकन की कोई प्रक्रिया भी साथ साथ चल रही है? • इस योजना के क्रियान्वयन में आपको क्या–क्या चुनौतियां आ सकती हैं? • इस योजना में कितना लचीलापन है अर्थात कक्षा के माहौल के हिसाब से इस योजना में बदलाव की कितनी संभावना हो सकती है? • क्या जेंडर संवेदनशीलता का ध्यान रखा गया है?

वास्तविक मान का भी बोध कराएंगे।	

शिक्षक/शिक्षिका द्वारा स्वमूल्यांकन के सुझावात्मक बिंदु
क्या विद्यार्थी ने उन उद्देश्यों को समझा जिसके लिए यह विषय वस्तु दी गई थी, इसका मूल्यांकन किया गया या नहीं? मूल्यांकन को कक्षा के दौरान किया गया जिसके आधार पर यह कहा जा सकता है कि विद्यार्थी समझने की ओर अग्रसर हैं। उद्देश्यों को समझने की पुष्टि तभी हो पाएगी जब यह देखा जाएगा कि वे इस अवधारणा का प्रयोग अपने सामान्य कार्यों में कैसे कर रहे हैं।
क्या इसे विषय वस्तु को फिर से कक्षा में चर्चा करने की आवश्यकता है? क्यों या क्यों नहीं? अगली कक्षा के शुरुआती समय में इस पर थोड़ी चर्चा की जाएगी हालांकि आगे के अध्यायों में स्वतः ही इस अवधारणा को बार–बार संदर्भ में लाया जाएगा
विद्यार्थियों द्वारा पूछे गए प्रमुख सवाल क्या थे? कितने विद्यार्थियों ने सवाल पूछे? बच्चों द्वारा कोई सवाल सीधे/प्रत्यक्ष रूप से नहीं पूछा गया पर बच्चों ने खेल के माध्यम से एक दूसरे से सवाल पूछे। बच्चे मुझसे भी सवाल पूछें, इसके लिए उन्हें प्रेरित किया गया।
मैंने उन सवालों को कैसे समझाया? क्या विद्यार्थियों से स्वयं उन सवालों को हल करने का मौका मिला? अधिकतम सवालों को विद्यार्थियों ने स्वयं ही हल किये।
इस विषय वस्तु के सीखने सिखाने में किस प्रकार के संसाधनों का प्रयोग किया गया? उनकी क्या उपयोगिता रही? इस अवधारणा के लिए अलग से कोई संसाधन उपयोग में लाया गया। गिनतारा/ खेल को एक माध्यम बनाया गया।
इस विषय वस्तु को यदि दोबारा पढ़ना हो तो मैं सीखने सिखाने की योजना में क्या बदलाव करूंगा/करूंगी? खेल के स्थान पर किसी अन्य विधि का प्रयोग करके भी देखा जा सकता है।
इस विषय वस्तु से संबंधित कोई ऐसा सवाल जिसे अपने संस्थान के विषय विशेषज्ञ तथा मेंटर्स से चर्चा करने की अपेक्षा है? इकाई दहाई सैकड़ा को कितनी गहराई तक समझने की आवश्यकता है?

अन्य टिप्पणी	
आलोचनात्मक बिंदु	कक्षा में प्रत्यक्ष रूप से आप जो आलोकित कर रहे हैं उसे नीचे लिखें। मैं कक्षा में 10 मिनट देर से पहुंचा।

	अब कक्षा में यह देखा जा रहा है कि बच्चों को आपने कुछ सवालों को स्वयं से करने के लिए दिया है। आप कुछ बच्चों के पास जाकर उनसे पूछ रहे हैं। आप खेल कर आ रहे हैं एवं गिनतारा का प्रदर्शन कर रहे हैं। कुछ बच्चे बातचीत कर रहे हैं लेकिन गिनतारा को देखकर बच्चे उत्साहित हैं।
NCF – 2005, BCF – 2008, NCFTE – 2010 द्वारा सुझाए गए सिद्धांतों के आलोक में कक्षा के सीखने सिखाने की प्रक्रिया की समीक्षा प्रशिक्षण से और क्या क्या अपेक्षा की जा सकती है इस संदर्भ में कुछ महत्वपूर्ण सुझावः कक्षा में बाल केंद्रित अवधारणा पर बल दिया गया है। लोकतांत्रिक माहौल भी बनाया जा रहा है। बच्चों के अपने दैनिक जीवन के गणितीय अवधारणाओं को और विशेष रूप से कक्षा में लाने की आवश्यकता है।	**कुछ मार्गदर्शक सिद्धांतः** • ज्ञान को स्कूल के बाहर के जीवन से जोड़ना। • पढ़ाई रटंत प्रणाली से मुक्त हो यह सुनिश्चित करना। • पाठ्यचर्या का इस तरह संवर्धन कि वह बच्चों की चौमुखी विकास के अवसर मुहैया कराए बजाय इसके कि वह पाठ्यपुस्तक केंद्रित बनकर रह जाए। • परीक्षा को अपेक्षाकृत अधिक लचीला बनाना और कक्षा की गतिविधियों से जोड़ना। • एक ऐसी अधि भावी पहचान का विकास जिसमें प्रजातांत्रिक राज्य व्यवस्था के अंतर्गत राष्ट्रीय चिंताएं समाहित हो। • बच्चों की अस्मिता एवं विविधता का सम्मान करना एक प्रोफेशनल शिक्षक के रूप में कक्षा के सीखने सिखाने की प्रक्रिया में भूमिका निभाना। • आलोचनात्मक चिंतन को प्रोत्साहित करना लोकतांत्रिक कक्षा के माहौल को तैयार करना।

संदर्भ सूची

- बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा (बी.सी.एफ.) 2008
- बिहार राज्य की गणित की पाठ्यपुस्तकें कक्षा 1 से कक्षा 5 तक
- प्राथमिक स्तर पर गणित की पाठ्यपुस्तक खुशी–खुशी शृखंला, कक्षा 1–5 एकलव्य का प्रकाशन, भोपाल
- राश्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एन.सी.एफ.) 2005
- गणित शिक्षण का आधारपत्र, एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली
- Arora, S.K. How to teach Mathematics. New Delhi, Sterling Publishers Pvt. Ltd., 2000.
- Lampert, Teaching Problems and the Problems of Teaching. Yale University Press, 2001.
- Liebeck, Pamela: How Children Learn Mathematics, Aguide or Parents and Teachers.
- Liping Ma: Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States, Anniversary Edition
- Mangal, S.K.: Teaching of Mathematics. Ludhiana: Tandon Publications, 2003.
- Rampal, A., Ramanujam, R. & Saraswati, L. S. (1998). Numeracy counts! Mussoorie: National Literacy Resource Centre.
- SCERT, New Delhi: Teachers Manual and Other study Material related to Mathematics, Year 2006 -13
- Source Book for assessment in mathematics (Class I-V), NCERT, New Delhi
- TESS-India Open Educational Resources https://www.open.edu/openlearncreate/course/view.php?id=1934#

राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् (एस.सी.ई.आर.टी.),
महेन्द्रू, पटना, बिहार - 800006