1. Dados $x = (2, 1, 0)$, $y = (3, 1, 2)$ y $z = (0, -1, 2)$. Verificar que $B = \{x, y, z\}$ es una base para el espacio $\mathbb{R}^3$ y expresar el vector $u = (8, 0, 10)$ como una combinación lineal de x, y y z. Finalmente, calcule $[u]_B$.

Solución. Para que los vectores x, y y z formen una base para el espacio $\mathbb{R}^3$ se debe verificar que son linealmente independientes, para esto, tomemos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

debemos concluir que $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$. Así, tenemos que

$$\alpha(2, 1, 0) + \beta(3, 1, 2) + \gamma(0, -1, 2) = (0, 0, 0)$$

y se tiene que $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$, con lo cual se verifica que los tres vectores son linealmente independientes y por consiguiente una base para $\mathbb{R}^3$.

Finalmente, para expresar u como una combinación lineal de x, y y z, debemos encontrar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$u = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Entonces, tenemos que

$$(8, 0, 10) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(3, 1, 2) + \gamma(0, -1, 2),$$

de donde $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y $\gamma = 3$ y se tiene que

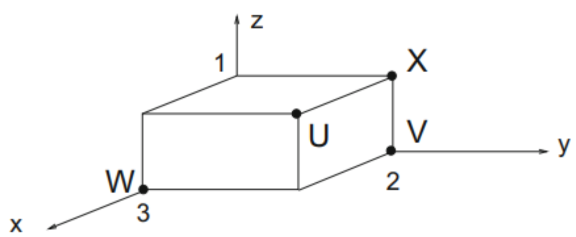
$$u = x + 2y + 3z.$$

Con esto, tenemos que

$$[u]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

□

2.* Sean u, v, w y x los puntos en la caja rectangular en $\mathbb{R}^3$ que se muestra en la figura:



Encuentre las siguientes:

a) $\|v - u\|$,

b) La distancia entre u y el origen,

c) La distancia entre u y $v + w$,

d) $\|w - x\|$.

Solución. Tenemos que

$$u = (3,2,1), \qquad v = (0,2,0), \qquad w = (3,0,0) \qquad \text{y} \qquad x = (0,2,1),$$

por lo tanto

a) $\|v - u\| = \|(-3,0,-1)\| = \sqrt{10}$.

b) Tenemos que la distancia entre u y el origen está dada por

$$\|u - (0,0,0)\| = \|u\| = \sqrt{14}$$

c) La distancia entre u y $v + w$ está dada por

$$\|u - (v + w)\| = \|(0,0,1)\| = 1.$$

d) $\|w - x\| = \|(3,-2,-1)\| = \sqrt{14}$.

□

3. Comprobar la desigualdad triangular de la norma para $\mathbb{R}^2$.

Solución. Sean $u, w \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u + w\|^2 &= (u_1 + w_1)^2 + (u_2 + w_2)^2 \\
&= (u_1 + w_1)^2 + (u_2 + w_2)^2 \\
&= u_1^2 + w_1^2 + 2u_1w_1 + u_2^2 + w_2^2 + 2u_2w_2 \\
&= (u_1^2 + u_2^2) + (w_1^2 + w_2^2) + 2(u_1w_1 + u_2w_2) \\
&\leq (u_1^2 + u_2^2) + (w_1^2 + w_2^2) + 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \\
&= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2} + \sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right)^2 \\
&= (\|u\| + \|w\|)^2,
\end{aligned}$$

de donde

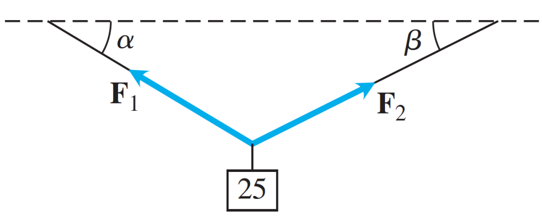
$$\|u + w\| \leq \|u\| + \|w\|.$$

□

4. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza $F = (8, -6, 9)$ que mueve un objeto del punto $(0, 10, 8)$ al punto $(6, 12, 20)$ a lo largo de una línea recta. La distancia se mide en metros y la fuerza en newtons (se sabe que el trabajo realizado es el producto punto entre la fuerza y el desplazamiento).

Solución. 144 joules. □

5. Considere un peso de 25 N suspendido de dos alambres, como se ilustra en la figura. Si las magnitudes de los vectores F_1 y F_2 son ambas de 75 N; y los ángulos α y β son iguales, obtenga α.



Solución. Finalmente, se determina que $\alpha \approx 0{,}167$ rad. $\square$

6. Comprobar que, en $\mathbb{R}^n$, el único vector ortogonal a sí mismo es el vector 0.

7. Sean $x = (a, 2, 1)$ y $y = (-2, b, 3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$ donde $a, b \in \mathbb{R}$. Si $x \perp y$, determine el valor de $a - b$.

Solución. Como $x \perp y$, se tiene que
$$x \cdot y = 0.$$
Es decir,
$$-2a + 2b + 3 = 0.$$
Así, $a - b = \dfrac{3}{2}$. $\square$

8.* En $\mathbb{R}^3$, dados los vectores $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$, hallar el conjunto de todos los vectores ortogonales a estos dos.

Solución. Tomemos (α, β, γ) un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea ortogonal a ambos vectores, es decir
$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (1,1,0) = 0$$
$$(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (0,1,1) = 0$$
se tiene que
$$\alpha + \beta = 0$$
$$\beta + \gamma = 0.$$
Resolviendo el sistema, tenemos que
$$\alpha = s$$
$$\beta = -s$$
$$\gamma = s,$$
para cualquier $s \in \mathbb{R}$, así, el conjunto de vectores ortogonales a los vectores dados es
$$\{s(1,-1,1) : s \in \mathbb{R}\}.$$
Alternativamente se puede utilizar el producto cruz $(1,1,0) \times (0,1,1)$. $\square$

9. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, comprobar que si x es ortogonal a y, entonces $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ¿El recíproco es verdadero?

Solución. Notemos que
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2,$$
como x y y son ortogonales, $x \cdot y = 0$, de donde
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$
El recíproco es verdadero. Si
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$
se tiene que
$$2x \cdot y = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0.$$
Así, x es ortogonal a y. $\square$

10. Dados $x, y \in \mathbb{R}^3$, comprobar que x es ortogonal a $x \times y$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} x \cdot (x \times y) &= (x_1, x_2, x_3) \cdot (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 - x_2x_1y_3 + x_2x_3y_1 + x_3x_1y_2 - x_3x_2y_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto x es ortogonal a $x \times y$. □

11.* Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$, comprobar $\operatorname{proy}_y(x)$ y $\operatorname{norm}_y(x)$ son vectores ortogonales.

Solución. Tomemos $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{proy}_y(x) \cdot \operatorname{norm}_y(x) &= \left(\frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\, y \right) \cdot \left(x - \operatorname{proy}_y(x) \right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \left(y \cdot (x - \operatorname{proy}_y(x)) \right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \left(y \cdot x - y \cdot \left(\frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\, y \right) \right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \left(y \cdot x - \frac{x \cdot y}{\|y\|^2}\, y \cdot y \right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \left(y \cdot x - \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \|y\|^2 \right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} \left(y \cdot x - x \cdot y \right) \\ &= \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} (0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, son ortogonales. □

12.* En $\mathbb{R}^3$, ¿cuál debe ser el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la proyección del vector $(1, 3, \alpha)$ sobre el vector $(1, 1, 1)$ sea $(2, 2, 2)$?

Deduzca una expresión para determinar la norma de $\operatorname{proy}_y x$, con $x, y \in \mathbb{R}^n$ distintos de 0. Verifique con este ejemplo.

Solución. Deseamos que

$$\operatorname{proy}_{(1,1,1)}(1, 3, \alpha) = (2, 2, 2),$$

es decir,

$$\begin{aligned} (2, 2, 2) &= \frac{(1, 3, \alpha) \cdot (1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|^2} (1, 1, 1) \\ &= \frac{1 + 3 + \alpha}{3} (1, 1, 1) \\ &= \left(\frac{4 + \alpha}{3}, \frac{4 + \alpha}{3}, \frac{4 + \alpha}{3} \right). \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{4 + \alpha}{3} = 2,$$

y por lo tanto $\alpha = 2$. Así, si $\alpha = 2$, se tiene que la proyección de $(1, 3, \alpha)$ sobre $(1, 1, 1)$ es $(2, 2, 2)$. □

13.* Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ no nulos tales que x es ortogonal a y. Si $z = \alpha x + \beta y$, hallar expresiones para α y β en términos de los vectores x, y y z.

Solución. Tenemos que

$$z = \alpha x + \beta y.$$

Multiplicando por x, tenemos

$$\begin{aligned} z \cdot x &= (\alpha x + \beta y) \cdot x \\ &= \alpha x \cdot x + \beta y \cdot x \\ &= \alpha x \cdot x. \end{aligned}$$

dado que $x \neq 0$, $x \cdot x \neq 0$, así

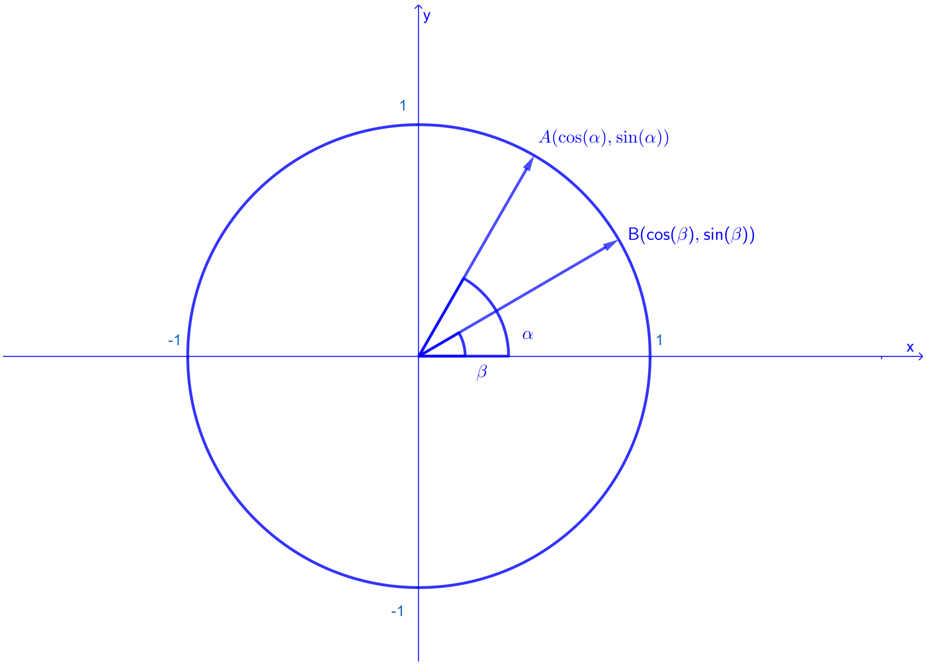
$$\alpha = \frac{z \cdot x}{x \cdot x}.$$

De igual forma

$$\beta = \frac{z \cdot y}{y \cdot y}.$$

□

14. Suponga que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sean $A = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$ y $B = (\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ y refiérase a la figura siguiente



Demuestre que:

a) $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$, utilizando el producto punto de A y B.

b) $|\operatorname{sen}(\alpha - \beta)| = |\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)|$, utilizando el producto cruz.

Solución. Notemos que $\|A\| = \|B\| = 1$.

a) Calculemos el producto interno entre A y B,

$$A \cdot B = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)) \cdot (\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta)) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).$$

Por otro lado, tenemos que

$$A \cdot B = \|A\|\|B\| \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta),$$

con lo que se verifica que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta).$$

b) Si definimos $A' = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha), 0)$ y $B' = (\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta), 0)$, entonces $\|A'\| = \|B'\| = 1$. Calculemos ahora, el producto cruz entre A' y B',

$$A' \times B' = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha), 0) \times (\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta), 0) = (0, 0, \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)).$$

Además, tenemos que

$$\|A' \times B'\| = \|A'\|\|B'\||\operatorname{sen}(\alpha - \beta)| = |\operatorname{sen}(\alpha - \beta)|.$$

Luego, se tiene que

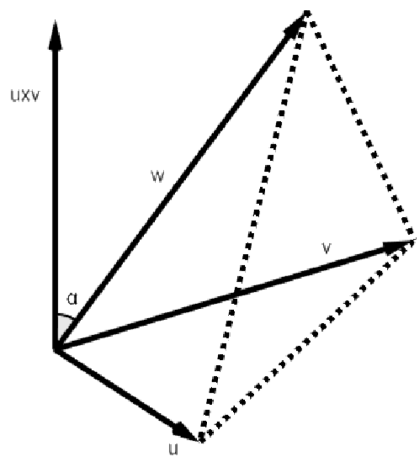
$$|\operatorname{sen}(\alpha - \beta)| = |\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)|.$$

□

15.* Sea α el ángulo entre w y $u \times v$. Determinar el volumen del tetraedro generado por los vectores

$$u = (1, 1, -1), \quad v = (1, 3, 1) \quad \text{y} \quad w = (1, 2, 3).$$

Solución. Refiérase a la figura siguiente



Consideremos como la base del tetraedo al triángulo formado los vectores u y v, y sea h la altura del tetraedo, entonces $h = \|w\|\cos(\alpha)$.

Entonces, sí S es el área del triángulo, el volumen V del tetraedro es:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Sh \\ &= \frac{1}{3}\frac{\|u \times v\|}{2}\|w\|\cos(\alpha). \end{aligned}$$

Nótese que α es el ángulo entre los vectores w y $u \times v$, entonces

$$|\cos(\alpha)| = \frac{|(u \times v) \cdot w|}{\|u \times v\|\|w\|}.$$

Luego, el volumen es igual a

$$V = \frac{1}{6}|(u \times v) \cdot w| = 1.$$

Por tanto, el volumen es igual a 1 unidad cúbica. □

16.* Dadas dos rectas en R^3, estas pueden

- Cortarse en infinitos puntos, es decir que las dos rectas son iguales.
- No cortarse, sin que esto quiera decir que son paralelas.
- Cortarse en un punto, es decir existe un plano que contiene a las dos rectas.

Dadas $L_1((1,2,3);(1,1,1))$, $L_2((4,5,6);(3,3,3))$, $L_3((1,2,4);(2,1,2))$ y $L_4((5,6,7);(3,2,4))$ verificar que

a) L_1 y L_2 se cortan en infinitos puntos.

b) L_1 y L_3 no se cortan.

c) L_1 y L_4 se cortan en un punto.

17. Una recta pasa por el punto $p = (10,2,4)$ y tiene dirección $a = (3,0,1)$. Otra recta pasa por el punto $q = (2,0,-2)$ y es paralela al vector $b = (-1,2,3)$. Determine si las rectas se intersecan; en caso afirmativo, encuentre la intersección.

18.* La entrada de un hormiguero se encuentra en el punto $(20,20,20)$, una hormiga sale del mismo a explorar siguiendo la dirección $(-1,-2,-3)$, avanzado $t(-1,-2,-3)$ cada t segundos. Considere que la distancia se encuentra medida en centímetros y el tiempo en segundos.

a) Determine el instante cuando la hormiga pasa por el punto $(17,14,11)$.

b) ¿En qué instante la hormiga pasará por el punto $(1,1,1)$?

c) ¿Cuál es la distancia recorrida por la hormiga luego de cinco segundos?

Solución. La hormiga sigue un camino en línea recta, este camino puede ser representado por la recta

$$L = \{(20,20,20) + t(-1,-2,-3) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Si en un instante t la hormiga pasa por un punto (x,y,z), es decir $(x,y,z) \in L$, entonces:

$$\begin{cases} x &= 20 - t, \\ y &= 20 - 2t, \\ z &= 20 - 3t, \end{cases}$$

donde t representa al tiempo.

a) Si $(x,y,z) = (17,14,11)$ tenemos que

$$\begin{cases} 17 &= 20 - t, \\ 14 &= 20 - 2t, \\ 11 &= 20 - 3t. \end{cases}$$

Lo que implica que $t = 3$. Por lo cual, la hormiga pasa por el punto $(17,14,11)$ luego de 3 segundos.

b) Supongamos que la hormiga pasa por el punto $(1,1,1)$, entonces buscamos el valor de t tal que $(1,1,1) \in L$. Si así fuera, se verificaría que

$$\begin{cases} 1 &= 20 - t, \\ 1 &= 20 - 2t, \\ 1 &= 20 - 3t. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema nos encontramos que no existe un t tal que lo verifique. Luego, no existe un instante tal que la hormiga pase por el punto $(1,1,1)$.

c) Después de cinco segundos la hormiga se encuentra en el punto $(15,10,5)$, entonces el desplazamiento realizado por la hormiga es

$$d = (15,10,5) - (20,20,20) = (-5,-10-15).$$

Cuya longitud es

$$\|d\| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2 + (-15)^2} = 5\sqrt{14}.$$

Por lo tanto, luego de 5 segundos la hormiga ha recorrido $5\sqrt{14}$ centímetros. $\square$

19.* Encuentre la distancia del punto $P = (1, 3, 4)$ a la recta $L(a; b)$, donde $a = (2, 1, 5)$ y $b = (-3, 5, 1)$.

Solución. La distancia entre un punto P y una recta viene dada por

$$\frac{\|PQ \times D\|}{\|D\|}$$

donde Q es cualquier punto de la recta y D la dirección de la recta.

Nótese que $Q = (2, 1, 5)$ es un punto de la recta entonces

$$\begin{aligned}
&PQ = (2,1,5) - (1,3,4) = (1,-2,1),\\
&D = (-3,5,1),\\
&\|PQ \times D\| = \sqrt{66},\\
&\|D\| = \sqrt{35}.
\end{aligned}$$

Así, la distancia del punto P a la recta L es

$$\operatorname{dist}(L, P) = \sqrt{\frac{66}{35}}. \qquad \square$$

20.* Encuentre la distancia entre las rectas cuyas ecuaciones paramétricas son

$$L_1 : \begin{cases} x = -3 + t, \\ y = 7 + 3t, \\ z = 5 + 2t; \end{cases} \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 4 + 5t, \\ y = 8 - 2t, \\ z = 10 - 4t. \end{cases}$$

Solución. La distancia entre dos rectas viene dada por

$$\| \operatorname{proy}_n(PQ) \| = \frac{|PQ \cdot n|}{||n||}$$

donde P y Q son puntos que pertenecen a cada una de las rectas respectivamente y n un vector normal a las dos rectas.

De las ecuaciones paramétricas nótese que $P = (-3, 7, 5) \in L_1$ y $Q = (4, 8, 10) \in L_2$, además que la dirección de L_1 es $(1, 3, 2)$ y la de L_2 es $(5, -2, -4)$. Un vector normal a ambas rectas se obtiene de

$$n = (1,3,2) \times (5,-2,-4) = (-8,14,-17)$$

entonces

$$\begin{aligned}
&PQ = (4,8,10) - (-3,7,5) = (7,1,5),\\
&|PQ \cdot n| = 127,\\
&\|n\| = 3\sqrt{61}.
\end{aligned}$$

Así, la distancia entre las dos rectas es

$$\operatorname{dist}(L_1, L_2) = \| \operatorname{proy}_n(PQ) \| = \frac{|PQ \cdot n|}{\|n\|} = \frac{127}{3\sqrt{61}}. \qquad \square$$

Los ejercicios para la clase CP son: 2, 8, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20.