1.* Calcule el límite de la trayectoria α en 5, donde

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ y &\longmapsto \left(y^3+5, y^2, \frac{y+1}{y}\right).\end{aligned}$$

Solución. Primero, definamos las funciones componentes de α, tenemos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\alpha_1(y) = y^3+5, \qquad \alpha_2(y) = y^2 \qquad \text{y} \qquad \alpha_3(y) = \frac{y+1}{y}.$$

para $x \in \mathbb{R}$, así, se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)).$$

Luego, gracias a que

$$\lim_{y\to 5} \alpha_1(x) = 130, \qquad \lim_{y\to 5} \alpha_2(x) = 25 \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to 5} \alpha_3(x) = \frac{6}{5},$$

se sigue que $\lim_{y\to 5} \alpha(x)$ existe y

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 5} \alpha(x) &= \left(\lim_{y\to 5} \alpha_1(x), \lim_{y\to 5} \alpha_2(x), \lim_{y\to 5} \alpha_3(x)\right) \\ &= \left(130, 25, \frac{6}{5}\right).\end{aligned}$$

□

2.* Dada la trayectoria

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \begin{cases} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(t)}{t}, 2t^2, \dfrac{e^t-1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0, \\ x & \text{si } t = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^3$. ¿Cuál es el vector x para que α sea continua en 0?

Solución. Para que la trayectoria sea continua en este punto se debe cumplir que

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = \alpha(0) = x.$$

Por lo tanto, procedemos a calcular el límite:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \alpha(t) &= \left(\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}, \lim_{t\to 0} 2t^2, \lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t}\right) \\ &= (1,0,1).\end{aligned}$$

Entonces la tratectoria α es continua en 0 si y solo si $x = (1,0,1)$. □

3.* Dada la función

$$\begin{aligned}\alpha : [-1,1] \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \left(\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{t}, e^{3t} - t^2\right).\end{aligned}$$

Estudie la continuidad de la función α en 0, ¿existe $\lim_{t\to 0}\alpha(t)$? Si $\lim_{t\to 0}\alpha(t)$ existe, halle su valor.

Solución. Dado que $0 \notin \operatorname{dom}(\alpha)$, se tiene que $\alpha(0)$ no existe, luego α no es continua en 0. Por otra parte, para que

$$\lim_{t\to 0}\alpha(t)$$

exista, deben existir

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{t} \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0} e^{3t}-t^2.$$

Ahora bien, como $\lim_{t\to 0}\operatorname{sen}(\pi t)=0$ y $\lim_{t\to 0} t = 0$, por la regla de L'Hopital, se tiene que

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\pi\cos(\pi t)}{1} = \pi\cos(0) = \pi.$$

Por otra parte, como

$$t \mapsto e^{3t}-t^2$$

es continua en 0, se tiene que

$$\lim_{t\to 0} e^{3t}-t^2 = e^0 - 0^2 = 1.$$

Por lo tanto, $\lim_{t\to 0}\alpha(t)$ existe y

$$\lim_{t\to 0}\alpha(t) = (\pi, 1). \qquad \square$$

4.* Dada la trayectoria

$$\begin{aligned}\alpha:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ x &\longmapsto (x+2, x^2, x^4+x^2),\end{aligned}$$

calcule la derivada de α y evalúela en $x = 10$.

Solución. Primero, definamos las funciones componentes de α, tenemos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$\alpha_1(x) = x+2, \qquad \alpha_2(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad \alpha_3(x) = x^4+x^2.$$

para $x\in\mathbb{R}$, así, se tiene que para todo $x\in\mathbb{R}$

$$\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)).$$

Luego, gracias a que α_1, α_2 y α_3 son derivables en $\mathbb{R}$ (puesto que son funciones polinomiales), se sigue que α es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= (\alpha_1'(x), \alpha_2'(x), \alpha_3'(x))\\ &= (1, 2x, 4x^3+2x)\end{aligned}$$

para todo $x\in\mathbb{R}$. Finalmente, evaluando en $x = 10$ tenemos que

$$\alpha'(10) = (1, 20, 4020). \qquad \square$$

5.* Dada la trayectoria

$$\begin{aligned}\alpha:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ x &\longmapsto \left(\frac{x^2}{x^2+1}, x|x|\right).\end{aligned}$$

Demuestre que α es derivable en todo su dominio y halle su derivada.

Solución. Vamos a probar que cada componente es derivable. Tenemos que sus componentes son

$$\begin{aligned}\alpha_1:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{x^2}{x^2+1}\end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned}\alpha_2:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x|x|.\end{aligned}$$

La función α_1 es derivable en todo $\mathbb{R}$ pues es el cociente de dos polinomios y su denominador nunca se anula. Además,

$$\begin{aligned}\alpha_1'(x) &= \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' \\ &= \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$. Por otra parte, por la definición del valor absoluto,

$$\alpha_2(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Es claro que α_2 es derivable para todo $x \neq 0$ y se tiene que

$$\alpha_2'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ahora analicemos la derivada de α_2 en 0. Para todo $h \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_2(h)-\alpha_2(0)}{h} &= \frac{h|h|}{h} \\ &= |h|.\end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha_2(h)-\alpha_2(0)}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0$$

pues el valor absoluto es una función continua, y se sigue que

$$\alpha_2'(0) = 0.$$

Entonces,

$$\alpha_2'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

de donde $\alpha_2'(x) = 2|x|$. Por lo tanto, α es derivable en todo su dominio y

$$\alpha'(x) = \left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}, 2|x|\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. □

6.* Dada la trayectoria

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = \frac{2t}{1+t^2}\,\mathbf{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k},\end{aligned}$$

comprobar que el ángulo que forma $\alpha(t)$ con $\alpha'(t)$ es constante para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución. Notemos que

$$\alpha(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, 1\right)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, además, podemos apreciar que cada función componente es derivable, por lo tanto

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{2\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}, -\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}, 0\right)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Ahora, para calcular el ángulo entre los dos vectores, tenemos que, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$\alpha(t) \cdot \alpha'(t) = 0,$$

además,

$$\alpha(t) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \alpha'(t) \neq 0,$$

por lo tanto, podemos calcular el ángulo formado por los vectores y este es

$$\arccos\left(\frac{\alpha(t) \cdot \alpha'(t)}{\|\alpha(t)\|\|\alpha'(t)\|}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. □

7. Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^m$, con $m > 1$, una trayectoria derivable en el intervalo I. Si existe una constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|\alpha(t)\| = k$ para todo $t \in I$, demostrar que $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son ortogonales para todo $t \in I$.

8. Dada una trayectoria $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, que tiene tres derivadas, se define la función

$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto u(t) = \alpha(t) \cdot (\alpha'(t) \times \alpha''(t)). \end{aligned}$$

Comprobar que u es derivable y que

$$u' = \alpha \cdot (\alpha' \times \alpha''').$$

Solución. Dado que f tiene tres derivadas, entonces f' y f'' son derivables, por lo tanto, $f' \times f''$ es derivable y por lo tanto $f \cdot (f' \times f'')$ es derivable, es decir, u es derivable. Además, se tiene que:

$$\begin{aligned} u' &= (\alpha \cdot (\alpha' \times \alpha''))' \\ &= \alpha' \cdot (\alpha' \times \alpha'') + \alpha \cdot (\alpha' \times \alpha'')' \\ &= 0 + \alpha \cdot (\alpha'' \times \alpha'' + \alpha' \times \alpha''') \\ &= \alpha \cdot (0 + \alpha' \times \alpha''') \\ &= \alpha \cdot (\alpha' \times \alpha'''). \end{aligned}$$

□

9. Dada una trayectoria $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, se define

$$\begin{aligned} \beta\colon I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) \times \alpha'(t). \end{aligned}$$

Comprobar que β es derivable y hallar su derivada.

Solución. Se tiene que α y α' son derivables, por lo tanto, β es derivable. Además, se tiene que

$$\beta'(t) = (\alpha(t) \times \alpha'(t))' = \alpha'(t) \times \alpha'(t) + \alpha(t) \times \alpha''(t) = \alpha(t) \times \alpha''(t),$$

pues $\alpha'(t) \times \alpha'(t) = 0$. □

10. Sean $\alpha, \beta, \gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ trayectorias derivables. Comprobar que $\alpha \cdot (\beta \times \gamma)$ es derivable y que

$$(\alpha \cdot (\beta \times \gamma))' = \alpha \cdot (\beta \times \gamma') + \alpha \cdot (\beta' \times \gamma) + \alpha' \cdot (\beta \times \gamma).$$

Solución. Dado que β y γ son derivables, $\beta \times \gamma$ también lo es. Además, dado que α es derivable, se tiene que $\alpha \cdot (\beta \times \gamma)$ es derivable y se tiene:

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot (\beta \times \gamma))' &= \alpha' \cdot (\beta \times \gamma) + \alpha \cdot (\beta \times \gamma)' \\ &= \alpha' \cdot (\beta \times \gamma) + \alpha \cdot (\beta' \times \gamma + \beta \times \gamma') \\ &= \alpha \cdot (\beta \times \gamma') + \alpha \cdot (\beta' \times \gamma) + \alpha' \cdot (\beta \times \gamma). \end{aligned}$$

□

11.* Dada la función

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\cos(t), 1, -2t). \end{aligned}$$

Si existe, calcule la integral.

$$\int_0^{\pi} \alpha(t)dt$$

Solución. Para que α, sus componentes α_1, α_2 y $\alpha_3(t)$ deben ser integrables. Como son funciones continuas, son integrables. Dado que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \alpha_1(t)dt &= \int_0^{\pi} \cos(t)dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \alpha_2(t)dt &= \int_0^{\pi} dt \\ &= \pi - 0 \\ &= \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \alpha_3(t)dt &= \int_0^{\pi} 2tdt \\ &= \pi^2 - 0^2 \\ &= \pi^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int_0^{\pi} \alpha(t)dt$ existe y

$$\int_0^{\pi} \alpha(t)dt = \left(0, \pi, \pi^2\right).$$

□

12.* Dada la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (t - \cos(t), 1 - \cos(t), t) \end{aligned}$$

y la función

$$\begin{aligned} u : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto u(z) = \operatorname{arc\,sen}(z). \end{aligned}$$

Utilizando la regla de la cadena para funciones vectoriales determine $(\alpha \circ u)'(z)$ para cada $z \in]-1, 1[$.

Solución. Notemos que u es derivable en $(-1, 1)$ con derivada

$$u'(z) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$$

para cada $z \in]-1, 1[$, además, $\operatorname{img}(u) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Por otro lado, las funciones $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son derivables y

$$\alpha_1'(t) = 1 + \operatorname{sen}(t), \qquad \alpha_2'(t) = \operatorname{sen}(t) \qquad \text{y} \qquad \alpha_3'(t) = 1$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, luego, α es derivable y

$$\alpha'(t) = (1 + \operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t), 1)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, en particular, α es derivable en $u(z)$ para cada $z \in]-1, 1[$.

Gracias a lo anterior, aplicando la regla de la cadena para funciones vectoriales se tiene que para cada $z \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}(\alpha \circ u)'(z) &= u'(z)\alpha'(u(z)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,(1+\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(z)), \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(z)), 1) \\ &= \left(\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de $\alpha \circ u$ está dada por

$$(\alpha \circ u)'(z)\left(\frac{1+z}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\right)$$

para cada $z \in]-1,1[$. □

13. Dada la trayectoria

$$\begin{aligned}\alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \alpha(x) = e^{2x}a + e^{-2x}b\end{aligned}$$

con $a, b \in \mathbb{R}^n$ fijos no nulos. Comprobar que $\alpha''(x)$ tiene la misma dirección que $\alpha(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Se tiene que dos vectores tiene la misma dirección si uno es múltiplo del otro, por lo tanto, para comprobar que $\alpha''(x)$ tiene la misma dirección que $\alpha(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, procedemos a derivar α dos veces, así

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= 2e^{2x}a - 2e^{-2x}b, \\ \alpha''(x) &= 4e^{2x}a + 4e^{-2x}b,\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado que

$$\alpha''(x) = 4\alpha(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\alpha(x)$ y $\alpha''(x)$ tienen la misma dirección. □

14.* Encontrar una función $\alpha : \,]0,\infty[\to \mathbb{R}^n$ continua, tal que

$$\alpha(x) = xe^x A + \frac{1}{x}\int_1^x \alpha(t)dt$$

para todo $x > 0$, con $A \in \mathbb{R}^n$.

Solución. Es equivalente escribir

$$x\alpha(x) - x^2e^x A = \int_1^x \alpha(t)dt \tag{1}$$

para todo $x > 0$, con $A \in \mathbb{R}^n$. Por el primer teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\alpha(x) + x\alpha'(x) - x^2e^x A - 2xe^x A = \alpha(x)$$

para todo $x > 0$, simplificando la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= xe^x A + 2e^x A \\ &= (xe^x + e^x)A + e^x A \\ &= (xe^x)'A + e^x A\end{aligned}$$

para $x > 0$. De donde

$$\alpha(x) = xe^x A + e^x A + k$$

para $x > 0$ y $k \in \mathbb{R}^n$.

Reemplazando $\alpha(x)$ en (1) y por el segundo teorema fundamental del cálculo, se tiene

$$\begin{aligned} x^2e^xA + xe^xA + kx - x^2e^xA &= \int_1^x \left(te^tA + e^tA + k\right) dt \\ xe^xA + kx &= \left(te^tA + kt\right)\Big|_1^x \\ xe^xA + kx &= xe^xA + kx - eA - k \end{aligned}$$

de aquí $k = -eA$. Finalmente se tiene que

$$\alpha(x) = xe^xA + e^xA - eA$$

para todo $x > 0$ y $A \in \mathbb{R}^n$. □

Ejercicios clase CP: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 12, 14.