1.* Determine el vector tangente y las ecuaciones de la recta tangente a la curva C descrita por la trayectoria α, en el punto $(1, -1, 1)$, donde

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (e^t(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)), e^t(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)), e^t). \end{aligned}$$

Solución. Para determinar el vector tangente es necesario conocer el valor de t tal que $\alpha(t) = (1, -1, 1)$, así, se tiene las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= e^t(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)), \\ -1 &= e^t(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)), \\ 1 &= e^t. \end{aligned}$$

De la última ecuación se tiene que $t = 0$ y se tiene consistencia con las otras ecuaciones, por lo tanto

$$\alpha(0) = (1, -1, 1).$$

Ahora, gracias a que las componentes la función α son derivables en $\mathbb{R}$, α es derivable en $\mathbb{R}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= ((e^t(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)))', (e^t(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)))', (e^t)') \\ &= (2e^t \cos(t), 2e^t \operatorname{sen}(t), e^t). \end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$, se obtiene que el vector tangente a C en el punto dado es $\alpha'(0) = (2, 0, 1)$.

Finalmente, la recta tangente es

$$L((1, -1, 1); (2, 0, 1)) = \{(1, -1, 1) + t(2, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$ □

2.* Sean

$$I = [0, 4\pi] \qquad \text{y} \qquad J = \left[-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Se definen las trayectorias α y β por

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t), t) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \beta : J &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \beta(t) = \left(\cos(t), \operatorname{sen}(t), \frac{\pi}{2} - t\right). \end{aligned}$$

Muestre que α y β son dos trayectorias equivalentes.

Solución. Definamos la función u por

$$\begin{aligned} u : I &\longrightarrow J \\ t &\longmapsto u(t) = \frac{\pi}{2} - t \end{aligned}$$

nótese que $\operatorname{img}(u) = J$, es decir, u es sobreyectiva, además, u es derivable y su derivada es no nula para todo $t \in I$. Luego, para cada $t \in I$,

$$\beta(u(t)) = (\cos(u(t)), \operatorname{sen}(u(t)), u(t))$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-t\right), \frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right) \\
&= (\operatorname{sen}(t), \cos(t), t) = \alpha(t).
\end{aligned}
$$

Así, se tiene que ambas trayectorias son equivalentes. □

3.* Sea $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria con derivada continua. Considere la función

$$
\begin{aligned}
\phi\colon [a,b] &\longrightarrow J \\
t &\longmapsto \int_a^t \|\alpha_1'(\tau)\| d\tau
\end{aligned}
$$

biyectiva. Sea la trayectoria $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\alpha = \beta \circ \phi.$$

Demuestre que

$$\|\beta'(s)\| = 1$$

para todo $s \in J$. Utilizando el resultado anterior, encuentre una parametrización equivalente β de

$$
\begin{aligned}
\alpha\colon [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
t &\longmapsto (c_1\cos(t), c_1\operatorname{sen}(t), c_2 t)
\end{aligned}
$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, tal que $\|\beta'\| = 1$.

4.* Dada la trayectoria

$$
\begin{aligned}
\alpha\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
t &\longmapsto 3t\cos(t)\,\mathbf{i} + 3t\operatorname{sen}(t)\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k},
\end{aligned}
$$

la cual representa el vector posición de un movimiento, determinar los vectores velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$ y la rapidez $\rho(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Solución. El correspondiente vector velocidad está dado por la derivada de la función posición

$$v(t) = \alpha'(t) = (3\cos(t) - 3t\operatorname{sen}(t))\,\mathbf{i} + (3\operatorname{sen}(t) + 3t\cos(t))\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k},$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Así, la rapidez para cada $t \in \mathbb{R}$ es

$$
\begin{aligned}
\rho(t) &= \|v(t)\| \\
&= \sqrt{(3\cos(t) - 3t\operatorname{sen}(t))^2 + (3\operatorname{sen}(t) + 3t\cos(t))^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{9 + 9t^2 + 16} \\
&= \sqrt{25 + 9t^2}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, el vector aceleración es la derivada del vector velocidad, así

$$a(t) = \alpha''(t) = (-6\operatorname{sen}(t) - 3t\cos(t))\,\mathbf{i} + (6\cos(t) - 3t\operatorname{sen}(t))\,\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. □

5. En cada uno de los literales siguientes, $\alpha(t)$ representa el vector posición en el instante t correspondiente a una partícula que se mueve sobre una curva C. En cada caso, determinar los vectores velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

a)

$$
\begin{aligned}
\alpha\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
t &\longmapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(t), e^t).
\end{aligned}
$$

b)
$$\begin{aligned}\alpha\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ t &\longmapsto t\mathbf{i} + \operatorname{sen}(t)\mathbf{j} + (1-\cos(t))\mathbf{k}.\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\alpha\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ t &\longmapsto (t-\operatorname{sen}(t))\mathbf{i} + (1-\cos(t))\mathbf{j} + 4\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Solución.

a) Tenemos que
$$v(t) = \alpha'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), e^t) \qquad \text{y} \qquad a(t) = \alpha''(t) = (-\cos(t), -\operatorname{sen}(t), e^t).$$

b) Tenemos que
$$v(t) = \alpha'(t) = \mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + \operatorname{sen}(t)\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad a(t) = \alpha''(t) = -\operatorname{sen}(t)\mathbf{j} + \cos(t)\mathbf{k}.$$

c) Tenemos que
$$v(t) = \alpha'(t) = (1-\cos(t))\mathbf{i} + \operatorname{sen}(t)\mathbf{j} + 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{k}$$
y
$$a(t) = \alpha''(t) = \operatorname{sen}(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} - \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{k}.$$ □

6.* En una ciudad existen dos carreteras descritas por las trayectorias[1]
$$\begin{aligned}\alpha\colon \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ x &\longmapsto (x-9, x^3-22x^2+154x-333)\end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned}\beta\colon \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ y &\longmapsto (2y-19, 27-2y).\end{aligned}$$

a) Determine las intersecciones de las carreteras.

b) Suponga $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ representa la posición de dos autos en el instante $t \geq 0$. Determine si los autos se chocan.

Solución.

a) Las carreteras se cortan en (-4,12), (-2,10) y (1,7).

b) Los autos se chocan a los 10 segundos en el punto (1,7).

□

7.* Considere las trayectorias
$$\begin{aligned}\alpha\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ t &\longmapsto (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)\end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned}\beta\colon [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ t &\longmapsto (1,0,t).\end{aligned}$$

Estas trayectorias representan los vectores posición en un instante t de dos partículas que se mueven sobre dos curvas descritas por α y β respectivamente. ¿En qué puntos, si los hay, estas partículas se encuentran?

Solución. Buscamos los elementos $t \in [0,+\infty[$ tal que
$$\alpha(t) = \beta(t),$$

[1] Por notación $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$.

es decir,

$$(\cos(t), \operatorname{sen}(t), t) = (1, 0, t).$$

Así, se tienen las ecuaciones

$$\cos(t) = 1, \qquad \operatorname{sen}(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad t = t.$$

Por lo tanto, se tiene que las partículas se encuentran cuando

$$t \in \{2k\pi : k \in \mathbb{N}\},$$

y lo hacen en los puntos

$$\{(1, 0, 2k\pi) : k \in \mathbb{N}\}.$$

□

8. Suponga que no conocemos la trayectoria de un planeador, solo su vector aceleración, que está dado por $a(t) = (-3\cos(t), -3\operatorname{sen}(t), 2)$, para $t \in [0, +\infty[$. También sabemos que inicialmente (en el instante $t = 0$), el planeador partió del punto $(3, 0, 0)$ con una velocidad inicial $v(0) = (0, 3, 0)$. Obtenga la posición del planeador como una función de t.

Solución. Sea $r\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}^3$ la posición de la partícula. Conocemos que la velocidad v es la derivada de la posición r y la aceleración a, la derivada de v. Entonces, teniendo la función aceleración, la integramos dos veces para obtener la posición, entonces

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \frac{d}{dt}\frac{dr}{dt}(t) = (-3\cos t, -3\operatorname{sen} t, 2)$$

para $t \in [0, +\infty[$, con condiciones iniciales:

$$v(0) = (0, 3, 0) \qquad \text{y} \qquad r(0) = (3, 0, 0)\,.$$

Al integrar ambos lados de esta expresión tenemos

$$v(t) = (-3\operatorname{sen} t + C_1, 3\cos t + C_2, 2t + C_3)\,,$$

utilizando la condición inicial $v(0) = (0, 3, 0)$ se determina que $C_1 = 0$, $C_3 = 0$ y $C_3 = 0$.

Luego, la velocidad del planeador es

$$v(t) = (-3\operatorname{sen}(t), 3\cos(t), 2t)$$

para todo $t \in [0, +\infty[$. Al integrar la velocidad v se obtiene la posición del planeador

$$r(t) = \left(3\cos(t) + C_4, 3\operatorname{sen}(t) + C_5, t^2 + C_6\right)\,,$$

utilizando la condición inicial $r(0) = (3, 0, 0)$ de donde, $C_4 = 0$, $C_5 = 0$ y $C_6 = 0$.

Por lo tanto la posición del planeador es

$$r(t) = \left(3\cos(t), 3\operatorname{sen}(t), t^2\right)$$

para todo $t \in [0, +\infty[$.

□

Ejercicios clase CP: 1, 2, 3, 4, 6, 7.