1.* Un cohete descompuesto se mueve de acuerdo con la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha :]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \left(e^{2t}, 3t^3 - 2t, t - \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

con la esperanza de llegar a una estación de reparación ubicada en el punto $(7e^4, 35, 5)$. El tiempo se mide en minutos y las coordenadas espaciales se miden en millas. Los motores del cohete se apagan de súbito a los dos minutos, si sobre el cohete no actúa ninguna fuerza externa, ¿llegará el cohete con su solo impulso a la estación de reparación?

Solución. Notemos que α es derivable con derivada

$$\alpha'(t) = \left(2e^{2t}, 9t^2 - 2, 1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

para cada $t \in]0, \infty[$. Entonces, a los dos minutos, el cohete se encuentra en la posición $\alpha(2) = \left(e^4, 20, \frac{3}{2}\right)$ con velocidad $\alpha'(2) = \left(2e^4, 34, \frac{5}{4}\right)$.

Ya que el cohete deja de funcionar a los dos minutos, este deberá continuar por la trayectoria de la recta tangente a α en 2, es decir, la recta

$$\begin{aligned} L(\alpha(2), \alpha'(2)) &= \left\{ \left(e^4, 20, \frac{3}{2}\right) + (t-2)\left(2e^4, 34, \frac{5}{4}\right) \,:\, t \geq 2 \right\} \\ &= \left\{ \left((2t-3)e^4, 34t - 48, \frac{5}{4}t - 1\right) \,:\, t \geq 2 \right\} \end{aligned}$$

Si el cohete logra alcanzar la estación de reparación debe tenerse que $(7e^4, 35, 5) \in L(\alpha(2), \alpha'(2))$, es decir, se tiene

$$(7e^4, 35, 5) = \left((2t-3)e^4, 34t - 48, \frac{5}{4}t - 1\right)$$

para algún $t \geq 2$. En particular tenemos

$$7e^4 = (2t-3)e^4$$

lo que se verifica cuando $t = 5$. Notemos ahora que si $t = 5$ el cohete se encontrará en la posición $\left(7e^4, 122, \frac{21}{4}\right) \neq (7e^4, 35, 5)$.

Por lo tanto, el cohete no logrará llegar hasta la estación de reparación. □

2.* Sea la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha : [-1, 3] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, \operatorname{sen}(\pi t)). \end{aligned}$$

Si α describe la trayectoria de una mosca, halle la recta tangente a su trayectoria en $t = 1$. Interprete este resultado. Encuentre el desplazamiento total de la mosca y la distancia recorrida.

3.* Dado un vector fijo no nulo $b \in \mathbb{R}^3$, se tiene un movimiento con vector posición definido por $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, que satisface

$$\alpha'(t) = b \times \alpha(t)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Demostrar que el vector aceleración es siempre ortogonal a b.

Solución. Calculemos el vector aceleración para $t \in \mathbb{R}$,

$$a(t) = \alpha''(t) = (b \times \alpha(t))' = 0 + b \times \alpha'(t) = b \times \alpha'(t).$$

Ahora, para comprobar que es ortogonal a b, notemos que

$$b \cdot a(t) = b \cdot (b \times \alpha'(t)) = 0$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, así, el vector aceleración es siempre ortogonal a b. □

4.* Considere una partícula cuyo movimiento circular se describe por

$$\begin{aligned} \alpha\colon I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto r(\cos(u(t)), \operatorname{sen}(u(t))) \end{aligned}$$

Donde u es una función real derivable en $I \subseteq \mathbb{R}$ y $r > 0$. Calcule $\alpha'(t)$ y α''. Luego, demuestre que si $u(t) = \omega t + b$, para $t \in I$ con ω y b constantes, los vectores aceleración y velocidad son ortogonales. Calcule la norma de la aceleración y velocidad.

5. Dada la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto b\cos(\omega t)\mathbf{i} + b\operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{j} + (c\omega t)\mathbf{k} \end{aligned}$$

donde ω es una constante positiva y $b, c \in \mathbb{R}$. Compruebe que los vectores velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$ tienen longitud constante para todo $t \in \mathbb{R}$ y que

$$\frac{\|v(t) \times a(t)\|}{\|v(t)\|^3} = \frac{|b|}{b^2 + c^2},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución. Tenemos que

$$v(t) = \alpha'(t) = -b\omega \operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{i} + b\omega\cos(\omega t)\mathbf{j} + c\omega\mathbf{k}$$

y

$$a(t) = \alpha''(t) = -b\omega^2\cos(\omega t)\mathbf{i} - b\omega^2\operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &= \sqrt{(-b\omega\operatorname{sen}(\omega t))^2 + (b\omega\cos(\omega t))^2 + (c\omega)^2} \\ &= \omega\sqrt{b^2 + c^2}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|a(t)\| &= \sqrt{(-b\omega^2\cos(\omega t))^2 + (-b\omega^2\operatorname{sen}(\omega t))^2} \\ &= b\omega^2, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, y por lo tanto son constantes.

Por otra parte, se tiene que

$$v(t) \times a(t) = bc\omega^3\operatorname{sen}(\omega t)\mathbf{i} - bc\omega^3\cos(\omega t)\mathbf{j} + b^2\omega^3\mathbf{k}$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\|v(t) \times a(t)\| &= \sqrt{(bc\omega^3 \operatorname{sen}(\omega t))^2 + (bc\omega^3 \cos(\omega t))^2 + (b^2\omega^3)^2} \\
&= b\omega^3 \sqrt{b^2 + c^2}.
\end{aligned}
$$

Así, tenemos que

$$
\frac{\|v(t) \times a(t)\|}{\|v(t)\|^3} = \frac{b\omega^3 \sqrt{b^2 + c^2}}{\omega^3 (\sqrt{b^2 + c^2})^3} = \frac{b}{b^2 + c^2}
$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. □

6.* Compruebe que, para cualquier movimiento, el producto escalar de los vectores velocidad y aceleración es igual a la mitad de la derivada del cuadrado de la rapidez, es decir, dado un movimiento definido por la trayectoria $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$
v(t) \cdot a(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\rho^2(t))
$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Solución. Se conoce que $\|v(t)\| = \rho(t)$, para todo $t \in I$, por lo tanto

$$
\rho^2(t) = v(t) \cdot v(t).
$$

Derivando esto respecto al tiempo, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\rho^2(t)) &= \frac{d}{dt}(v(t) \cdot v(t)) \\
&= v'(t) \cdot v(t) + v(t) \cdot v(t)' \\
&= 2v(t) \cdot v(t)',
\end{aligned}
$$

para todo $t \in I$. Por lo tanto, como la aceleración es la derivada del vector velocidad,

$$
\frac{d}{dt}(\rho^2(t)) = 2v(t) \cdot a(t),
$$

para todo $t \in I$; reordenamos la expresión y obtenemos

$$
\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\rho^2(t)) = v(t) \cdot a(t),
$$

para todo $t \in I$, como queríamos. □

7. Dada la trayectoria

$$
\begin{aligned}
\alpha\colon [0, +\infty[\; &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\
t \; &\longmapsto \alpha(t) = c + \frac{1 - e^{-kt}}{k} d,
\end{aligned}
$$

donde $k > 0$ y $c, d \in \mathbb{R}^n$. Muestre que α verifica

$$
\alpha'' = -k\alpha'.
$$

Hallar la relación de c y d con la posición inicial y calcular

$$
\lim_{t \to +\infty} (\alpha(t) - \alpha(0))
$$

en términos de la velocidad inicial (a este límite se lo conoce como la velocidad total de desplazamiento de la partícula).

Solución. Es fácil notar que α es infinitamente derivable y se tiene que

$$
\alpha'(t) = e^{-kt} d \qquad \text{y} \qquad \alpha''(t) = -ke^{-kt} d
$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Así,

$$\alpha'' = -k\alpha'.$$

Por otro lado, puesto que

$$\alpha(0) = c \quad \text{y} \quad \alpha'(0) = d,$$

es decir, c es la posición inicial y d es la velocidad inicial. Además, se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} (\alpha(t) - \alpha(0)) = \lim_{t\to+\infty} \left(c + \frac{1 - e^{-kt}}{k} d \right) - c = \lim_{t\to+\infty} \frac{1 - e^{-kt}}{k} d = \frac{1}{k} d,$$

dado que $k > 0$. Finalmente, la velocidad total de desplazamiento de la partícula es

$$\lim_{t\to+\infty} (\alpha(t) - \alpha(0)) = \frac{1}{k}\alpha'(0).$$

□

8. Compruebe que, en un movimiento representado por la función $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$, si el vector aceleración $a(t)$ es cero para todo $t \in I$, el movimiento es rectilíneo.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha \colon I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)), \end{aligned}$$

y dado que $a(t) = 0$ para todo $t \in I$, se tiene que

$$\alpha_1''(t) = 0, \qquad \alpha_2''(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \alpha_3''(t) = 0,$$

y por lo tanto

$$\alpha_1(t) = a_1 + tb_1, \qquad \alpha_2(t) = a_2 + tb_2 \qquad \text{y} \qquad \alpha_3(t) = a_3 + tb_3,$$

donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$. Así, el vector posición es

$$\alpha(t) = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, a_3 + tb_3) = a + tb$$

para todo $t \in I$, donde $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$, y por lo tanto el movimiento descrito por r es rectilíneo. □

9.* Verificar que la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\operatorname{sen}(t^2), \cos(t^2), e) \end{aligned}$$

describe un movimiento planar.

Solución. Para esto se debe verificar que la dirección del vector binormal es constante, entonces

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (2t\cos(t^2), -2t\operatorname{sen}(t^2), 0), \\ \rho(t) &= 2t \end{aligned}$$

de donde

$$T(t) = (\cos(t^2), -\operatorname{sen}(t^2), 0)$$

y

$$\begin{aligned} T'(t) &= (-2t\operatorname{sen}(t^2), -2t\cos(t^2), 0) \\ \|T'(t)\| &= 2t \\ N(t) &= (-\operatorname{sen}(t^2), -\cos(t^2), 0). \end{aligned}$$

Finalmente

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\cos(t^2), -\operatorname{sen}(t^2), 0) \times (-\operatorname{sen}(t^2), -\cos(t^2), 0) \\
&= (0, 0, -1)
\end{aligned}
$$

con lo que se verifica que el movimiento descrito es planar. □

10. Dada una curva C en $\mathbb{R}^3$, con dos parametrizaciones equivalente

$$\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{y} \qquad \beta\colon J \to \mathbb{R}^3$$

con cambio de parámetro $u\colon I \to J$ creciente, demostrar que los vectores principales no se ven afectados por el cambio de parámetro.

Solución. Dado que u es el cambio de parámetro, se tiene que

$$\beta(u(t)) = \alpha(t)$$

para todo $t \in I$. Además, dado que u es creciente, se tiene que $u'(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Fijemos $t \in \mathbb{R}$ y llamemos $\tau = u(t)$. Calculemos los vectores principales en en el punto $\beta(\tau)$. Con la parametrización β, tenemos que

$$T_\beta(\tau) = \frac{\beta'(\tau)}{\|\beta'(\tau)\|}, \qquad N_\beta(\tau) = \frac{T'_\beta(\tau)}{\|T'_\beta(\tau)\|} \qquad \text{y} \qquad B_\beta(\tau) = T_\beta(\tau) \times N_\beta(\tau).$$

Ahora, hallemos los vectores en el mismo punto pero con la parametrización α, es decir en el punto $\beta(\tau) = \beta(u(t)) = \alpha(t)$ y tenemos

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \qquad N_\alpha(t) = \frac{T'_\alpha(\tau)}{\|T'_\alpha(t)\|} \qquad \text{y} \qquad B_\alpha(t) = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t).$$

Pero notemos que

$$
\begin{aligned}
T_\alpha(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(\beta(u(t)))'}{\|(\beta(u(t)))'\|} \\
&= \frac{u'(t)\beta'(u(t))}{\|u'(t)\beta'(u(t))\|} = \frac{u'(t)\beta'(u(t))}{|u'(t)|\|\beta'(u(t))\|} \\
&= \frac{\beta'(u(t))}{\|\beta'(u(t))\|} = \frac{\beta'(\tau)}{\|\beta'(\tau)\|} \\
&= T_\beta(\tau),
\end{aligned}
$$

es decir, $T\alpha(t) = T_\beta(u(t))$. Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
N_\alpha(t) &= \frac{T'_\alpha(t)}{\|T'_\alpha(t)\|} = \frac{(T_\beta(u(t)))'}{\|(T_\beta(u(t)))'\|} \\
&= \frac{u'(t)T'_\beta(u(t))}{\|u'(t)T'_\beta(u(t))\|} = \frac{u'(t)T'_\beta(u(t))}{|\beta'(t)|\|T'_\beta(u(t))\|} \\
&= \frac{T'_\beta(u(t))}{\|T'_\beta(u(t))\|} = \frac{T'_\beta(\tau)}{\|T'_\beta(\tau)\|} \\
&= N_\beta(\tau).
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$B_\alpha(t) = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t) = T_\beta(\tau) \times N_\beta(\tau) = B_\beta(\tau),$$

es decir,

$$T_\alpha(t) = T_\beta(\tau), \qquad N_\alpha(t) = N_\beta(\tau) \qquad \text{y} \qquad B_\alpha(t) = B_\beta(\tau).$$ □

11. Demostrar que el módulo de la componente normal del vector aceleración en t es $\dfrac{\|v(t) \times a(t)\|}{\|v(t)\|}$ para cualquier curva.

12. Dado el movimiento representado por

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (\operatorname{sen}(t), \cos(t), t^2). \end{aligned}$$

Verifique que se cumple que

$$a(t) = \rho'(t)T(t) + \rho(t)T'(t).$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} v(t) &= \alpha'(t) = (\cos(t), -\operatorname{sen}(t), 2t), & \rho(t) &= \|v(t)\| = \sqrt{1+4t^2}, \\ a(t) &= \alpha''(t) = (-\operatorname{sen}(t), -\cos(t), 2), & \rho'(t) &= \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \end{aligned}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. Puesto que $\alpha'(t) \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$, se sigue que

$$T(t) = \left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{-\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \right)$$

y además,

$$T'(t) = \left(\frac{-(1+4t^2)\operatorname{sen}(t) - 4t\cos(t))}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{4t\operatorname{sen}(t) - (1+4t^2)\cos(t))}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Finalmente, para cada $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho'(t)T(t) + \rho(t)T'(t) &= \\ &= \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{-\operatorname{sen}(t)}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \right) \\ &\quad + \sqrt{1+4t^2} \left(\frac{-(1+4t^2)\operatorname{sen}(t) - 4t\cos(t))}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{4t\operatorname{sen}(t) - (1+4t^2)\cos(t))}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= 4t \left(\frac{\cos(t)}{1+4t^2}, \frac{-\operatorname{sen}(t)}{1+4t^2}, \frac{2t}{1+4t^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{-(1+4t^2)\operatorname{sen}(t) - 4t\cos(t))}{1+4t^2}, \frac{4t\operatorname{sen}(t) - (1+4t^2)\cos(t))}{1+4t^2}, \frac{2}{1+4t^2} \right) \\ &= \left(\frac{-(1+4t^2)\operatorname{sen}(t))}{1+4t^2}, \frac{-(1+4t^2)\cos(t))}{1+4t^2}, \frac{8t^2+2}{1+4t^2} \right) \\ &= (-\operatorname{sen}(t), -\cos(t), 2) \\ &= a(t). \end{aligned}$$

Así, se concluye que

$$a(t) = \rho'(t)T(t) + \rho(t)T'(t)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$. □

13. Calcule la longitud de C representada por la trayectoria $\alpha \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ donde α se define como en el ejercicio anterior. Además, calcular su vector curvatura y su curvatura.

Solución. Utilizando los cálculos anteriores y la definición, se tiene que

$$\ell(C) = \int_0^{2\pi} \rho(t)dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4t^2}dt = \pi\sqrt{1+16\pi^2} + \frac{1}{4}\operatorname{senh}^{-1}(4\pi) \approx 40{,}4.$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} K(t) = \frac{T'(t)}{\rho(t)} &= \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\left(\frac{-(1+4t^2)\operatorname{sen}(t) - 4t\cos(t))}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{4t\operatorname{sen}(t) - (1+4t^2)\cos(t))}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= \left(\frac{-(1+4t^2)\operatorname{sen}(t) - 4t\cos(t))}{(1+4t^2)^2}, \frac{4t\operatorname{sen}(t) - (1+4t^2)\cos(t))}{(1+4t^2)^2}, \frac{2}{(1+4t^2)^2}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\rho(t)} &= \frac{1}{(1+4t^2)^2}\sqrt{(-(1+4t^2)\operatorname{sen}(t) - 4t\cos(t)))^2 + (4t\operatorname{sen}(t) - (1+4t^2)\cos(t)))^2 + 4} \\ &= \frac{1}{(1+4t^2)^2}\sqrt{(1+4t^2)^2 + 16t^2 + 4} \\ &= \frac{1}{(1+4t^2)^2}\sqrt{(4t^4 + 16t^2 + 5} \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$.

Se recomienda al estudiante calcula el vector curvatura y la curvatura utilizando la velocidad y aceleración. □

14.* Dada la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto a(1-\cos(t))\mathbf{i} + a(t - \operatorname{sen}(t))\mathbf{j} \end{aligned}$$

con $a > 0$. Hallar

a) La longitud de la curva C descrita por α. (Distancia)

b) Desplazamiento entre los puntos inicial y final de la curva C.

Solución. *a*) El vector velocidad correspondiente es

$$v(t) = \alpha'(t) = a\operatorname{sen}(t)\mathbf{i} + (a - a\cos(t))\mathbf{j},$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$ y la rapidez asociada es

$$\rho(t) = \|v(t)\| = a\sqrt{2 - 2\cos(t)}$$

para todo $t \in [0, 2\pi]$. Por la definición de la longitud de arco de la curva descrita por r, se tiene que

$$\begin{aligned} \ell(C) &= \int_0^{2\pi} \|v(t)\|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2 - 2\cos(t)}\, dt \\ &= 8a. \end{aligned}$$

□

b) El desplazamiento Δr es la diferencia entre los puntos final e inicial, que son $\alpha(2\pi)$ y $\alpha(0)$ respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} \Delta r &= a(0, 2\pi) - a(0, 0) \\ &= a(0, 2\pi) \end{aligned}$$

y su norma es $\|\Delta r\| = 2a\pi$.

15.* Un movimiento se describe por la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0,5[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t^2, |\, t-4 \,|) \end{aligned}$$

Determine la longitud de la curva para cualquier $t \in [0,5[$. Determine la curvatura para cualquier $t \in [0,5[$. Esta trayectoria no es derivable en todo su domino sin embargo todas las definiciones se pueden aplicar a cada segmento de la curva.

16. La trayectoria definida por

$$\begin{aligned} \alpha\colon [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (a\,\text{sen}(t), b\cos(t)) \end{aligned}$$

donde $0 < b < a$ son números reales, es la parametrización de una elipse. Probar que la longitud L de una elipse está dada por la integral

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\,\text{sen}^2(t)}\, dt,$$

donde $e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. Al número e se lo llama excentricidad de la elipse.

17.* Dada la curva definida por la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (e^t\cos(t), e^t\,\text{sen}(t), e^t) \end{aligned}$$

Hallar la curvatura y la ecuación del plano osculador cuando $t = 0$. (Use los vectores tangencial y normal, de manera alternativa use los vectores velocidad y aceleración y compare las respuestas.)

Solución. Nótese que α es al menos dos veces derivable. En efecto, sus dos primeras derivadas α' y α'' están dadas por

$$\alpha'(t) = (e^t\cos(t) - e^t\,\text{sen}(t), e^t\cos(t) + e^t\,\text{sen}(t), e^t),$$

y

$$\alpha''(t) = (-2e^t\,\text{sen}(t), 2e^t\cos(t), e^t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Además,

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(e^t\cos(t) - e^t\,\text{sen}(t))^2 + (e^t\cos(t) + e^t\,\text{sen}(t))^2 + e^{2t}} = \sqrt{3}e^t,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, en $t = 0$, se tiene que $\alpha'(0) = (1,1,1)$, $\alpha''(0) = (0,2,1)$ y $\|\alpha'(0)\| = \sqrt{3}$, por tanto, la curvatura de α en $t = 0$, es

$$\begin{aligned} \kappa(0) &= \frac{\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} \\ &= \frac{\|(1,1,1)\times(0,2,1)\|}{\sqrt{3}^3} \\ &= \frac{\|(-1,-1,2)\|}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Para determinar la ecuación del plano osculador, calculemos el vector unitario tangente $T(t)$ y el vector normal principal $N(t)$. El vector unitario tangente está dado por

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\alpha'(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}\alpha'(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y cuya derivada T' está dada por

$$T'(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}(-\cos(t) - \operatorname{sen}(t), \cos(t) - \operatorname{sen}(t), 0),$$

con norma $\|T'(t)\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. El vector normal principal, está dado por

$$N(t) = \frac{1}{\|T'(t)\|}T'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}T'(t).$$

Nótese que un vector perpendicular al plano osculador es $B(t) = T(t) \times N(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto, en $t = 0$,

$$B(0) = T(0) \times N(0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha'(0)\right) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}T'(0)\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left((1,1,1) \times (-1,1,0)\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}(-1,-1,2).$$

Con esto, se tiene que la ecuación del plano está dada por

$$B(0) \cdot (x,y,z) = B(0) \cdot \alpha(0),$$

es decir,

$$(-1,-1,2) \cdot (x,y,z) = (-1,-1,2) \cdot (1,0,1)$$

así, la ecuación del plano es

$$-x - y + 2z = 1.$$

De manera alternativa, se sabe que los vectores aceleración y velocidad también generan el plano osculador, entonces este viene dado por

$$P\left(\alpha(0); \alpha'(0); \alpha''(0)\right)$$

es decir que un vector normal es

$$N = \alpha'(0) \times \alpha''(0) = (1,1,1) \times (0,2,1) = (-1,-1,2).$$

Finalmente, el plano oculador pasa por el punto $\alpha(0) = (1,0,1)$ y es ortogonal a $N = (-1,-1,2)$ y su ecuación es

$$-x - y + 2z = 1.$$

□

18. Si un punto se mueve por una curva, parametrizada por la función

$$\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3,$$

de manera que sus vectores velocidad y aceleración tienen siempre longitud constante, probar que la curvatura de la curva es constante en todos sus puntos.

Solución. Tenemos que $\|v(t)\| = k_1$ y $\|a(t)\| = k_2$ para todo $t \in I$, donde $k_1 > 0$ y $k_2 \geq 0$. Así

$$T(t) = \frac{v(t)}{k_1},$$

por lo tanto

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{k_1} = \frac{\|a(t)\|}{k_1^2} = \frac{k_2}{k_1^2},$$

de donde se tiene que la curvatura es constante. □

19.* Determinar el punto de la parábola de ecuación $y = x^2$ en el que la curvatura alcanza su valor máximo.

Solución. Definamos la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t^2). \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\kappa(t) = \frac{1}{\rho(t)} \|T'(t)\|,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, donde

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right)' \\ &= \frac{\rho(t)\alpha''(t) - \rho'(t)\alpha'(t)}{\rho^3(t)}. \end{aligned}$$

Así,

$$\kappa(t) = \frac{2}{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Ahora, buscamos $t \in \mathbb{R}$ de modo que κ alcance su valor máximo. Notemos que κ es diferenciable en $\mathbb{R}$, por lo tanto

$$\kappa'(t) = -\frac{24t}{(1+4t^2)^{\frac{5}{2}}},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, de donde se tiene que $\kappa'(t) = 0$ si y solo si $t = 0$, es decir que $t = 0$ es un punto crítico para κ. Finalmente, notemos que $\kappa'(t) > 0$ si $t < 0$ y $\kappa'(t) < 0$ si $t > 0$, es decir, κ alcanza su valor máximo cuando $t = 0$. □

20. Verifique que en una circunferencia, de radio 1, la curvatura es constante.

Ejercicios clase CP: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 14, 15, 17, 19.