1.* Sea el campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto xy^2. \end{aligned}$$

Dado que f es un polinomio, f es continuo y se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(3,2)} f(x,y) = f(3,2) = 12.$$

Para $\epsilon = 1$, determine explícitamente un $\delta > 0$ tal que

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\|(x,y)-(3,2)\| < \delta \Longrightarrow |xy^2 - 12| < 1).$$

Solución. De la definición de norma, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\|(x,y)-(3,2)\| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)},$$

luego $\|(x,y)-(3,2)\| \geq |x-3|$ y $\|(x,y)-(3,2)\| \geq |y-2|$. Queremos acotar el término

$$|xy^2 - 12|$$

cerca del punto $(3,2)$. Con esto y dado que $(x,y) \to (3,2)$, $|x-3|$ y $|y-2|$ deben ser términos pequeños, se tiene que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} |xy^2 - 12| &= |(x-3)(y^2-4) + 4x + 3y^2 - 24| \\ &= |(x-3)(y^2-4) + 4(x-3) + 3(y^2-4)| \\ &\leq |x-3||y^2-4| + 4|x-3| + 3|y^2-4| \\ &= |x-3||y-2||y+2| + 4|x-3| + 3|y-2||y+2|. \end{aligned} \tag{1}$$

Así, debemos acotar cada uno de los términos anteriores. Como el δ debe ser pequeño, podemos suponer que $\delta \leq 1$. Entonces si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\|(x,y)-(3,2)\| < \delta \leq 1,$$

se tiene que

$$|x-3| \leq \|(x,y)-(3,2)\| < \delta \qquad \text{y} \qquad |y-2| \leq \|(x,y)-(3,2)\| < \delta.$$

Ahora bien, como $|y-2| < 1$, se tiene que $|y+2| < 5$. Por todo esto,

$$|x-3||y-2||y+2| + 4|x-3| + 3|y-2||y+2| < (\delta)(\delta)5 + 4\delta + 3(\delta)5 = 5\delta^2 + 19\delta.$$

De la última desigualdad y (1), es suficiente encontrar $\delta > 0$, tal que

$$5\delta^2 + 19\delta \leq 1$$

lo qué ocurre cuando

$$0 < \delta \leq \frac{\sqrt{381} - 19}{10}.$$

Por lo tanto, es suficiente tomar

$$\delta = \frac{\sqrt{381} - 19}{10} \approx 0{,}0519.$$

□

2.* Suponga que está trabajando en una empresa de productos lácteos cuyo producto estrella es un yogur, que se vende en un envase cónico de altura 30 cm y de radio 20 cm. La empresa cuenta con un sensor que llena el envase de yogur "exactamente" hasta la altura determinada. Al momento de elaborar el envase se podría tolerar errores en la altura o el radio, pero el error en la cantidad del líquido que se coloca no puede ser mayor a 1 decímetro cúbico. Usted está encargado de resolver este problema. Para ello determine una función que modele la aprobación o rechazo de los envases y el rango en el cual pueden estar la altura y radio de los mismos.

Solución. Si x es la altura y y el radio del envase medido en decímetros, se tiene que su volumen es

$$\frac{1}{3}\pi y^2 x.$$

Como la constante $\frac{\pi}{3} \approx 1$, no va a alterar los cálculos ¿por qué? No la vamos a considerar y se define la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\longmapsto xy^2. \end{aligned}$$

El caso ideal es cuando $x = 3$ y $y = 2$, ahora queremos saber que tan cerca pueden estar estas variables para que el volumen del líquido no sea muy diferente al ideal. Lo que queremos saber es que tolerancia $\delta > 0$, me permite deducir

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} < \delta \Longrightarrow |xy^2 - 12| < 1.$$

Por el ejercicio anterior, conocemos que esto se verifica para cualquier

$$0 < \delta \leq \frac{\sqrt{381} - 19}{10} \approx 0{,}0519.$$

Puesto que entre más precisión tenga la maquina de medición, más costosa y sensible será, se considera la tolerancia permitida mayor 0,0519 decímetros; es decir, el radio debe estar en el rango $[1{,}9481; 2{,}0519]$ y la altura en el rango $[2{,}9481; 3{,}0519]$ en decímetros. En otras palabras, el radio debe estar en el rango $[19{,}481; 20{,}519]$ y la altura en el rango $[29{,}481; 30{,}519]$ en centímetros; pero ambos valores no son independientes, su distancia a $(3,2)$ debe ser menor a 0,0519. □

3. Calcular, paso a paso

$$\lim_{x\to 2} \lim_{y\to 0} f(x,y),$$

donde

$$\begin{aligned} f\colon [0,3] \times [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = x^2 + y + 2. \end{aligned}$$

Solución. Para $x \in [0,3]$, definimos

$$\begin{aligned} f_x\colon [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f_x(y) = x^2 + y + 2. \end{aligned}$$

Notemos que, para $x \in [0,3]$, fijo, se tiene que

$$\lim_{y\to 0} f_x(y) = \lim_{y\to 0} x^2 + y + 2 = x^2 + 2.$$

Por lo tanto, podemos definir la función

$$\begin{aligned} g\colon [0,3] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = x^2 + 2. \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} x^2 + 2 = 6.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 2}\lim_{y\to 0} f(x,y) = 6. \qquad \square$$

4.* Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Se sabe que si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

y existen los dos límites iterados

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) \qquad \text{y} \qquad \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

entonces estos son iguales a L.

a) Sea

$$\begin{aligned} g\colon \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{x-y}{x+y} \end{aligned}$$

donde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$. Verificar, cuando $(x,y) \to (0,0)$, que los límites iterados son diferentes y deducir que g no tiende a un límite.

b) Sea

$$\begin{aligned} g\colon \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \end{aligned}$$

donde $\Omega \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Demostrar que aunque los límites iterados son iguales cuando $(x,y) \to (0,0)$, la función g no tiende a ningún límite.

c) Sea

$$\begin{aligned} g\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Verificar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0,$$

sin embargo los límites iterados son diferentes.

Solución.

Se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y) = 1,$$

mientras que

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y) = -1.$$

Si el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

existe, ya que los dos límites iterados existen entonces estos deberían ser iguales, lo cual es una contradicción. Finalmente, se puede decir que **ya que los límites iterados existen y no son iguales entonces el lím$_{(x,y)\to(0,0)}$ $g(x,y)$ no existe.**

b) Se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y) = 0,$$

mientras que

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y) = 0.$$

Nótese que la existencia del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

implica la igualdad de los límites iterados si estos existen, no recíprocamente. Por esto **la igualdad de los límites iterados no nos dice nada sobre el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.**

En este ejemplo, si calculamos el límite de g cuando $(x,y)\to(0,0)$ por la trayectoria inyectiva

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t,t), \end{aligned}$$

se tiene que $\alpha(0) = (0,0)$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) &= \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{t^4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

De esta manera se concluye que el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ no existe ya que debería ser único.

c) Se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y) &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{y}\right) \\ &= \lim_{y\to 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

no existe ya que $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$ no tiende a un límite cuando $y\to 0$.

Si al menos uno de los límites iterados no existe, entonces no se puede concluir nada sobre el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$.

Además, nótese que $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$, cuando $y\to 0$, varía entre $[-1,1]$, por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right) = 0.$$

A pesar de la existencia de este límite, no se puede concluir que los límites iterados son iguales ya que uno de ellos no existe.

$\square$

5. Dadas la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x_1^2 - 2x_2 - 1}{\sqrt{(x_1-1)^2 + x_2^2}}. \end{aligned}$$

y la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, 1-t). \end{aligned}$$

¿Existe el límite de f en $(1,0)$ por la trayectoria α?

Solución. Se puede observar que α es inyectiva. Además, para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(\alpha(t)) &= f(t, 1-t) \\
&= \frac{t^2 - 2(1-t) - 1}{\sqrt{(t-1)^2 + (1-t)^2}} \\
&= \frac{t^2 + 2t - 3}{\sqrt{2}|t-1|} \\
&= \frac{(t+3)(t-1)}{\sqrt{2}|t-1|} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{t+3}{\sqrt{2}} & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{t+3}{\sqrt{2}} & \text{si } t > 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{t \to 1^-} f(\alpha(t)) = -2\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 1^+} f(\alpha(t)) = 2\sqrt{2}.$$

Así, el límite

$$\lim_{t \to 1} f(\alpha(t))$$

no existe. □

6.* Dado el campo escalar:

$$\begin{aligned} f \colon \quad \Omega \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \frac{xy+1}{x^2 - y^2} \end{aligned}$$

donde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\}$. Determine el límite de f cuando $(x,y) \to (1,-1)$ a través de las trayectorias:

$$\begin{aligned} \alpha \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, -1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \beta \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto (s, -s^2) \end{aligned}$$

¿Qué se puede concluir?

Solución. El límite de f cuando $(x,y) \to (1,-1)$ a través de las trayectorias $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ son distintos, por lo tanto se puede concluir que el límite de f cuando $(x,y) \to (1,-1)$ no existe. □

7. Dado el campo escalar

$$\begin{aligned} f \colon \quad \mathbb{R}^2 \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

Probar que f es continuo en $(0,0)$.

Solución. Para que el campo f sea continuo en $(0,0)$, necesariamente se debe dar que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

para lo cual se analiza la existencia del límite de f cuando $(x, y) \to (0, 0)$. Se realiza el cambio de variable $\theta = x^2 + y^2$, además nótese que si $(x, y) \to (0, 0)$ entonces $\theta \to 0$, de aquí

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) &= \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \\ &= 1 \\ &= f(0, 0). \end{aligned}$$

Con esto se verifica que f es continua en $(0, 0)$. □

8. Dado el campo escalar:

$$\begin{aligned} f\colon \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq x^4, \\ 1 & \text{si } y \leq 0, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \end{aligned}$$

Obtenga los siguientes límites o explique porqué no existen:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y)$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$

Solución.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) = 1$ porque cualquier camino que pase por $(0, 1)$ y su entorno, satisface la condición $y \geq x^4$ en dicho punto.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x, y) = 0$ porque cualquier camino que pase por $(2, 3)$ y su entorno, no satisface las condiciones $y \leq x^4$ o $y \geq x^4$ en dicho punto.

c) Tomando las trayectorias,

$$\begin{aligned} \alpha\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (0, t) \end{aligned}$$

nótese que $\alpha(0) = (0, 0)$, entonces

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) = 1$$

y

$$\begin{aligned} \beta\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t^8) \end{aligned}$$

nótese que $\beta(0) = (0, 0)$, además, para cada $t \in \left]-1, 1\right[\setminus \{0\}$,

$$(f \circ \beta)(t) = f(\beta(t)) = f(t, t^8) = 0,$$

de donde

$$\lim_{t\to 0} f(\beta(t)) = 0$$

Por lo tanto el límite no existe en $(0, 0)$.

□

9.* Determinar el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el campo escalar

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^3+xy^2+2x^2+2y^2}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

sea continua en $(0,0)$.

Solución. $\alpha = 2$. □

10. Considere el campo escalar

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{3(x-1)^2y+(x-1)y^2+(x-1)^3+y^3}{(x-1)^3+y^3} & \text{si } (x,y) \neq (1,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (1,0). \end{cases} \end{aligned}$$

Estudie la continuidad de f en $(1,0)$.

Solución. Para determinar si f es continua en $(1,0)$ estudiemos la existencia del límite de f cuando (x,y) tiende a $(1,0)$.

Iniciemos analizando la existencia de los límites iterados, notemos que

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 1} f(x,y) = 1,$$

dado que los límites iterados existen y son iguales, si el límite existe, debe ser igual a 1.

Ahora, analicemos la existencia del límite mediante la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, t-1), \end{aligned}$$

se tiene que $\alpha(1) = (1,0)$. Entonces, el límite de f a lo largo de la trayectoria α cuando t tiende a 1 es

$$\lim_{t\to 1} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 1} f(t, t-1) = 3,$$

por lo tanto, si el límite existe, debe ser igual a 3, lo que contradice lo anterior. De aquí, concluimos que no existe el límite de f cuando (x,y) tiende a $(1,0)$, lo que implica que f no es continua en $(1,0)$. □

11. Considere el campo escalar

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Muestre que no es continuo en el origen.

12.* Considere el campo escalar

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

Muestre que f es no es continuo en el origen.

Solución. Analicemos este límite por trayectorias, tomemos $k \in \mathbb{R}$ y consideremos la trayectoria

$$\begin{aligned} \alpha_k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (kt^2, t^2, t). \end{aligned}$$

Notemos que si $\alpha_k(t) = (0,0,0)$, entonces $t = 0$. Luego, tenemos que

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha_k(t)) = \lim_{t\to 0} f(kt^2, t^2, t) = \lim_{t\to 0} \frac{kt^4 + t^4 + kt^4}{k^2t^4 + t^4 + t^4} = \frac{2k+1}{k^2+2}.$$

Ya que el límite anterior toma valores distintos que dependen del valor de k, concluimos que no existe el límite de f cuando (x, y, z) tiende a $(0, 0, 0)$, lo que implica que f no es continua en el origen. □

13.* Determine, utilizando cambio de variable, la existencia de los siguientes límites

a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$$

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{\operatorname{sen}(\sqrt{x^2 + y^2})}$$

d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

Solución. *a*) Utilizando cambio de variable, coordenadas polares:

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsen(\theta)$$

Se escribe F en coordenadas polares

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{(\rho \cdot cos(\theta))^4 + (\rho \cdot sen(\theta))^4}{(\rho \cdot cos(\theta))^2 + (\rho \cdot sen(\theta))^2}$$
$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \rho^2(cos(\theta)^4 + sen(\theta)^4)$$

La función se puede acotar. El límite cuando ρ tiende a cero converge independientemente del valor de θ.

$$|f(\rho, \theta) - 0| = \rho^2(cos(\theta)^4 + sen(\theta)^4)$$

por una función $H(\rho)$ que tienda a cero cuando $\lim_{\rho\to 0}$, se habrá encontrado del límite

$$\rho^2(cos(\theta)^4 + sen(\theta)^4) \leq \rho^2, \forall\theta \in [0, 2\pi)$$

Además

$$\lim_{\rho\to 0} H(\rho) = \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0$$

Por lo tanto existe el límite de F cuando (x,y) tiene a (0,0) y es 0.

b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Escribiendo la función en coordenadas polares:

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsen(\theta)$$

Se obtiene

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{(\rho \cdot cos(\theta))^2}{(\rho \cdot cos(\theta))^2 + (\rho \cdot sen(\theta))^2} = cos(\theta)^2$$

Se observa que el límite solo depende de θ

$$\lim_{\rho \to 0} cos(\theta)^2 = cos(\theta)^2$$

Por lo tanto el límite no existe, pues depende de la dirección con la que se acerca al punto (0,0).

c) Escribiendo la función en coordenadas polares:

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsen(\theta)$$

Se obtiene

$$f(\rho, \theta) = \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{sen(\sqrt{\rho^2})}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\rho, \theta) = \lim_{\rho \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{\rho^2}}}{sen(\rho)} = 0$$

d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$$

Escribiendo la función en coordenadas polares:

$$x = rcos(\theta)$$
$$y = rsen(\theta)$$

Se obtiene

$$\frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \frac{3(\rho \cdot cos(\theta))^2 \rho \cdot sen(\theta)}{(\rho \cdot cos(\theta))^2 + (\rho \cdot sen(\theta))^2} = 3\rho \cdot cos(\theta)^2 sen(\theta)$$

Se observa que $\rho \cdot cos(\theta)^2 sen(\theta)$ está acotado,

$$|f(\rho, \theta) - 0| = 3\rho \cdot cos(\theta)^2 \cdot sen(\theta)$$

por una función $H(\rho)$ que tienda a cero cuando $\lim_{\rho \to 0}$,

$$-1 \leq |cos(\theta)^2 \cdot sen(\theta)| \leq 1, \forall \theta \in [0, 2\pi)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho \to 0} 3\rho \cdot cos(\theta)^2 sen(\theta) = 0$$

□

Ejercicios clase CP: 1, 2, 4, 6, 9, 12, 13.