1. Dado el campo vectorial

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \left(\frac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right). \end{aligned}$$

Estudie la existencia del límite de F cuando x tiende a $(0,0)$.

Solución. Definamos las componentes de F:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

Para determinar si existe

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

analicemos sus límites por dos trayectorias. Sean la trayectorias

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t,t) \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \alpha_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t,-t). \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{t \to 0} f_1(r_1(t)) = \lim_{t \to 0} f_1(t,t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{t \to 0} f_1(r_2(t)) = \lim_{t \to 0} f_1(t,-t) = \lim_{t \to 0} \frac{-t^2}{2t^2} = \lim_{t \to 0} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

de donde

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

no existe. Como la primera componente no tiene límite en $(0,0)$, no hace falta estudiar la existencia del límite de la segunda componente, y se deduce que $\lim\limits_{x \to 0} F(x)$ no existe. □

2.* Sea la función:

$$\begin{aligned} F : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (e^x, e^{-y}, xy) \end{aligned}$$

Hallar la derivada $F'(a;y)$ en el punto $a = (1,1)$ y la dirección $y = (1,2)$.

Solución. Por definición de derivada de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $a \in \mathbb{R}^2$ respecto a $y \in \mathbb{R}^2$.

$$f'(a;y) = (f_1'(a;y), f_2'(a;y), f_3'(a;y))$$

La derivada de cada campo escalar será:

$$\begin{aligned}
f_1'(a;y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_1(a+hy)-f_1(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f_1((1,1)+h(1,2))-f_1(1,1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f_1((1+h,1+2h)-f_1(1,1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{1+h}-e^1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e(e^h-1)}{h} \\
&= e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2'(a;y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_2(a+hy)-f_2(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1-2h}-e^{-1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2e^{-1}(e^{-2h}-1)}{-2h} \\
&= \frac{-2}{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3'(a;y) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_3(a+hy)-f_3(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)(1+2h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h+2h^2-1}{h} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto $F'(a;y)$ en el punto $a=(1,1)$ y la dirección $y=(1,2)$ es:

$$F'(a;y) = \left(e, \frac{-2}{e}, 3\right).$$

Alternativamente

$$\begin{aligned}
F'((1,1);(1,2)) &= J_F(1,1)\cdot[(1,2)] \\
&= \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \left(e, \frac{-2}{e}, 3\right).
\end{aligned}$$

□

3.* Dado el campo vectorial

$$\begin{aligned}
F\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x,y) &\longmapsto (x^2-y, xy).
\end{aligned}$$

Suponiendo que F es diferenciable, calcular $F'(1,1)$.

Solución. Suponiendo que F es diferenciable, se tiene que

$$[F'(1,1)(h,k)] = J_F(1,1)[(h,k)]$$

para todo $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, empecemos calculando la matiz jacobiana de F,

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ y & x \end{bmatrix},$$

de donde

$$J_F(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así, tenemos que

$$[F'(1,1)(h,k)] = J_F(1,1)[(h,k)] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h-k \\ h+k \end{bmatrix},$$

para todo $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto

$$F'(1,1)(h,k) = (2h-k, h+k),$$

para todo $(h,k) \in \mathbb{R}^2$. Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} F'(1,1)\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (h,k) &\longmapsto F'(1,1)(h,k) = (2h-k, h+k). \end{aligned}$$

□

4. Dada la función vectorial

$$\begin{aligned} F\colon\ D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1,x_2) &\longmapsto \left(e^{x_1+x_2}, \frac{1}{x_1}, \operatorname{sen}(x_1x_2)\right) \end{aligned}$$

donde $D = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0\}$. Para $a = (-1,0)$ y $y \in \mathbb{R}^2$, determine la derivada de F respecto al vector y en el punto a.

Solución.

$$\begin{pmatrix} e^{-1}y_1 + e^{-1}y_2 \\ -y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix}$$

□

5.* Dado el campo vectorial

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x_1^2 - x_2, x_1x_2^2). \end{aligned}$$

Mostrar que F es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

Solución. Primero calculemos su matriz Jacobiana:

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -1 \\ x_2^2 & 2x_1x_2 \end{pmatrix}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Ahora, sea $a \in \mathbb{R}^2$, vamos a demostrar que F es diferenciable en a. Se tiene que

$$F'(a_1,a_2)(h_1,h_2) = (2a_1h_1 - h_2, a_2^2h_1 + 2a_1a_2h_2),$$

para todo $h \in \mathbb{R}^2$. Por otro lado, para cada $h \in \mathbb{R}^2$ no nulo, se tiene que

$$\begin{aligned} F(a+h) - F(a) - F'(a)(h) = ((a_1+h_1)^2 - (a_2+h_2), (a_1+h_1)(a_2+h_2)^2) - (a_1^2 - a_2, a_1a_2^2) \\ - (2a_1h_1 - h_2, a_2^2h_1 + 2a_1a_2h_2) \end{aligned}$$

$$= \left(h_1^2, a_1h_2^2 + 2a_2h_1h_2 + h_1h_2^2\right),$$

por lo tanto

$$\frac{F(a+h) - F(a) - F'(a)(h)}{\|h\|} = \left(\frac{h_1^2}{\|h\|}, \frac{a_1h_2^2 + 2a_2h_1h_2 + h_1h_2^2}{\|h\|}\right).$$

Dado que

$$|h_i| \leq \|h\|$$

para $i \in \{1,2\}$, se sigue que

$$0 \leq \frac{h_1^2}{\|h\|} \leq \|h\|, \qquad 0 \leq \frac{h_2^2}{\|h\|} \leq \|h\| \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \frac{|h_1h_2|}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|}{2},$$

de donde, por el teorema del Sanduche,

$$\lim_{h\to 0} \frac{h_1^2}{\|h\|} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{a_1h_2^2 + 2a_2h_1h_2 + h_1h_2^2}{\|h\|} = 0.$$

De esta manera, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - F'(a)(h)}{\|h\|} = 0$$

lo que significa que la función f es diferenciable en a. □

6. Dado el campo vectorial

$$\begin{aligned} F\colon \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x+y^2, y-2xy) \end{aligned}$$

Verifique que F es diferenciable en el punto $a = (2,1)$.

Solución. Para que F sea diferenciable en a, debe existir una aplicación lineal $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - T(h)}{\|h\|} = 0$$

Para $h \in \mathbb{R}^2$ tal que $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} F(a+h) - F(a) &= ((a_1+h_1) + (a_2+h_2)^2, (a_2+h_2) - 2(a_1+h_1)(a_2+h_2)) - (a_1+a_2, a_2 - 2a_1a_2) \\ &= (h_1 + 2a_2h_2 + h_2^2, h_2 - 2a_1h_2 - 2a_2h_1 - 2h_1h_2) \\ &= (h_1 + 2a_2h_2, h_2 - 2a_1h_2 - 2a_2h_1) + (h_2^2, -2h_1h_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2a_2 \\ -2a_2 & 1-2a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + (h_2^2, -2h_1h_2). \end{aligned}$$

Usando el Jacobiano de F en a, consideremos definir

$$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ h &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2a_2 \\ -2a_2 & 1-2a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pues esta es lineal. Así,

$$\frac{F(a+h) - F(a) - T(h)}{\|h\|} = \frac{(h_2^2, -2h_1h_2)}{\|h\|}$$

entonces, por el teorema del Sanduche

$$\lim_{h\to 0} \frac{(h_2^2, -2h_1h_2)}{\|h\|} = 0.$$

En efecto, para todo $h \neq 0$,

$$|h_1| \leq \|h\| \qquad \text{y} \qquad |h_2| \leq \|h\|$$

de donde
$$0 \leq \left| \frac{h_2^2}{\|h\|} \right| = \frac{h_2^2}{\|h\|} \leq \frac{\|h\|^2}{\|h\|} = \|h\|$$
y
$$0 \leq \left| \frac{-2h_1h_2}{\|h\|} \right| = \frac{2|h_1||h_2|}{\|h\|} \leq \frac{2\|h\|^2}{\|h\|} = 2\|h\|$$
lo que implica que
$$\lim_{h\to 0} \frac{h_2^2}{\|h\|} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{-2h_1h_2}{\|h\|} = 0.$$
Por la definición de límites de campos vectoriales,
$$\lim_{h\to 0} \frac{(h_2^2, -2h_1h_2)}{\|h\|} = 0.$$
Por todo esto,
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - T(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{(h_2^2, -2h_1h_2)}{\|h\|} = 0$$
con T lineal. Por tanto f es diferenciable en todo punto a.

□

7.* Dados los campos vectoriales

$$\begin{aligned} G\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,s) &\longmapsto (r+s, r-s, rs) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x^2-y^2, xyz, x^2+y^2+z) \end{aligned}$$

Determine $J_{F\circ G}(1,2)$.

Solución. Si G es diferenciable en a y F es diferenciable en $G(a)$, entonces
$$J_{F\circ G}(a) = J_F(G(a))J_G(a)$$
Se debe plantear la jacobiana de F y de G
$$J_F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix}$$
$$J_G(r,s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ s & r \end{pmatrix}$$
Evaluando la jacobiana de F en $G(r,s)$
$$J_F(G(r,s)) = \begin{pmatrix} 2(r+s) & -2(r-s) & 0 \\ (r-s)rs & (r+s)rs & (r+s)(r-s) \\ 2(r+s) & 2(r-s) & 1 \end{pmatrix}$$
Operando
$$J_F(r,s) = \begin{pmatrix} 2r+2s & -2r+2s & 0 \\ r^2s-rs^2 & r^2s+rs^2 & r^2-s^2 \\ 2r+2s & 2r-2s & 1 \end{pmatrix}$$
Entonces calculamos $(F\circ G)'(r,s)$
$$(F\circ G)'(r,s) = \begin{pmatrix} 2r+2s & -2r+2s & 0 \\ r^2s-rs^2 & r^2s+rs^2 & r^2-s^2 \\ 2r+2s & 2r-2s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ s & r \end{pmatrix}$$

$$(F\circ G)'(r,s) = \begin{pmatrix} 4s & 4r \\ 3r^2s - s^3 & r^3 - 3rs^2 \\ 4r + s & 4s + r \end{pmatrix}$$

Entonces

$$(F\circ G)'(1,2) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$\square$

8. Dados los campos vectoriales

$$\begin{aligned} F\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x^2+y+z, 2x+y+z^2) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} G\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) &\longmapsto (uv^2w^2, w^2\operatorname{sen}(v), u^2e^v) \end{aligned}$$

Determinar la matriz jacobiana de $F\circ G$ en (u,v,w).

9. Considere las funciones

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto xy \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} G\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\longmapsto (\cos(v+u), \operatorname{sen}(v-u)). \end{aligned}$$

Determine $D_1(f\circ G)$ y $D_2(f\circ G)$ en cualquier $(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

Solución. Se tiene que

$$D_1(f\circ G)(u,v) = -\cos(2u).$$

y

$$D_2(f\circ G)(u,v) = -\cos(2v).$$

$\square$

10. Supongamos que:

$$\begin{aligned} f\colon \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto xy + yz + \phi\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} G\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r,s,t) &\longmapsto (1+rse^t, rs^2e^{-t}, r^2s\operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

Donde $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función derivable y $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y\neq 0\}$. Determinar $D_2(f\circ G)$ en el punto $(2,1,0)$ sabiendo que $\phi'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$.

Solución. Se tiene que

$$D_2(f\circ G)(r,s,t) = \nabla f(G(r,s,t))\cdot D_2G(r,s,t)$$

donde

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y + \phi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}, x + z + \phi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}, y\right)$$

entonces

$$\nabla f(G(r,s,t)) = \left(rs^2e^{-t} + \phi'\left(\frac{1+rse^t}{rs^2e^{-t}}\right)\frac{1}{rs^2e^{-t}}, 1 + rse^t + r^2s\operatorname{sen} t + \phi'\left(\frac{1+rse^t}{rs^2e^{-t}}\right)\frac{-1-rse^t}{(rs^2e^{-t})^2}, rs^2e^{-t}\right),$$

además

$$D_2G(r,s,t) = (re^t, 2rse^{-t}, r^2\operatorname{sen} t),$$

de aquí

$$\begin{aligned}D_2(f\circ G)(r,s,t) &= \left(rs^2e^{-t}+\phi'\left(\frac{1+rse^t}{rs^2e^{-t}}\right)\frac{1}{rs^2e^{-t}}\right)\left(re^t\right)\\ &\quad + \left(1+rse^t+r^2s\,\mathrm{sen}\,t+\phi'\left(\frac{1+rse^t}{rs^2e^{-t}}\right)\frac{-1-rse^t}{(rs^2e^{-t})^2}\right)\left(2rse^{-t}\right)\\ &\quad + \left(rs^2e^{-t}\right)\left(r^2\,\mathrm{sen}\,t\right).\end{aligned}$$

Evaluando en el punto $(2,1,0)$ y conociendo que $\phi'\left(\frac{3}{2}\right)=-1$,

$$\begin{aligned}D_2(f\circ G)(2,1,0) &= \left(2+\phi'\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)(2)+\left(3+\phi'\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{-3}{4}\right)\right)(4)+(2)(0)\\ &= \left(2-\frac{1}{2}\right)(2)+\left(3+\frac{3}{4}\right)(4)\\ &= 3+15\\ &= 18.\end{aligned}$$

□

11.* Dados

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto x^2+y^2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} G\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2\\ (u,v) &\longmapsto \left(e^{u+v},u^2+v\right)\end{aligned}$$

Determinar $D_1(f\circ G)$ en $(1,1)$.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}D_1(f\circ G)(u,v) &= \nabla f(G(u,v))\cdot D_1G(u,v)\\ &= \left(2e^{u+v},2u^2+2v\right)\cdot\left(e^{u+v},2u\right)\\ &= 2e^{2u+2v}+4u^3+4uv.\end{aligned}$$

De aquí

$$D_1(f\circ G)(1,1)=2e^4+8.$$

□

12.* Sea

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto f(x,y)=\begin{cases} e^x+e^y+\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 2 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}\end{aligned}$$

Hallar $D_{1,1}f(0,0)$ y $D_{2,1}f(0,0)$.

Solución. Calculemos en primer lugar D_1f. Nótese que para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$D_1f(x,y)=e^x+\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

mientras que si $(x,y)=(0,0)$, se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D_1 f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto D_1 f(x,y) = \begin{cases} e^x + \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \end{aligned}$$

Calculemos ahora $D_{1,1}(f)(0,0)$,

$$\begin{aligned} D_{1,1} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0+h,0) - D_1 f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(h,0) - D_1 f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1, \end{aligned}$$

es decir, $D_{1,1} f(0,0) = 1$. Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,0+h) - D_1 f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{D_1 f(0,h) - D_1 f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

es decir, $D_{2,1} f(0,0)$ no existe. □

13. Sea el campo escalar:

$$\begin{aligned} f\colon\ \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto \frac{x+y}{y-z}, \end{aligned}$$

donde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq z\}$. Obtenga su matriz Hessiana en el punto $a = (0,1,-1)$.

Solución.

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

□

14. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto \operatorname{sen}(xyz), \end{aligned}$$

determinar $\nabla f(x,y,z)$ y $H_f(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

15.* Sea el campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2 e^{x-y}. \end{aligned}$$

a) Encuentre la aproximación lineal en el punto $(1,0)$.

b) Encuentre la aproximación cuadrática en el punto $(1,0)$.

c) Calcule con ambas aproximaciones estime $f(1,0)$ y $f(1,1)$; y compare con su valor real.

Solución. f es diferenciable pues es la multiplicación de un polinomio con una función exponencial. Así,

$$\nabla f(a) = \left(a_1(a_1+2)e^{a_1-a_2}, a_1^2(-e^{a_1-a_2})\right)$$

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} a_1^2 e^{a_1-a_2} + 4a_1 e^{a_1-a_2} + 2e^{a_1-a_2} & a_1^2(-e^{a_1-a_2}) - 2a_1 e^{a_1-a_2} \\ a_1^2(-e^{a_1-a_2}) - 2a_1 e^{a_1-a_2} & a_1^2 e^{a_1-a_2} \end{pmatrix}$$

para todo $a \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto la aproximación lineal de f en el punto $a = (1,0)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cerca de a es

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(1,0) + \nabla f(a) \cdot ((x,y) - a) \\ &\approx e + (3e, -e) \cdot (x-1, y) \\ &\approx e(1 + 3x - 3 - y) \\ &\approx e(1 + 3x - y - 3). \end{aligned}$$

Además, la aproximación cuadrática de f en el punto a para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cerca de a es

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(1,0) + \nabla f(a) \cdot ((x,y) - a) + \frac{1}{2}((x,y) - a) H_f(a) ((x,y) - a)^t \\ &\approx e(1 + 3x - y - 3) + \frac{1}{2}(x-1, y) \begin{pmatrix} 7e & -3e \\ -3e & e \end{pmatrix} (x-1, y)^t \\ &\approx e(1 + 3x - y - 3) + \frac{e}{2}(7x^2 - 6xy - 14x + y^2 + 6y + 7) \\ &\approx \frac{e}{2}(7x^2 - 6xy - 8x + y^2 + 4y + 3). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación lineal de f en $(1,0)$ para $(1,0)$ es

$$e(1 + 3(1) - (0) - 3) = e$$

y la cuadrática es

$$\frac{1}{2}(7 - 8 + 3) = e.$$

Lo que indica que ambas aproximaciones coinciden con $f(1,0) = e$, lo cual es lo esperado ya que estás aproximaciones entre más cerca al punto $a = (1,0)$ son mejor. La ventaja es que para números cercanos a $(1,0)$ también funcionan. En efecto, ambas aproximaciones para $(1,1)$ son

$$e(1-1) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{e}{2} \approx 1{,}36,$$

respectivamente. Comparado con el valor $f(1,1) = 1$ la aproximación cuadrática es mejor. En la práctica es más cómodo trabajar con aproximaciones pues son polinomios aunque se pierda un poco de exactitud. $\square$

16. Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y), \end{aligned}$$

determinar la aproximación lineal y la aproximación cuadrática de la función alrededor del punto $(0,0)$.

Solución. Llamemos F_1 a la aproximación lineal de f en $(0,0)$, tenemos que

$$F_1(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot ((x,y) - (0,0)),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto, empecemos calculando el gradiente de f,

$$\nabla f(x,y) = (\cos(x)\cos(y), -\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)),$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Con esto, se tiene que

$$\nabla f(0,0) = (1,0).$$

Por lo tanto, la aproximación lineal de f en $(0,0)$ es

$$F_1(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot ((x,y) - (0,0))$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + (1,0) \cdot (x,y) \\
&= x,
\end{aligned}
$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Ahora, llamemos F_2 a la aproximación cuadrática de f en $(0,0)$, tenemos que

$$
F_2(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot ((x,y) - (0,0)) + \frac{1}{2!}[(x,y) - (0,0)]^T Hf(0,0)[(x,y) - (0,0)],
$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto, empecemos calculando la jacobiana de f,

$$
H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(x)\cos(y) & -\cos(x)\operatorname{sen}(y) \\ -\cos(x)\operatorname{sen}(y) & \operatorname{sen}(x)(-\cos(y))) \end{pmatrix},
$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Con esto, se tiene que

$$
H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

Por lo tanto, la aproximación cuadrática de f en $(0,0)$ es

$$
\begin{aligned}
F_2(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot ((x,y) - (0,0)) + \frac{1}{2!}[(x,y) - (0,0)]^T Hf(0,0)[(x,y) - (0,0)] \\
&= 0 + (1,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= x,
\end{aligned}
$$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. □

17. Utilizando el ejercicio anterior, encuentre una estimación del valor de $\operatorname{sen}(0{,}2)\cos(0{,}1)$. Para esto, utilice la aproximación lineal y la aproximación cuadrática de la función.

Solución. Tomemos la aproximación lineal de la función del ejercicio anterior, así, se tiene que

$$
\operatorname{sen}(0{,}2)\cos(0{,}1) = f(0{,}2, 0{,}1) \approx F_1(0{,}2, 0{,}1) = 0{,}2.
$$

□

18.* Considere $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(x, f(x)) = 0$ y una función diferenciable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Exprese la derivada f en términos de las derivadas parciales de g.

Solución. Se sabe que

$$
\begin{aligned}
g(x, f(x)) &= 0 \\
\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) &= 0,
\end{aligned}
$$

aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) &= \nabla g(x, f(x)) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x, f(x)) \\
&= (D_1 g(x, f(x)), D_2 g(x, f(x))) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) \\
&= D_1 g(x, f(x)) + D_2 g(x, f(x)) \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0,
\end{aligned}
$$

de donde

$$
\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -\frac{D_1 g}{D_2 g}(x, f(x)).
$$

$\square$

19. Suponga que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cumple que

$$e^{xy} - e^{yf(x,y)} + f(x,y)e^x - 1 = 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determine $D_1 f$ y $D_2 f$ en el punto $(0,0)$.

Solución.

$$D_1 f(0,0) = -1.$$

$$D_2 f(0,0) = 1.$$

$\square$

20.* Suponga que la función $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, verifica que

$$x^2 f^2(x,y) + xy^2 - f^3(x,y) + 4y f(x,y) = 5,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determinar $D_1 f(x,y)$ y $D_2 f(x,y)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución. Derivando la ecuación con respecto a x y y respectivamente se tiene

$$\begin{aligned} 2xf^2 + 2x^2 f D_1 f + y^2 - 3f^2 D_1 f + 4y D_1 f = 0 \qquad \text{y} \\ 2x^2 f D_2 f + 2xy - 3f^2 D_2 f + 4f + 4y D_2 f = 0, \end{aligned}$$

de aquí

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= -\frac{2xf^2(x,y) + y^2}{2x^2 f(x,y) - 3f^2(x,y) + 4y} \qquad \text{y} \\ D_2 f(x,y) &= -\frac{2xy + 4f(x,y)}{2x^2 f(x,y) - 3f^2(x,y) + 4y} \end{aligned}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $3f^2(x,y) - 2x^2 f(x,y) - 4y \neq 0$. $\square$

21.* Del ejercicio anterior, si se sabe que $f(1,1) = 1$, determine la derivada de f en el punto $(1,1)$ con respecto al vector $(3,4)$.

Solución.

$$f'((1,1);(3,4)) = -11.$$

$\square$

22. Consideremos las funciones $f, h \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si se cumple que

$$f(x + y + h(x,y), x^2 + y^2 + h^2(x,y)) = 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinar las derivadas parciales de h para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ en función de las derivadas parciales de f.

23.* Las funciones $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifican

$$x^2 g(x,y) + y(f^2(x,y) - g^2(x,y)) = 1 \tag{1}$$

$$x^2 f(x,y) - xg(x,y) + y = 0. \tag{2}$$

Suponiendo que f y g tienen derivadas parciales, determinar las derivadas parciales de f y g en (1,0).

Solución. Derivamos ambas ecuaciones con respecto a x

$$2xg + x^2 D_1 g + 2y(f D_1 f - g D_1 g) = 0 \qquad \text{y}$$
$$2xf + x^2 D_1 f - g - x D_1 g = 0,$$

para $(x, y) = (1, 0)$, de (1) y (2) se tiene que $f(1, 0) = 1$ y $g(1, 0) = 1$, entonces se tiene el sistema

$$2 + D_1 g(1, 0) = 0$$
$$2 + D_1 f(1, 0) - 1 - D_1 g(1, 0) = 0,$$

de aquí $D_1 g(1, 0) = -2$ y $D_1 f(1, 0) = -3$.

De manera similar, derivamos (1) y (2) con respecto a y

$$x^2 D_2 g + f^2 - g^2 + 2yf D_2 f - 2yg D_2 g = 0$$
$$x^2 D_2 f - x D_2 g + 1 = 0,$$

para $(x, y) = (1, 0)$ se tiene el sistema

$$D_2 g(1, 0) = 0$$
$$D_2 f(1, 0) - D_2 g(1, 0) + 1 = 0,$$

de aquí $D_2 g(1, 0) = 0$ y $D_2 f(1, 0) = -1$. □

Ejercicios clase CP: 2, 3, 5, 7, 11, 12, 15, 18, 20, 21, 23.