1.* Clasifique los puntos críticos de la función

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 - 12x_1 - 26x_2 + 50. \end{aligned}$$

Solución. Las derivadas parciales del campo escalar C son

$$D_1C(x) = 6x_1 + 2x_2 - 12 \qquad \text{y} \qquad D_2C(x) = 8x_2 + 2x_1 - 26$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Ahora, para encontrar los puntos críticos del campo escalar debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 12 \\ 8x_2 + 2x_1 = 26, \end{cases}$$

que es equivalente a $\nabla C(x) = 0$. La solución del sistema anterior es $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$. Para determinar si el punto crítico $(1,3)$ es un mínimo o un máximo debemos hallar la Hessiana. Así,

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^2$. La matriz Hessiana es constante y

$$\begin{aligned} H_f(x)_2 = 48 - 4 = 44 > 0 \\ H_f(x)_1 = 6 > 0. \end{aligned}$$

Como los dos menores de la matriz Hessiana son siempre positivos, por el criterio de Sylvester, se deduce que f alcanza su mínimo en $(1,3)$ y este mínimo es

$$f(1,3) = 3 + 2(3) + 4(9) - 12 - 26(3) + 50 = 5.$$

□

2.* Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 4 + x^3 + y^3 - 3xy, \end{aligned}$$

clasificar sus puntos críticos.

Solución. Notemos que f es derivable para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, con gradiente

$$\nabla(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x),$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, además, sus dos primeras derivadas parciales $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto f es diferenciable con continuidad en todo $\mathbb{R}^2$.

Encontremos los puntos críticos de f, para obtenerlos igualemos el gradiente a cero, es decir

$$\nabla f(x,y) = (0,0).$$

A partir de lo cual se obtiene el siguiente sistema

$$3x^2 - 3y = 0,$$

$$3y^2 - 3x = 0.$$

Resolviendo el sistema anterior se tienen los puntos críticos de f

$$a_1 = (0,0), \qquad y \qquad a_2 = (1,1).$$

La matriz hessiana de f está dada por

$$H_f(x,y) = (J_{\nabla f}(x,y))^T = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}.$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Ahora, si analizamos la matriz hessiana de f en a_1, obtenemos

$$H_f(a_1) = (J_{\nabla f}(a_1))^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},$$

dado que los valores propios son 3 y -3, se concluye que a_1 es un punto de ensilladura de f.

b) Y si analizamos la matriz hessiana de f en a_2, obtenemos

$$H_f(a_2) = (J_{\nabla f}(a_2)^T = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$$

dado que los determinantes de los menores principales son positivos, se concluye que f en a_2 alcanza un mínimo relativo con valor igual a 3.

Finalmente, se concluye que en $a_1 = (0,0)$ hay un punto de ensilladura y que en $a_2 = (1,1)$ f alcanza un mínimo relativo con valor igual a 3. □

3. Se conoce que el campo escalar

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (w,x,y,z) \longmapsto \frac{4y^3 + 2w^2 - y^2 - w^3}{1 + x^2 + 2z^2} \end{aligned}$$

tiene dos puntos críticos

$$a = \left(\frac{4}{3}, 0, 0, 0\right) \qquad \text{y} \qquad b = \left(0, 0, \frac{1}{6}, 0\right).$$

Además, se conoce que

$$H_f(w,0,y,0) = \begin{pmatrix} 4-6w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2w^3 - 4w^2 - 8y^3 + 2y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24y - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4w^3 - 8w^2 - 16y^3 + 4y^2 \end{pmatrix}$$

para cada $w, y \in \mathbb{R}$. Determine la naturaleza de los puntos críticos.

Solución. Por las hipótesis, se tiene que

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{64}{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{128}{27} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad H_f(b) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{27} \end{pmatrix}.$$

Por Álgebra Lineal sabemos directamente que

$$-4, \qquad -\frac{64}{27}, \qquad -2 \qquad \text{y} \qquad -\frac{128}{27}$$

son los 4 valores propios de $H_f(a)$; luego, por el criterio de los valores propios, $H_f(a)$ es definida negativa, de donde f alcanza un máximo relativo en a. De igual forma,

$$4, \qquad \frac{1}{54}, \qquad 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{27}$$

son los 4 valores propios de $H_f(b)$; luego, por el criterio de los valores propios, $H_f(b)$ es definida positiva, de donde f alcanza un mínimo relativo en b. Por lo tanto,

$$f(a) = \frac{32}{27} \qquad \text{y} \qquad f(b) = -\frac{1}{108}$$

son un máximo y un mínimo local, respectivamente. □

4.* Dada la función

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto -x^2 - 2y^2 - z^3 + xy + 75z + 16x + 27y + 120 \end{aligned}$$

Determine sus puntos críticos y su naturaleza

Solución. Se encuentran los puntos críticos de u, para ello debe cumplirse que $\nabla u(x, y, z) = 0$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} D_1 u(x, y, z) &= -2x + y + 16 = 0 \\ D_2 u(x, y, z) &= -4y + x + 27 = 0 \\ D_3 u(x, y, z) &= -3z^2 + 75 = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene dos puntos críticos $(13, 10, 5)$ y $(13, 10, -5)$, para determinar si es un máximo o mínimo aplicamos el criterio de Sylvester. Entonces la matriz Hessiana de u estará dada por

$$H_u(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6z \end{pmatrix}$$

En $(x, y, z) = (13, 10, 5)$,

$$H_u(13, 10, 5) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene que sus determinantes menores son

$$\begin{aligned} H_1(13, 10, 5) &= -2 \\ H_2(13, 10, 5) &= 7 \\ H_3(13, 10, 5) &= -210, \end{aligned}$$

la matriz Hessiana se define negativa, por lo que en el punto $(x, y, z) = (13, 10, 5)$ hay un máximo.

Mientras que en $(x, y, z) = (13, 10, -5)$,

$$H_u(13, 10, -5) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene que sus determinantes menores son

$$\begin{aligned} H_1(13, 10, 5) &= -2 \\ H_2(13, 10, 5) &= 7 \\ H_3(13, 10, 5) &= 210, \end{aligned}$$

por lo que la naturaleza de este punto es un punto silla; es decir, no es ni máximo ni mínimo. □

5.* Dada la función

$$\begin{aligned} f\colon \quad I \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2} \end{aligned}$$

con $I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0 \wedge y\neq 0\}$ determinar la naturaleza de sus puntos críticos.

Solución. Primero se buscan los puntos críticos, estos son los puntos en donde el gradiente es cero

$$\nabla f(x,y)=\left(2x-\frac{2}{x^3y^2}, 2y-\frac{2}{x^2y^3}\right).$$

Las soluciones del sistema

$$2x-\frac{2}{x^3y^2}=0$$

$$2y-\frac{2}{x^2y^3}=0$$

son $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$. Para determinar si estos puntos son máximos, mínimos o puntos de silla, se analiza la matriz hesiana

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2+\dfrac{6}{x^4y^2} & \dfrac{4}{x^3y^3} \\ \dfrac{4}{x^3y^3} & 2+\dfrac{6}{x^2y^4} \end{pmatrix}$$

Se verifica que $H_f(a,b)_2>0$ y $H_f(a,b)_1>0$ donde (a,b) es cualquiera de los puntos críticos. Entonces en cada punto crítico hay un mínimo y $f(a,b)=3$ para todos los puntos críticos. □

6. Dada la función

$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \quad &\longmapsto 655x+468y+\frac{xy}{30}-\frac{x^2}{40}-\frac{y^2}{80} \end{aligned}$$

determinar sus puntos críticos y naturaleza.

Solución. Para optimizar la función, calculamos primero su gradiente y obtenemos

$$\nabla u(x,y)=\left(655+\frac{y}{30}-\frac{x}{20}, 468+\frac{x}{30}-\frac{y}{40}\right)$$

Se calcula los puntos para los cuales $\nabla u(x,y)=(0,0)$ y se determina que su punto crítico es $a=(230220,325680)$. Para determinar su naturaleza, calculamos la matriz hessiana

$$H_u(x,y)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{30} & -\frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

Se verifica que para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$

$$Hu(a)_1=-\frac{1}{20}<0 \qquad \text{y} \qquad Hu(a)_2=\frac{1}{800}-\frac{1}{900}>0,$$

se concluye que la función u tiene un valor máximo relativo en el punto $a=(230220,325680)$. □

7.* Una empresa de Quito produce principalmente arroz y café. Imagine que es contratado para determinar la cantidad que debe producirse de cada uno para que el costo de producción sea lo menor posible. Empíricamente se conoce que los costos de producción del arroz y café están dados respectivamente por

$$3x^2-12x+15 \qquad \text{y} \qquad 2y^2-13y+5$$

donde x y y representan la cantidad en toneladas de arroz y café producidos. Por otro lado, por la época de sequía, la producción de café es el doble de costosa que lo normal. Finalmente, el costo del transporte de ambos productos está dada por

$$25 + 2xy$$

donde x y y representan la cantidad en toneladas de arroz y café producidos, respectivamente. Determine la cantidad de arroz y café que debe producir la empresa para que el costo sea mínimo.

Solución. Se utilizará la siguiente notación

- x : cantidad producida de toneladas de arroz
- y : cantidad producida de toneladas de café
- $C(x, y)$: costo de producción.

Se sabe que el costo de producción resulta de la suma del costo de producción de arroz, costo de producción de café y costo de transporte. Además, durante el mes en análisis, el costo de producción del café es el doble de lo normal, entonces el costo de producción total viene dado por

$$\begin{aligned} C\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (3x^2 - 12x + 15) + 2(2y^2 - 13y + 5) + (25 + 2xy) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 - 12x - 26y + 50. \end{aligned}$$

Es importante tomar en cuenta que como no existe producción negativa se debe considerar el dominio de C a $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

La función C es la que se quiere optimizar, encontrar el mínimo en este caso. De acuerdo al ejercicio 1, la producción de arroz y café, para que el costo de producción sea mínimo, debe ser 1 y 3 toneladas respectivamente. □

8.* Una fábrica produce dispositivos de dos tipos, A y B, cuyos precios por unidad son 700 y 500 dólares, respectivamente. El costo de producir x dispositivos tipo A y y dispositivos tipo B está dado por la siguiente función

$$\begin{aligned} C\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 45x + 32y - \frac{xy}{30} + \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{80}. \end{aligned}$$

Determine los valores de x y y para que la utilidad sea máxima.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- x : cantidad de objetos A producidos,
- y : cantidad de objetos B producidos,
- $U(x, y)$: Utilidad, en dólares, al vender x dispositivos tipo A y y dispositivos tipo B,
- $V(x, y)$: ingreso, en dólares, producido al vender x dispositivos tipo A y y dispositivos tipo B,
- $C(x, y)$: costo de producción, en dólares, de x dispositivos tipo A y y dispositivos tipo B.

Se sabe que la utilidad es la diferencia entre el ingreso y el costo de producción. El ingreso viene dado por

$$\begin{aligned} V\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 700x + 500y, \end{aligned}$$

por tanto la función a maximizar es

$$\begin{aligned} U\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 655x + 468y + \frac{xy}{30} - \frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{40}. \end{aligned}$$

Del ejercicio 6 se sabe que si se producen 230220 dispositivos de tipo A y 25680 dispositivos de tipo B, la utilidad será máxima. □

9.* Dado los campos escalares

$$d\colon \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2+y^2+z^2 \end{array} \quad \text{y} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & z-\dfrac{1}{xy} \end{array}$$

con $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$. Resolver el problema

$$\begin{cases} \text{Opt. } d(x,y,z) \\ \text{sujeto a:} \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Solución. Para resolver el problema, se define la función $L\colon \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}$

$$L(\lambda,x,y,z) = d(x,y,z) - \lambda(g(x,y,z)-0) = x^2+y^2+z^2-\lambda\left(z-\frac{1}{xy}\right)$$

cuyo gradiente es

$$\nabla L(\lambda,x,y,z) = \left(-z+\frac{1}{xy}, 2x-\frac{\lambda}{x^2y}, 2y-\frac{\lambda}{xy^2}, 2z-\lambda\right)$$

para $(\lambda,x,y,z) \in \mathbb{R}\times\Omega$. Los puntos en los que $\nabla L(\lambda,x,y,z) = 0$, es decir, los puntos críticos de L son:

$$\begin{aligned} a_1 &= (2,1,1,1), \\ a_2 &= (2,-1,-1,1), \\ a_3 &= (-2,1,-1,-1) \qquad \text{y} \\ a_4 &= (-2,-1,1,-1). \end{aligned}$$

Para determinar la naturaleza de los puntos críticos, se calcula la matriz hesiana

$$H_L(\lambda,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{x^2y} & -\dfrac{1}{xy^2} & -1 \\ -\dfrac{1}{x^2y} & 2+\dfrac{2\lambda}{x^3y} & \dfrac{\lambda}{x^2y^2} & 0 \\ -\dfrac{1}{xy^2} & \dfrac{\lambda}{x^2y^2} & 2+\dfrac{2\lambda}{xy^3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Con esto se tiene

$$H_L(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H_L(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$H_L(a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$H_L(a_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado se tiene que $n = 3$ y $m = 1$ entonces se calcula para cada punto crítico $(-1)^m H_{2m+1}$ y $(-1)^m H_{m+n}$, entonces

$$\begin{aligned} -H_{L_3}(a_1) &= 8 \quad \text{y} \quad -H_{L_4}(a_1) = 48, \\ -H_{L_3}(a_2) &= 8 \quad \text{y} \quad -H_{L_4}(a_2) = 48, \\ -H_{L_3}(a_3) &= 8 \quad \text{y} \quad -H_{L_4}(a_3) = 48, \\ -H_{L_3}(a_4) &= 8 \quad \text{y} \quad -H_{L_4}(a_4) = 48. \end{aligned}$$

Se puede notar que, para todos los puntos críticos, la secuencia de determinantes consta solamente de números positivos, entonces d tiene un mínimo, con un valor de 3, en todos los puntos críticos. □

10.* Dado $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1 \wedge x = 2y\}$, encuentre los extremos relativos del campo escalar

$$\begin{aligned} f\colon \quad \Omega \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x^2 - xy + xyz^2. \end{aligned}$$

Solución. Dado que el $\mathrm{dom}(f) \neq \mathbb{R}^3$, debemos utilizar multiplicadores de Lagrange para determinar los extremos relativos de f. Definamos

$$\begin{aligned} L\colon \quad \mathbb{R}^2 \times \Omega \quad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda_1, \lambda_2 x, y, z) &\longmapsto f(x,y,z) - \lambda_1(x + y - z - 1) - \lambda_2(x - 2y). \end{aligned}$$

Por definición de gradiente y hessiana, se tiene que para todo $(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \Omega$,

$$\nabla L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = (1 + z - x - y, 2y - x, 2x + y(z^2 - 1) - \lambda_1 - \lambda_2, x(z^2 - 1) - \lambda_1 + 2\lambda_2, 2xyz + \lambda_1)$$

y

$$H_L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & z^2 - 1 & 2yz \\ -1 & 2 & z^2 - 1 & 0 & 2xz \\ 1 & 0 & 2yz & 2xz & 2xy \end{pmatrix}.$$

Se puede ver que el único punto tal que $\nabla L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) = 0$ es $a = (0, 0, 0, 0, -1)$.

Se tiene que

$$H_L(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $m = 2$ y $n = 3$, se analiza $(-1)^2 H_L(a)_5$.

Se tiene que

$$H_L(a)_5 = 8,$$

entonces f alcanza un mínimo relativo en $(0, 0, -1)$.

□

11. Dado los campos escalares

$$m\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 6x - y^2 + xz + 60 \end{array} \quad \text{y} \quad p\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 + y^2 + z^2 \end{array}$$

Hallar los mínimos de

$$\begin{cases} \text{Opt. } m(x,y,z) \\ \text{sujeto a:} \\ p(x,y,z) = 36. \end{cases}$$

Solución. Definimos el campo

$$h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\lambda,x,y,z,) & \longmapsto & m(x,y,z) - \lambda(p(x,y,z) - 36). \end{array}$$

Notemos que se tiene que

$$h(\lambda,x,y,z) = (6x - y^2 + xz + 60) - \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 36\right)$$

para todo $(x,y,z,\lambda) \in \mathbb{R}^4$, además, h es una función diferenciable en $\mathbb{R}^4$, con vector gradiente

$$\nabla h(\lambda,x,y,z) = \begin{pmatrix} -(x^2+y^2+z^2-36) \\ 6 + z - 2\lambda x \\ -2y - 2\lambda y \\ x - 2\lambda z \end{pmatrix}$$

Determinemos ahora, los puntos críticos de h, para esto igualamos el vector gradiente a 0, es decir, hacemos $\nabla h(\lambda,x,y,z) = 0$, obteniendo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 36 \\ 6 + z &= 2\lambda x \\ -2y &= 2\lambda y \\ x &= 2\lambda z \end{aligned}$$

Las soluciones de este sistema son: $(0,0,0,-6)$, $\left(\sqrt{3}/2, 3\sqrt{3}, 0, 3\right)$, $\left(-\sqrt{3}/2, -3\sqrt{3}, 0, 3\right)$ y $(-1,-4,\pm 4,2)$.
La matriz hessina de h viene dada por

$$H_h(\lambda,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & 0 & 1 \\ -2y & 0 & -2-2\lambda & 0 \\ -2z & 1 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

para cada $(\lambda,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$.

Analizando la naturaleza de los puntos críticos, se determina que m tiene mínimos en $(-4,\pm 4,2)$ □

12.* Dado los campos escalares

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & xy + zy, \end{array} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array} \quad \text{y} \quad h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & yz \end{array}$$

Resolver el problema

$$\begin{cases} \text{Opt. } f(x,y,z) \\ \text{sujeto a:} \\ g(x,y,z) = 2 \qquad \text{y} \\ h(x,y,z) = 2. \end{cases}$$

Solución. Para resolver el problema, se define la función $L\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$

$$L(\lambda_1,\lambda_2,x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda_1(g(x,y,z)-2) - \lambda_2(h(x,y,z)-2) = xy + zy - \lambda_1\left(x^2+y^2-2\right) - \lambda_2\left(yz-2\right)$$

cuyo gradiente es

$$\nabla L(\lambda_1,\lambda_1,x,y,z) = \begin{pmatrix} -\left(x^2+y^2-2\right) \\ -\left(yz-2\right) \\ y-2\lambda_1 x \\ x+z-2\lambda_1 y-\lambda_2 z \\ y-\lambda_2 y \end{pmatrix}^T.$$

Los puntos críticos se obtiene igualando el gradiente a 0. Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen los siguientes puntos críticos

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{1}{2},1,1,1,2\right), \\ a_2 &= \left(-\frac{1}{2},1,1,-1,-2\right), \\ a_3 &= \left(-\frac{1}{2},1,-1,1,2\right), \\ a_4 &= \left(\frac{1}{2},1,-1,-1,-2\right). \end{aligned}$$

Para determinar la naturaleza de estos puntos se calcula la matriz hesiana

$$H_L(\lambda_1,\lambda_2,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2x & -2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z & -y \\ -2x & 0 & -2\lambda_1 & 1 & 0 \\ -2y & -z & 1 & -2\lambda_1 & 1-\lambda_2 \\ 0 & -y & 0 & 1-\lambda_2 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$H_L(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_L(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_L(a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$H_L(a_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nótese que en este caso $m = 2$ y $n = 3$ entonces para cada punto crítico se busca el valor de $(-1)^m H_{2m+1}$, se tiene

$$\begin{aligned} H_{L_5}(a_1) &= -16, \\ H_{L_5}(a_2) &= 16, \\ H_{L_5}(a_3) &= 16, \\ H_{L_5}(a_4) &= -16. \end{aligned}$$

Analizando la secuencia de gradientes para cada punto crítico, se puede ver que en los puntos a_1 y a_4 se tiene un máximo de valor 3 y en los puntos a_2 y a_3 se tiene un mínimo de valor 1. $\square$

13. Dadas la funciones

$$\begin{aligned} V: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto xyz \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto 2xy + 2xz + 2zy. \end{aligned}$$

Resolver el problema

$$\begin{cases} \text{Opt. } V(x,y,z) \\ \text{sujeto a:} \\ A(x,y,z) = 21600. \end{cases}$$

14.* Se tiene una superficie de ecuación $z = \dfrac{1}{xy}$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $xy \neq 0$. Hallar los puntos de la superficie más cercanos al origen.

Solución. Se utilizará la siguiente notación

- (x,y,z) : punto sobre la superficie
- $d(x,y,z)$: distancia del punto (x,y) al origen, en unidades de longitud
- $D(x,y,z)$: cuadrado de la distancia del punto (x,y,z) al origen.

Se sabe que la distancia de un punto al origen viene definida por $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, como $d \geq 0$ entonces la distancia será mínima cuando $x^2+y^2+z^2$ sea mínimo. Finalmente se definen las funciones

$$\begin{aligned} D: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto x^2+y^2+z^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{R} &\longmapsto z - \frac{1}{xy}. \end{aligned}$$

Con esto se tiene el problema

$$\begin{cases} \text{Opt. } D(x,y,z) \\ \text{sujeto a:} \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Del ejercicio 9, se sabe que la distancia es mínima en los puntos $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$ y $(-1,1,-1)$ y será $d = \sqrt{3}$.

Otra forma de optimizar este problema se detalla en el ejercicio 5.

$\square$

15. Dado un número natural mayor que cero, dividirlo en tres sumandos de manera que su producto sea el máximo.

16.* Se desea instalar un radiotelescopio sobre la superficie de un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia, se quiere colocar el radiotelescopio donde el campo magnético del planeta sea más débil. El planeta es esférico con un radio de 36 unidades. Con base en un sistema de coordenadas cuyo origen es el centro del planeta, la fuerza del campo magnético está dada por $m(x, y, z) = 6x - y^2 + xz + 60$. ¿Dónde se debe ubicar el radiotelescopio?

Solución. Se usará la siguiente notación

- (x, y, z) : punto sobre la superficie del planeta,
- $m(x, y, z)$: fuerza del campo magnético, unidades de fuerza.

Se quiere encontrar el punto donde la fuerza ejercida por el campo magnético sea mínima. Además los puntos donde se quiere medir este campo está sobre la superficie del planeta, entonces se definen la funciones

$$\begin{array}{rccl} m\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & 6x - y^2 + xz + 60 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccl} p\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2 + y^2 + z^2. \end{array}$$

Se quiere optimizar

$$\begin{cases} \text{Opt. } m(x,y,z) \\ \text{sujeto a:} \\ p(x,y,z) = 36. \end{cases}$$

En base al ejercicio 11, los puntos donde la intensidad del campo magnético es mínima, donde se debería instalar el radiotelescopio, son $(-4, 4, 2)$ y $(-4, -4, 2)$.

□

17. La temperatura en un punto (x, y, z) del espacio tridimensional está dada por la función

$$\begin{array}{rccl} T\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & xy + zy. \end{array}$$

Determinar los puntos donde la temperatura es máxima y mínima, sobre la intersección de las superficies de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ y $yz = 2$.

Solución. Se utiliza la siguiente notación

- (x, y, z) : punto del espacio $\mathbb{R}^3$ que pertenece a las superficies de ecuación $x^2 + y^2 = 2$ y $yz = 2$,
- $t(x, y, z)$: temperatura en el punto (x, y, z), en unidades de temperatura.

Se definen las funciones

$$\begin{array}{rccl} t\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & xy + zy \end{array} \quad \begin{array}{rccl} g\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccl} h\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & yz. \end{array}$$

Se quieren encontrar los puntos donde la temperatura es máxima y mínima, entonces se resolverá el siguiente problema de optimización

$$\begin{cases} \text{Opt. } t(x,y,z) \\ \text{sujeto a:} \\ g(x,y,z) = 2 \qquad \text{y} \\ h(x,y,z) = 2. \end{cases}$$

Del ejercicio 12, se tiene que en los puntos $(1, 1, 2)$ y $(-1, -1, -2)$ la temperatura es máxima e igual a 3, mientras que en los puntos $(1, -1, -2)$ y $(-1, 1, 2)$ la temperatura es mínima e igual a 1. □

18.* Se desea construir una cisterna hermética, en forma de un paralelepípedo regular de área 21600 m^2, de tal forma que su el volumen sea máximo. Encontrar las dimensiones que debe tener la cisterna.

Solución. Primero utilizaremos las siguientes notaciones:

- x: ancho de la cisterna en metros,
- y: largo de la cisterna en metros,
- z: altura de la cisterna en metros,
- $V(x,y,z)$: volumen de la cisterna en metros cúbicos,
- $A(x,y,z)$: área de la cisterna en metros cuadrados.

Nótese que se quiere encontrar el valos máximo de V sabiendo que tiene una limitación (restricción), el área. Por otro lado, sabemos que las dimensiones de la cisterna serán reales positivos. Se definen las funciones

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto xyz \end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto 2xy + 2xz + 2zy. \end{aligned}$$

Se quiere resolver el problema

$$\begin{cases} \text{máx}\, V(x,y,z) \\ \quad \text{sujeto a:} \\ A(x,y,z) = 21600. \end{cases}$$

En base al ejercicio 13, se tiene que las dimensiones de la cisterna, para que el volumen de ésta sea máximo, son $(60,60,60)$. Nótese que el punto crítico $(-60,-60,-60)$ no es considerado ya que no son parte del dominio de V en este problema. $\square$

19. La temperatura en cualquier punto de coordenadas (x,y,z) ubicado en la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ viene dada por $T(x,y,z) = 20 + 2x + 2y + z^2$. Determinar las temperaturas extremas sobre la curva de intersección de la esfera con el plano P de ecuación $x + y + z = 3$.

20. En $\mathbb{R}^3$, hallar el punto del plano P de ecuación $2x - 2y + z = 4$, que está más próximo al origen de coordenadas.

21. Se tiene material para elaborar 150π cm^2 de láminas de aluminio. Si se desea construir un recipiente cilíndrico, determinar sus dimensiones para que su volumen sea máximo.

Solución. Primero, utilizaremos las siguientes notaciones:

- r: radio del cilindro en cm.
- h: altura del cilindro en cm.
- $V(r,h)$: volumen del cilindro de radio r y altura h, en cm^3.
- $A(r,h)$: material utilizado en un cilindro de radio r y altura h, en cm^2.

Con esto, se tiene que

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,h) &\longmapsto V(r,h) = \pi r^2 h \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,h) &\longmapsto A(r,h) = 2\pi rh + 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Con esto, debemos optimizar

$$\begin{cases} \text{máx}\, V(r,h) \\ \text{sujeto a:} \\ \quad A(r,h) = 150\pi. \end{cases}$$

Luego del proceso de optimización, se tiene que las dimensiones para que el volumen sea máximo son 5 cm de radio y 10 cm de altura. $\square$

Ejercicios clase CP: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18.