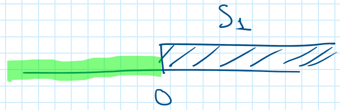
Exercises for Section 2.3

Recorte de pantalla realizado: 28/5/2023 14:21

1. Let $S_1 := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Show in detail that the set S_1 has lower bounds, but no upper bounds. Show that $\inf S_1 = 0$.

Recorte de pantalla realizado: 28/5/2023 14:21



1) S_1 tiene cotas inferiores

Sea $w \leq 0$ notemos que

$w \leq x$ para todo $x \in S_1$

Luego, S_1 tiene cotas inferiores

2) S_1 no tiene cotas superiores

Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que $u \in \mathbb{R}$ es una cota superior de S_1 esto es:

$x \leq u$ para todo $x \in S_1$.

Tomando $x = u + 1$, se tiene $x \in S_1$ ya que $u \geq 0$, luego,

$u + 1 \leq u$

Lo que es un absurdo, por tanto, se concluye que S1 no tiene cotas superiores.

3) $\inf(S_1) = 0$.

Hay que mostrar que:

a) 0 es cota inferior de S_1

b) 0 es la mayor cota inferior de S_1 (Si w es c.i. de S_1, $w \leq 0$).

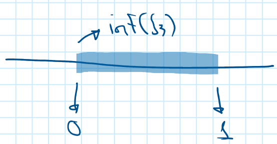
Notemos que por la primera parte, 0 es una cota inferior de S1.

Además, si w es otra cota inferior de S_1, entonces $w \leq 0$

Por tanto, se concluye que $\inf(S_1) = 0$.

3. Let $S_3 = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Show that $\sup S_3 = 1$ and $\inf S_3 \geq 0$. (It will follow from the Archimedean Property in Section 2.4 that $\inf S_3 = 0$.)

Recorte de pantalla realizado: 28/5/2023 14:31



Sea $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$n \geq 1 \iff \frac{1}{n} \leq 1$

Luego, 1 es una cota superior de S_3.

Tomando $n = 1$, tenemos que $\frac{1}{1} = 1$, luego, $\max\{S_3\} \in S_3$.

Por tanto, $\sup(S_3) = 1$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$n > 0 \iff \frac{1}{n} > 0$

Luego, 0 es una cota inferior de S_3.

De donde

$$\inf(S_3) \geq 0$$

5. Let S be a nonempty subset of $\mathbb{R}$ that is bounded below. Prove that $\inf S = -\sup\{-s : s \in S\}$.

Recorte de pantalla realizado: 28/5/2023 14:37

Sea $T = \{-s : s \in S\}$, por demostrar que $\inf(S) = -\sup(T)$ ⚠ $T = -S$.

Ya que S tiene ínfimo, tenemos que:

$$\inf(S) \leq s \quad \text{para todo } s \in S.$$

Entonces

$$-s \leq -\inf(S) \quad \text{para todo } s \in S.$$

Esto es $-\inf(S)$ es una cota superior de $\{-s : s \in S\}$.

Esto implica que $\{-s : s \in S\}$ es acotado y por tanto, posee supremo.

Entonces

$$\sup\{-s : s \in S\} \leq -\inf(S). \quad (1)$$

Ya que $\{-s : s \in S\}$ posee supremo, tenemos que

$$-s \leq \sup\{-s : s \in S\} \quad \text{para todo } s \in S.$$

Entonces,

$$-\sup\{-s : s \in S\} \leq s \quad \text{para todo } s \in S.$$

Esto es $-\sup\{-s : s \in S\}$ es una c.i. de S, luego,

$$-\sup\{-s : s \in S\} \leq \inf(S)$$

luego,

$$-\inf(S) \leq \sup\{-s : s \in S\} \quad (2)$$

De (1) y (2)

$$\sup\{-s : s \in S\} = -\inf(S).$$

7. Let $S \subseteq \mathbb{R}$ be nonempty. Show that $u \in \mathbb{R}$ is an upper bound of S if and only if the conditions $t \in \mathbb{R}$ and $t > u$ imply that $t \notin S$.

q p

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$$
$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Recorte de pantalla realizado: 28/5/2023 14:46

a) Razonamos por reducción al absurdo.

Suponemos que $u \in \mathbb{R}$ con u c.s. de S, $t \in \mathbb{R}$, $t > u$ y que $t \in S$.

Notemos que:

$$u < t \quad \text{con } t \in S.$$

Lo que contradice que u es una c.s. de S.

Por tanto, $u \in \mathbb{R}$ con u c.s. de S implica que $t \in \mathbb{R}$ y $t > u$ implica que $t \notin S$.

b) Razonamos por reducción al absurdo.

Suponemos que $t \in \mathbb{R}$ y $t > u$ implican que $t \notin S$ (1)

y que u no es cota superior de S.

Ya que u no es cota superior de S, existe $s \in S$ tal que $u < s$.

Ya que $S \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in S$, entonces $s \in \mathbb{R}$

Ya que u no es cota superior de S, existe $s \in S$ tal que $u < s$.

Ya que $S \subseteq \mathbb{R}$ y $s \in S$, entonces $s \in \mathbb{R}$

Luego, $s \in \mathbb{R}$ y $s > u$ y $s \in S$. (2)

De (1) y (2) se tiene una contradicción.

Por tanto, si $t \in \mathbb{R}$ y $t > u$ implica que $t \notin S$, entonces u es c.s. de S.

Por a) y b) se muestra el enunciado.

9. Show that if A and B are bounded subsets of $\mathbb{R}$, then $A \cup B$ is a bounded set. Show that $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.

Recorte de pantalla realizado: 28/5/2023 15:11

Sea $u = \sup A$, $v = \sup B$ y que $w = \sup\{u, v\}$

Por tanto, se tiene que:

$$x \le u \le w \quad \text{para todo } x \in A$$

y que

$$x \le v \le w \quad \text{para todo } x \in B$$

Luego, w es c.s. de $A \cup B$.

Sea z una c.s. de $A \cup B$ entonces

⚠ $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ $x \le w$ ↓ c.s. $A \cup B$.

$$u \le z \quad \text{y} \quad v \le z$$

Luego,

$$w = \sup\{u, v\} \le z$$

Por tanto, $w = \sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$.

11. Let $S \subseteq \mathbb{R}$ and suppose that $s^* := \sup S$ belongs to S. If $u \notin S$, show that $\sup(S \cup \{u\}) = \sup\{s^*, u\}$.

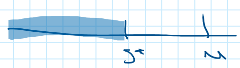
Recorte de pantalla realizado: 28/5/2023 15:24

$A = S$ $\quad \sup A = s^*$

$B = \{u\}$ $\quad \sup B = u$

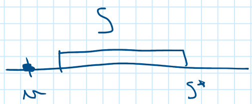
$\sup(A \cup B) = \sup\{s^*, u\}$.

a)



a) Supongamos que $s^* \le u$, entonces:

$$\sup(S \cup \{u\}) = \sup\{s^*, u\} = u.$$



b) Supongamos que $u \le s^*$

Existe $s \in S$ tal que

$$u < s \le s^*,$$ s^* cota superior de $S \cup \{u\}$.

Luego, $\sup(S \cup \{u\}) = s^*$