1. MATRICES

1.2 Operaciones con matrices

DEFINICIÓN 11: Traza de una matriz

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. La traza de una matriz A es un escalar que notaremos como $\operatorname{Tr}(A)$ tal que:

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

TEOREMA 8

Sea $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se tiene que:

- $\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr}(A)$;
- $\operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr}(A) + \operatorname{Tr}(B)$;
- $\operatorname{Tr}(A^\intercal) = \operatorname{Tr}(A)$; y
- $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

1.3 Tipos de matrices

DEFINICIÓN 12: Matriz diagonal

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que A es una matriz diagonal si verifica que:

$$a_{ij} = 0$$

para todo $i \in J$ y $j \in J$ con $i \neq j$.

DEFINICIÓN 13: Matriz escalar

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que A es una matriz escalar si es una matriz diagonal que verifica:

$$a_{ii} = \alpha$$

para todo $i \in J$, con $\alpha \in \mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 14: Matriz simétrica

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es simétrica si $A^\intercal = A$.

DEFINICIÓN 15: Matriz antisimétrica

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es antisimétrica si $A^\intercal = -A$.

DEFINICIÓN 16: Matriz triangular

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es

- una matriz triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ con $i, j \in J$; y
- una matriz triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$ con $i, j \in J$.

DEFINICIÓN 17: Matriz nilpotente

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $r \in \mathbb{N}$. Se dice que A es nilpotente de orden r si r es el menor entero positivo tal que

$$A^r = 0.$$

DEFINICIÓN 18: Matriz idempotente

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es una matriz idempotente si $A^2 = A$.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES

DEFINICIÓN 1: Sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones lineales en las cuales figuran n incógnitas a las que notaremos por: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Así, dados $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in I$ y $j \in J$, fijos, un sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \end{aligned}$$

$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.$$

2.1 Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales

DEFINICIÓN 2: Matriz aumentada

Dado un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones lineales en las cuales figuran n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in I$ y $j \in J$. A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se la llama matriz de coeficientes del sistema y a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se las llama columnas de constantes y de incógnitas, respectivamente.

Bajo estas definiciones, dado un sistema de ecuaciones lineales, se dice que

$$Ax = b$$

es la representación matricial del sistema de ecuaciones.

DEFINICIÓN 3: Matriz ampliada

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m\times p}$, se define la matriz ampliada de A y B al elemento de $\mathbb{K}^{m\times(n+p)}$ dado por:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{array}\right)$$

y se la denota por $(A|B)$.

DEFINICIÓN 4

Dado el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^{m\times 1}$, se dice que

$$(A|b)$$

es la matriz ampliada asociada al sistema.

DEFINICIÓN 5: Matriz escalonada reducida por filas

Se dice que una matriz está en forma escalonada reducida por filas cuando satisface las siguientes propiedades:

1. Todas las filas que constan de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.

2. La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha, es un 1. Esta entrada se denomina entrada principal o uno principal de su fila.

3. Para cada fila que no consta sólo de ceros, el uno principal aparece a la derecha y abajo de cualquier uno principal en las filas que le preceden.

4. Si una columna contiene un uno principal, el resto de las entradas de dicha columna son iguales a cero.

Se dice que una matriz está en forma escalonada por filas si satisface las primeras tres propiedades .

DEFINICIÓN 6: Operaciones elementales de fila

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, una operación elemental por filas sobre A es una de las siguientes:

- **Intercambio de filas:** dados $i, j \in I$, intercambiar la fila i por la fila j, denotado por
$$F_i \leftrightarrow F_j,$$
es reemplazar la fila
$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$
por la fila
$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$
y viceversa.

- **Multiplicar una fila por un escalar:** dados $i \in I$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, con $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$, multiplicar la fila i por α, denotado por
$$\alpha F_i \to F_i,$$
es reemplazar la fila
$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$
por
$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \end{pmatrix}.$$

- **Sumar un múltiplo de una fila con otra:** dados $i, j \in I$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, multiplicar la fila i por α y sumarlo a la fila j, denotado por
$$\alpha F_i + F_j \to F_j,$$
es reemplazar la fila
$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$
por
$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} + a_{j1} & \alpha a_{i2} + a_{j2} & \dots & \alpha a_{in} + a_{jn} \end{pmatrix}.$$

TEOREMA 1

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, a cada operación elemental de filas e, le corresponde una operación elemental de filas e^{-1}, del mismo tipo de e, tal que, $e(e^{-1}(A)) = e^{-1}(e(A)) = A$.

A la operación elemental e^{-1} se le llama operación elemental inversa de e.

DEFINICIÓN 7: Matriz elemental

Dada una operación elemental por fila, se llama matriz elemental correspondiente a la operación al resultado de aplicar dicha operación a la matriz identidad.

TEOREMA 2

Sean $E \in \mathbb{K}^{m\times m}$ una matriz elemental y $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, el resultado aplicar la operación por filas correspondiente a E a la matriz A es EA.

DEFINICIÓN 8: Equivalente por filas

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$, se dice que la matriz A es equivalente por filas a una matriz B, denotado por $A \sim B$, si B se puede obtener al aplicar a la matriz A una sucesión de operaciones elementales por fila.

Si A es equivalente por filas a B, entonces es B equivalente por filas a A.

TEOREMA 3

Toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida por filas.

TEOREMA 4

Toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada reducida por filas.

El proceso para obtener una matriz escalonada reducida por filas a partir de una matriz cualquiera se conoce como eliminación de Gauss-Jordan.

Eliminación de Gauss - Jordan

Dada la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i, p \in I$ y $j, q \in J$.

1. Determine la primera columna q (de izquierda a derecha) tal que no todas sus entradas sean cero. Esta es la columna pivote.
2. Identificar la primera entrada p (de arriba hacia abajo) distinta de cero en la columna pivote. Este elemento es el pivote.
3. Intercambiar, en caso necesario, la primera fila por aquella fila donde aparece el pivote, de modo que éste se encuentre ahora en la primera fila y $p = 1$. Llamaremos a la matriz resultante $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
4. El pivote es el elemento en la posición p, q.
5. Si $b_{pq} \neq 1$, dividir B_p para b_{pq}. Llamaremos a la matriz resultante $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
6. Realizar operaciones de fila $\alpha_j F_p + F_j \to F_j$ para todo $j \in I$, $j > p$ para que las entradas debajo de la posición pivote sean cero.
7. Considerar la matriz $D \in \mathbb{K}^{(m-p)\times n}$ obtenida al omitir la fila p. Repetir los pasos 1 al 6 con la matriz D.

DEFINICIÓN 9

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ la matriz escalonada por filas equivalente a A. El rango de A, denotado por $\operatorname{rang}(A)$, es el número de filas no nulas que tiene la matriz B.

PROPOSICIÓN 5. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Se tiene que si $A \sim B$, entonces

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B).$$

PROPOSICIÓN 6. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Se tiene que si A es una matriz escalonada, entonces $\operatorname{rang}(A)$ es el número de filas no nulas que tiene A.