3. ESPACIOS VECTORIALES

3.1 Definición y propiedades

DEFINICIÓN 1: Espacio Vectorial

Dados un campo $\mathbb{K}$, un conjunto no vacío E y dos operaciones

$$\begin{aligned} \oplus\colon E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x \oplus y, \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} \odot\colon \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha \odot x \end{aligned}$$

llamadas suma y producto, respectivamente; se dice que $(E, \oplus, \odot, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial si cumplen las siguientes propiedades

1. **asociativa de la suma:** para todo $x, y, z \in E$ se tiene que
$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z);$$
2. **conmutativa de la suma:** para todo $x, y \in E$ se tiene que
$$x \oplus y = y \oplus x;$$
3. **elemento neutro de la suma:** existe un elemento de E, denotado por 0_E o simplemente 0, tal que para todo $x \in E$ se tiene que
$$x \oplus 0 = 0 \oplus x = x;$$
4. **inverso de la suma:** para todo $x \in E$, existe un elemento de E, denotado por $-x$, tal que
$$x \oplus (-x) = 0;$$
5. **distributiva del producto I:** para todo $x, y \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que
$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x + \alpha \odot y$$
6. **distributiva del producto II:** para todo $x \in E$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene

que

$$(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x;$$

7. **asociativa del producto:** para todo $x \in E$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$(\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x);$$

8. **elemento neutro del producto:** para todo $x \in E$ se tiene que

$$1 \odot x = x,$$

donde $1 \in \mathbb{K}$ es el elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{K}$

OBSERVACIÓN 1. Utilizamos los símbolos $\oplus$ y $\odot$ para enfatizar el hecho de que, en general, las operaciones definidas no son la suma y el producto estándar que utilizamos. Si no existe riesgo de confusión, utilizaremos la notación

$$x \oplus y = x + y \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = \alpha x$$

y diremos que el espacio vectorial es $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$, es más, en caso de que no exista ambigüedad en las operaciones utilizadas se dirá simplemente que E es un espacio vectorial.

Un error común es pensar que el elemento neutro es siempre el cero, ya que dependiendo del espacio vectorial es que se tiene un determinado elemento neutro. Por ejemplo:

- Para el espacio vectorial $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$ tenemos que su elemento neutro es justamente el 0.

- Para el espacio $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot, \mathbb{R})$ donde

$$x \oplus y = xy \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el elemento neutro es 1, esto es, $0_E = 1$. Notemos que $0 \notin \mathbb{R}^+$.

PROPOSICIÓN 1. Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales en el campo $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}^*$;

- $\mathbb{R}^{m\times n}$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- $\mathcal{F}(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} : f \text{ es una función}\}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} : f \text{ es continua en } I\}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}^k(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} : f \text{ es } k \text{ veces derivable en } I \text{ y } f^k \in \mathcal{C}^k(I)\}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_n[x]$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor igual que n en la variable x, con $n \in \mathbb{N}$;

OBSERVACIÓN 2. En cada espacio de la proposición anterior se han considerado las operaciones de suma de sus elementos usual y producto de un escalar por un elemento usual.

Para todo espacio vectorial se puede mostrar que tanto el elemento neutro como el inverso de cada elemento son únicos.

EJEMPLO 1. Para cada espacio de la proposición anterior su elemento neutro es:

- $0_{\mathbb{R}^n} = (0, 0, \ldots, 0)$.
- $0_{\mathbb{R}^{m\times n}} = 0_{m\times n}$.
- $0_{\mathcal{F}(I)} = 0_{\mathcal{C}(I)} = 0_{\mathcal{C}^k(I)} = 0_f$, donde

$$\begin{aligned} 0_f\colon I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

  con $I \subseteq \mathbb{R}$.
- $0_{\mathbb{R}_n[x]} = 0 + 0t + \cdots + 0t^{n-1} + 0t^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

TEOREMA 2

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, se tiene que para todo $u \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que

1. $0u = 0$;
2. $\alpha 0 = 0$;
3. si $\alpha u = 0$ entonces $\alpha = 0$ o $u = 0$;
4. $(-1)u = -u$.