



3. ESPACIOS VECTORIALES

3.2 Subespacios

DEFINICIÓN 2: Subespacio Vectorial

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W \subseteq E$ un conjunto no vacío de E . Si W es un espacio vectorial con respecto a las operaciones de E , entonces se dice que W es un subespacio de E .

TEOREMA 3

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de E . Entonces W es un subespacio de E si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$; u
- si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in W$, entonces $\alpha u \in W$.

OBSERVACIÓN 2. Notemos que, dados E un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $W \subseteq E$ mostrar las condiciones del teorema anterior es equivalente a mostrar que

$$\alpha u + v \in W$$

para todo $u, v \in W$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

OBSERVACIÓN 3. Dado un espacio vectorial E se tiene que $\{0_E\}$ y E son subespacios de E .

DEFINICIÓN 3: Combinación lineal

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $v_1, v_2, \dots, v_k \in E$. Se dice que un vector $v \in E$ es una combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_k$ si

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

EJEMPLO 2. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$, sean $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ donde $u = (1, 2)$, $v = (2, 4)$ y $w = (0, 0)$, se tiene que

$$u = \frac{1}{2}v + 5w, \quad (1)$$

esto implica que u es combinación lineal de v y de w donde se han utilizado los escalares $k_1 = \frac{1}{2}$ y $k_2 = 5$.

Además,

$$w = 2u - v, \quad (2)$$

entonces w es combinación lineal de u y de v donde se han utilizado los escalares $k_1 = 2$ y $k_2 = -1$.

DEFINICIÓN 4

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Al conjunto de todos los vectores en E que son combinaciones lineales de los vectores de S se lo llama cápsula de S y se denota por $\text{span}(S)$, es decir

$$\text{span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}.$$

A este conjunto también se lo conoce como *clausura lineal* y su notación viene de su nombre en inglés, *linear span*. También se utiliza la notación $\langle S \rangle$.

EJEMPLO 3. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$, sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ donde $v_1 = (1, 2)$ y $v_2 = (2, 4)$ y $w = (0, 0)$. Se define el conjunto $S = \{v_1, v_2\}$ su cápsula está dada por:

$$\text{span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \{\alpha_1(1, 2) + \alpha_2(2, 4) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Además, notemos que

$$(1, 2) = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 \in \text{span}(S) \quad \text{y} \quad (0, 0) = 2 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 \in \text{span}(S)$$

entre otros.

TEOREMA 4

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Se tiene que $\text{span}(S)$ es un subespacio vectorial de E .

Si $S = \emptyset$, definimos $\text{span}(S)$ como $\{0\}$.

3.3 Conjunto generador

DEFINICIÓN 5

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Al subespacio vectorial más pequeño que contiene a S (es decir, la intersección de todos los subespacios que contienen a S) se lo denomina espacio generado por S y se denota por $\text{gen}(S)$.

PROPOSICIÓN 5. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Se tiene que

$$\text{span}(S) = \text{gen}(S).$$

DEFINICIÓN 6

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Se dice que S genera el espacio vectorial E si cada vector en E es una combinación lineal de los elementos de S , es decir, si para todo $v \in E$, existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k.$$

PROPOSICIÓN 6. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Se tiene que S genera el espacio vectorial E si y solo si

$$E = \text{gen}(S) = \text{span}(S).$$

EJEMPLO 4. Representación gráfica de espacios generados.

1. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ dado el conjunto $S = \{u_1\} = \{(2, 3)\}$. El espacio generado por S , $\text{gen}(S) = \text{span}(S)$ se representa gráficamente como una línea en el plano.
2. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ dado el conjunto $S = \{v_1, v_2\} = \{(0, 2, 2), (0, 1, -2)\}$. El espacio generado por S , $\text{gen}(S) = \text{span}(S)$ se representa gráficamente como un plano en el espacio.

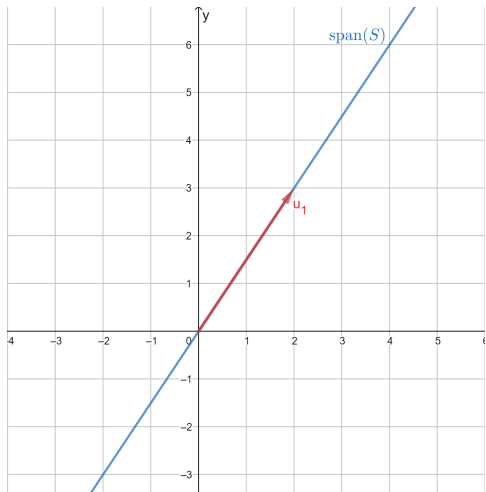


Figura 1: Espacio generado por $S = \{u_1\}$.

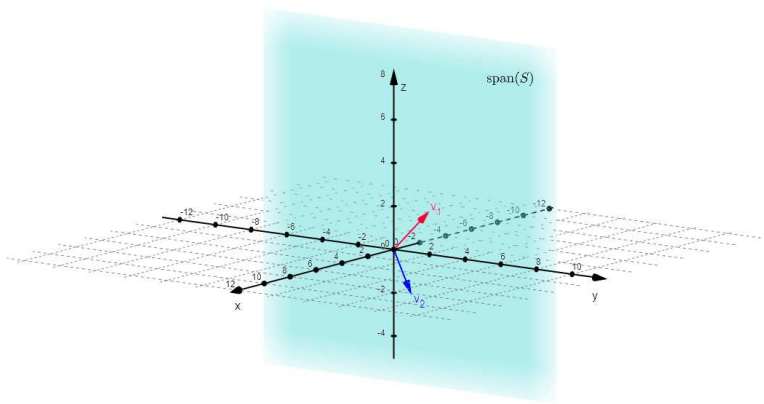


Figura 2: Espacio generado por $S = \{v_1, v_2\}$.

OBSERVACIÓN 4. Un espacio vectorial puede ser generador por distintos conjuntos. Por ejemplo, el espacio $\mathbb{R}^2$ está generado por los conjuntos $\{(1,0), (0,1)\}$, $\{(1,1), (1,-1)\}$, $\{(1,2), (2,-1), (4,3)\}$ y $\{(0,0), (1,2), (4,5), (5,7), (-3,-3)\}$, entre otros.

PROPOSICIÓN 7. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Si existe algún v_j combinación lineal de los anteriores elementos $v_1, v_2, \dots, v_{j-1}$ de S , entonces

$$\text{span}(S) = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_k\}.$$

3.4 Independencia lineal

DEFINICIÓN 7

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Se dice que S es un conjunto linealmente dependiente si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, no todos iguales a cero, tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

en caso contrario, se dice que S es un conjunto linealmente independiente.

De esta definición, se tiene que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente si y solo si

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

implica que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

EJEMPLO 5. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ donde $v_1 = (1,2)$ y $v_2 = (2,4)$. Se define el conjunto $S = \{v_1, v_2\}$. El conjunto S es linealmente dependiente.

EJEMPLO 6. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1[x]$, sean $u, v \in \mathbb{R}_1[x]$ donde $v_1(x) = 1 + 3x$ y $v_2(x) = -2 + 4x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se define el conjunto $S = \{v_1, v_2\}$. El conjunto S es linealmente independiente.

Se puede extender esta definición para conjuntos infinitos diciendo que S es linealmente independiente si todo subconjunto finito de S es linealmente independiente.

PROPOSICIÓN 8. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Si $0 \in S$, entonces S es linealmente dependiente.

PROPOSICIÓN 9. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Se tiene que S es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si alguno de los vectores $v_j \in S$ es una combinación lineal de otros elementos de S .

EJEMPLO 7. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ el conjunto $S = \{(1, 2), (2, -1), (4, 3)\}$ es linealmente dependiente.

PROPOSICIÓN 10. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y S un conjunto de E con k elementos. Si S es un conjunto linealmente independiente, entonces todo conjunto de $k + 1$ elementos de $\text{gen}(S)$ es linealmente dependiente.

EJEMPLO 8. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ el conjunto $S = \{1 - x^2, 1 + x^2\}$ es linealmente independiente, mientras que el conjunto $\{2 - 2x^2, 2 + 2x^2, 3 + x^2\}$ es linealmente dependiente.

Un error común cuando se trabaja la independencia lineal en el espacio de polinomios, por ejemplo en $\mathbb{R}_2[x]$, consiste en que si se desea mostrar que el conjunto $S = \{1 + x, 2x + x^2\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ es linealmente independiente, al formar la combinación lineal con estos elementos tomando $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ se forma la combinación lineal nula

$$\alpha_1(1 + x) + \alpha_2(2x + x^2) = (0, 0x, 0x^2).$$

Como se puede apreciar se confunde entre el neutro de $\mathbb{R}_2[x]$ con $(0, 0, 0)$ el neutro de $\mathbb{R}^3$, lo correcto es

$$\alpha_1(1 + x) + \alpha_2(2x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2.$$

Otro error que se comete es decir que

$$1 + x = (1, x, 0)$$

en donde nuevamente se confunden a los espacios con los cuales estamos trabajando.