



3. ESPACIOS VECTORIALES

3.6 Bases

DEFINICIÓN 1

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$. Se dice que B es una base de E si

1. B genera a E ; y
2. B es linealmente independiente.

TEOREMA 1: Base canónica de $\mathbb{R}^n$

En $\mathbb{R}^n$, el conjunto $\{e^1, e^2, \dots, e^n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, definidos por

$$e_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, es una base de $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 9. En el espacio $\mathbb{R}^3$ se tiene que su base canónica está dada por:

$$B = \{e^1, e^2, e^3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

TEOREMA 2: Base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$

En $\mathbb{R}_n[x]$, el conjunto $\{1, x, \dots, x^{n-1}, x^n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$. A esta base se la denomina la base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$.

TEOREMA 3

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E . Se tiene que todo elemento de E se puede escribir, de manera única, como combinación lineal de elementos de B .

EJEMPLO 10. En el espacio $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ tenemos que su base canónica está dada por:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Además, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para todo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

EJEMPLO 11. En el espacio $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ tenemos que una base está dada por:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Además, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b+c}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-b+c}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-a+d}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para todo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

TEOREMA 4

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$. Se tiene que si todo elemento de E se puede escribir, de manera única, como combinación lineal de elementos de B , entonces B es una base de E .

EJEMPLO 12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1[t]$ considere el conjunto

$$B = \{1 - t, 1 + t\}.$$

Notemos que todo elemento de $\mathbb{R}_1[t]$ se escribe como combinación lineal de los elementos de B , y en virtud del teorema anterior, concluimos que B es una base de $\mathbb{R}_1[t]$.

PROPOSICIÓN 5. Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$ un conjunto que genera a E . Se tiene que algún subconjunto de S es base de E .

EJEMPLO 13. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ y el conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Notemos que $\text{gen}(S) = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y que el subconjunto B de S es una base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, donde

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

TEOREMA 6

Todo espacio vectorial tiene una base.

EJEMPLO 14. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, consideremos al subespacio vectorial

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = x_3\}.$$

El conjunto $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de W .