5. APLICACIONES LINEALES

5.1 Definición de Aplicación lineal

DEFINICIÓN 1: Aplicación lineal

Sean $(E, +_1, \cdot_1, \mathbb{K})$ y $(F, +_2, \cdot_2, \mathbb{K})$ espacios vectoriales. A una función $T\colon E \to F$ se la llama una aplicación lineal (transformación lineal) si satisface que para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, y todo $u, v \in E$ se cumple

1. $T(u +_1 v) = T(u) +_2 T(v)$ y
2. $T(\alpha \cdot_1 v) = \alpha \cdot_2 T(v)$.

OBSERVACIÓN 1. En adelante, consideraremos $(E, +_1, \cdot_1, \mathbb{K})$ y $(F, +_2, \cdot_2, \mathbb{K})$ espacios vectoriales. Notaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de las aplicaciones lineales de E en F.

En caso de que no exista riesgo de ambigüedad, dado $T \in \mathcal{L}(E, F)$, se denotará

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ y
2. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$,

para $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u, v \in E$.

TEOREMA 1

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Para todo $u, v, v_1, v_2, \ldots, v_n \in E$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

1. $T(0_E) = 0_F$.
2. $T(u - v) = T(u) - T(v)$: y
3. $T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(v_k)$.

Ejemplo 1. Ejemplos de transformaciones lineales.

1. $$\begin{aligned} T\colon E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto 0_E \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} T\colon E &\longrightarrow E \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x,y) \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x,y,0) \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (x+y,y+z,x) \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ (x,y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[t] \\ (x,y,z) &\longmapsto x+(x-y)t+zt^2 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} T\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[t] \\ (x,y,z) &\longmapsto x+(x-y)t+zt^2 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} D\colon \mathcal{C}^1([0,1]) &\longrightarrow \mathcal{C}([0,1]) \\ f &\longmapsto Df \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} I\colon \mathcal{C}([0,1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(x)\,dx \end{aligned}$$

TEOREMA 2

Se tiene que $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio vectorial.

5.2 Núcleo e imagen

DEFINICIÓN 2: Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. El núcleo de T, denotado por $\ker(T)$, está definida por:

$$\ker(T) = \{v \in E : T(v) = 0_F\}.$$

2. La imagen de T, denotada por $\operatorname{img}(T)$, está definida por:

$$\operatorname{img}(T) = \{w \in F : w = T(v) \text{ para algún } v \in E\}.$$

EJEMPLO 2. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definida por $T(x,y,z) = (x,y,0)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\ker(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0,\, z \in \mathbb{R}\right\}$$

con

$$\operatorname{img}(T) = \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : w = 0\right\}.$$

PROPOSICIÓN 3. Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces

1. $\ker(T)$ es un subespacio vectorial de E.
2. $\operatorname{img}(T)$ es un subespacio vectorial de F.

PROPOSICIÓN 4. Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Se tiene que T es inyectiva si y solo si $\ker(T) = \{0_E\}$.

DEFINICIÓN 3: Nulidad y rango de una aplicación lineal

Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Se llama nulidad de T a $\dim(\ker(T))$.

2. Se llama rango de T a $\dim(\operatorname{img}(T))$.

Ejemplo 3. Considere la aplicación lineal del ejemplo 2, se tiene que la nulidad de T es igual a 1 y que el rango de T es igual a 2.

Teorema 5

Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con E un espacio de dimensión finita. Se tiene que

$$\dim(E) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{img}(T)).$$

Ejemplo 4. Considerando la aplicación lineal del ejemplo 2 y el resultado del ejemplo 3, se tiene que $\dim(\ker(T)) = 1$ y que $\dim(\operatorname{img}(T)) = 2$, a partir de lo cual se verifica que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{img}(T)).$$

Proposición 6. Sea $T \in \mathcal{L}(E,F)$ con E un espacio de dimensión finita. Si $\dim(E) = \dim(F)$, entonces se tiene que los siguientes enunciados son equivalentes

- T es inyectiva,
- T es sobreyectiva.

5.3 Propiedades de aplicaciones lineales

Proposición 7. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para E. Si

$$T_1(v_i) = T_2(v_i)$$

para todo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, entonces se tiene que $T_1(v) = T_2(v)$, para todo $v \in E$, es decir,

$$T_1 = T_2.$$

Proposición 8. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para E y sean $w_1, w_2, \ldots, w_n \in F$. Existe una única transformación lineal $T \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que

$$T(v_i) = w_i$$

para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

PROPOSICIÓN 9. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base de E, entonces T está completamente determinada por

$$\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}.$$

Es decir, si se conoce $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$, entonces se conoce $T(u)$ para todo $u \in E$.

EJEMPLO 5. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Dado que $B = \{u_1, u_2\} = \{(1, -1), (-3, 2)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ junto con

$$\{T(u_1) = (0, 2),\ T(u_2) = (-3, 2)\}$$

se puede verificar que la aplicación lineal T está dada por

$$T(x, y) = (3x + 3y, -6x - 8y)$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

TEOREMA 10

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Supongamos que $\dim(E) = n$ y que $\dim(F) = m$, se tiene que:

1. si $n > m$, entonces T no es inyectiva; y
2. si $m > n$, entonces T no es sobreyectiva.

EJEMPLO 6. Considere la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

tenemos que T no es inyectiva.

EJEMPLO 7. Considere la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T\colon \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

tenemos que T no es sobreyectiva.

5.4 Isomorfismos

DEFINICIÓN 4: Isomorfismo

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se dice que T es un isomorfismo de E en F si T es biyectiva.

EJEMPLO 8.

1. Sea $T_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_1(x, y) = (x - y, 2x - y)$ es un isomorfismo.
2. Sea $T_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T_2(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ no es un isomorfismo.

DEFINICIÓN 5: Espacios isomorfos

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ y $(F, +, \cdot, \mathbb{K})$. Se dice que E y F son isomorfos si existe un isomorfismo T de E en F; se lo denota por $E \cong F$.

TEOREMA 11

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorfismo, se tiene que

1. si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a E, entonces
$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$
genera a F;
2. si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son linealmente independientes en E, entonces
$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$
es linealmente independientes en F;
3. si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es base de E, entonces
$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$
es base de F;
4. si E es de dimensión finita, entonces F es de dimensión finita y
$$\dim(E) = \dim(F).$$

TEOREMA 12

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ y $(F, +, \cdot, \mathbb{R})$ espacios de dimensión finita tales que

$$\dim(E) = \dim(F)$$

entonces $E \cong F$.

PROPOSICIÓN 13. Se tiene que

1. $\mathbb{R}^{m\times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$.
2. $P_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

5.5 Isometrías

DEFINICIÓN 6: Isometría

Sean $(E, \mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(F, \mathbb{K}, +\cdot)$ dos espacios vectoriales con producto interno y $T \in \mathcal{L}(E, F)$, T es una isometría si para todo $v \in E$

$$\|T(v)\|_F = \|v\|_E.$$

La notación $\|\cdot\|_E$ indica que la norma es obtenida a partir del producto interno definido en E, es decir, $\|\cdot\|_E = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_E}$.

TEOREMA 14

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ una isometría, entonces

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

para todo $u, v \in E$, es decir, una isometría preserva los productos internos.

TEOREMA 15

Sea $\dim(E) = n$, y $T \in \mathcal{L}(E, E)$ una isometría.

1. Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es un conjunto ortogonal , entonces $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ es un conjunto ortogonal.
2. T es un isomorfismo.

DEFINICIÓN 7: Espacios isométricamente isomorfos

Se dice que dos espacios vectoriales E y F con el mismo conjunto de escalares, son isométricamente isomorfos si existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ que sea una isometría y un isomorfismo.

TEOREMA 16

Dos espacios vectoriales reales de dimensión finita n con producto interno son isométricamente isomorfos.

5.6 Vector de coordenadas

DEFINICIÓN 8: Base ordenada

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E. Si B es una sucesión, es decir,

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\},$$

se la llama una base ordenada.

DEFINICIÓN 9: Vector de componentes

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq E$$

una base ordenada. Para $u \in E$, se define el vector de componentes de u por

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ son tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

En la literatura, también se puede encontrar la definición anterior bajo el nombre de vector de coordenadas.

EJEMPLO 9. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

1. Sea $B_1 = \{(2,0,1),(1,2,0),(1,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, entonces las coordenadas del vector $v = (4,-9,5)$ respecto a la base B_1 es

$$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $B_2 = \{(6,-3,3),(4,-1,3),(5,2,2)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, entonces las coordenadas del vector $v = (4,-9,5)$ respecto a la base B_2 es

$$[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 7/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.7 Matriz asociada

En adelante, consideraremos a E y a F espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$, y, que cada base considerada es una base ordenada.

TEOREMA 17

Se tiene que $\mathcal{L}(E,F)$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{m\times n}$, es decir

$$\mathcal{L}(E,F) \cong \mathbb{K}^{m\times n}.$$

DEFINICIÓN 10

Sean $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y B_1, B_2 bases para E y F, respectivamente. Se tiene que existe una única matriz de $\mathbb{K}^{m\times n}$, denotada por $[T]_{B_2}^{B_1}$, tal que

$$[T(v)]_{B_2} = [T]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}$$

para todo $v \in E$. A esta matriz se la llama matriz asociada a la aplicación lineal T.

PROPOSICIÓN 18. Sean $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y

$$B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$$

bases para E y F, respectivamente.

Se tiene que las columnas de la matriz $[T]_{B_2}^{B_1}$ son los vectores de coordenadas de $T(v_j)$ en la base B_2, para $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es decir

$$[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_{B_2} & [T(v_2)]_{B_2} & \cdots & [T(v_n)]_{B_2} \end{pmatrix}.$$

PROPOSICIÓN 19. Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y sean B_1 y B_2 bases de E y F, respectivamente. Se tiene que T es biyectiva si y solo si $[T]_{B_2}^{B_1}$ es invertible.

TEOREMA 20

Sean $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, con G un espacio vectorial de dimensión finita. Sean B_1, B_2 y B_3 bases de E, F y G, respectivamente. Se tiene que

$$[T_2 \circ T_1]_{B_3}^{B_1} = [T_2]_{B_3}^{B_2} [T_1]_{B_2}^{B_1}.$$

TEOREMA 21

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ una aplicación lineal invertible y sean B_1 y B_2 bases de E y F, respectivamente. Se tiene que

$$\left([T]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} = [T^{-1}]_{B_1}^{B_2}.$$

EJEMPLO 10. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$, sean

$$B_1 = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \{(1, 2), (-1, 1)\}$$

bases de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Entonces

$$T(1, 0, 1) = (1, -1), \quad T(0, 1, 1) = (1, 0) \quad \text{y} \quad T(1, 1, 1) = (2, 0).$$

Ahora, notemos que para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$[(a, b)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{a + b}{3} \\ \dfrac{-2a + b}{3} \end{pmatrix}$$

luego,

$$[T(1, 0, 1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [T(0, 1, 1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad [T(1, 1, 1)]_{B_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$[T]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

> En caso de no existir riesgo de confusión en las bases que se utiliza, se nota simplemente $[T]$ a la matriz asociada a la aplicación lineal T.

5.8 Matriz de cambio de base

PROPOSICIÓN 22. Sean $I \in \mathcal{L}(E, E)$ la aplicación identidad, B_1 y B_2 dos bases para E, considerando B_1 para el espacio de salida y a B_2 para el espacio de llegada. Se tiene que $[I]_{B_2}^{B_1}$ es su matriz asociada respecto a las bases consideradas.

DEFINICIÓN 11: Matriz de cambio de base

Sean B_1 y B_2 dos bases de E. Se llama matriz de cambio de base B_1 a B_2 a la única matriz de $\mathbb{K}^{n\times n}$, denotada por $[I]_{B_2}^{B_1}$, que cumple que

$$[v]_{B_2} = [I]_{B_2}^{B_1}[v]_{B_1}$$

para todo $v \in E$.

> En la literatura, también se puede encontrar la definición anterior bajo el nombre de matriz de transición y se utiliza también la notación $P_{B_2 \leftarrow B_1}$.

EJEMPLO 11. Una matriz de cambio de base en $\mathbb{R}_1[t]$. Sean:

$$B_1 = \{1+t, 2-t\} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \{t, 1-t\}$$

dos bases de $\mathbb{R}_1[t]$. Entonces, recordando que trabajamos con la aplicación identidad $I\colon \mathbb{R}_1[t] \to \mathbb{R}_1[t]$, y notando que para todo $a + bt \in \mathbb{R}_1[t]$, se tiene que:

$$[(a+bt)]_{B_2} = \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix},$$

podemos verificar que:

$$[I]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 23

Sean B_1 y B_2 bases de E y sea $[I]_{B_2}^{B_1}$ la matriz de cambio de base B_1 a B_2. Se tiene que $[I]_{B_2}^{B_1}$ es no singular y que

$$\left([I]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} = [I]_{B_1}^{B_2}.$$

Ejemplo 12. Siguiendo con el ejemplo anterior, tendríamos que

$$[I]_{B_1}^{B_2} = \left([I]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 24

Sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$, B_1 y B_2 bases de E, y, D_1 y D_2 bases de F. Se tiene que

$$[T]_{D_2}^{B_2} = [I]_{D_2}^{D_1}[T]_{D_1}^{B_1}[I]_{B_1}^{B_2}.$$

Sean B_1, B_2 y C bases de E, donde C es la base canónica de E. Entonces:

$$\begin{aligned}
[I]_{B_1}^{B_2} &= [I]_{B_1}^{C}[I]_{C}^{C}[I]_{C}^{B_2} \\
&= [I]_{B_1}^{C}[I]_{C}^{B_2} \\
&= \left([I]_{C}^{B_1}\right)^{-1}[I]_{C}^{B_2}.
\end{aligned}$$

5.8.1. Rango de una matriz

Definición 12: Espacio nulo y nulidad

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. El espacio nulo de A, que notaremos por $\operatorname{nul}(A)$, se define como

$$\operatorname{nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

y la nulidad es la dimensión del espacio nulo.

Ejemplo 13. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\operatorname{nul}(A) = \left\{(-5x, x, x, 0) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$$

con nulidad igual a 1.

DEFINICIÓN 13: Espacio filas y espacio columnas

Sean $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $v_1, \ldots, v_m$ las filas de A y $u_1, \ldots, u_n$ las columnas de A. Al espacio

$$\operatorname{span}(\{v_1, \ldots, v_m\}) \subseteq \mathbb{R}^n$$

se lo llama espacio filas de A y al espacio

$$\operatorname{span}(\{u_1, \ldots, u_n\}) \subseteq \mathbb{R}^m$$

se lo llama espacio columnas de A.

EJEMPLO 14. A partir del ejemplo anterior tenemos que:

El espacio fila de A es,

$$\operatorname{gen}\left(\{(2,4,6,0),(0,-2,2,2),(3,3,12,9)\}\right) = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, -5x+y+z=0\right\}.$$

El espacio columna de A es,

$$\operatorname{gen}\left(\{(2,0,3),(4,-2,3),(6,2,12),(0,2,9)\}\right) = \mathbb{R}^3.$$

TEOREMA 25

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, entonces:

1. El espacio nulo de A es el complemento ortogonal del espacio fila de A.
2. El espacio nulo de $A^\intercal$ es el complemento ortogonal del espacio columna de A.

EJEMPLO 15. Continuando los dos ejemplos anteriores, tenemos que:

El complemento ortogonal del espacio fila de A es,

$$\operatorname{gen}\left(\{(-5,1,1,0)\}\right) = \operatorname{nul}(A).$$

De forma similar, para la matriz A^T.

El espacio nulo de A^T es $\operatorname{nul}\left(A^T\right) = \{0_{R^3}\}$. El complemento ortogonal del espacio columna de A es $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

PROPOSICIÓN 26. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Si A y B son equivalentes por filas, entonces los espacios filas de A y B son iguales.

PROPOSICIÓN 27. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Se tiene que las dimensiones de los espacios filas y columnas de A son iguales, es más, estas dimensiones son iguales a $\operatorname{rang}(A)$.

EJEMPLO 16. Notemos que a partir de los ejemplos 14 y 13, se verifica que la dimensión tanto del espacio fila como del espacio columna de A es igual a 3.

DEFINICIÓN 14: Matriz ortogonal

Una matriz $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se llama ortogonal si Q es invertible y

$$Q^{-1} = Q^{\intercal}$$

EJEMPLO 17. La matriz $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal que verifica

$$A^{\intercal}A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 28

La matriz $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal si y sólo si las columnas de Q forman una base ortonormal de $\mathbb{K}^n$.

TEOREMA 29

Sean $T \in \mathcal{L}(E, E)$, B_1 y B_2 bases de E. T es una isometría si $[T]_{B_2}^{B_1}$ es una matriz ortogonal.

TEOREMA 30: Equivalencias no singulares

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, se tienen que las siguientes son equivalentes:

1. A es no singular.
2. el sistema $Ax = 0$ tiene solamente la solución trivial;
3. A es equivalente por filas a I_n;

4. el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{K}^n$;

5. $\det(A) \neq 0$;

6. las filas de A forman un conjunto linealmente de vectores;

7. las columnas de A forman un conjunto linealmente;

8. $\operatorname{rang}(A) = n$, y

9. la nulidad de A es 0.