ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE FORMACIÓN BÁSICA
Cálculo Vectorial

# Unidad 1

**Profesor Augusto Dávila**

# a) Tema

- Introducción a los Espacios Vectoriales $\mathbb{R}^n$
- Rectas en $\mathbb{R}^n$
- Planos en $\mathbb{R}^n$

# b) Teoría

## 1. Introducción a los Espacios Vectoriales $\mathbb{R}^n$

En esta sección se hace una breve introducción al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y a sus propiedades que serviran de base para definir algunos conceptos del cálculo diferencial e integral.

**Definición 1** *El conjunto de todos los elementos de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ donde $x_i$ es un número real es llamado el conjunto de las n-uplas y denotado con el símbolo $\mathbb{R}^n$, es decir,*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \; para \; todo \; i = 1, 2, \ldots, n\}$$

**Ejemplo:**

1. $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R} \; para \; todo \; i = 1, 2\}$
2. $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R} \; para \; todo \; i = 1, 2, 3\}$
3. $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in R \; para \; todo \; i = 1, 2, \ldots, 4\}$
4. $(1, 3) \in \mathbb{R}^2$
5. $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$
6. $(8, 7, 2) \in \mathbb{R}^3$
7. $(1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$
8. $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$
9. $(-1, 3, -5, -7, -9, 0) \in \mathbb{R}^6$

Los elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son llamados puntos o vectores del espacio $\mathbb{R}^n$.

Los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son llamados coordenadas del punto ó vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por lo tanto $x_i$ es la i-ésima coordenada del punto ó vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Es común denotar los puntos de $\mathbb{R}^n$ con las letras $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, etc.$ De manera que un punto $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ es de la forma $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

El punto de $\mathbb{R}^n$ que tiene sólo coordenadas iguales a cero, $x_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, es llamado elemento nulo, elemento neutro, vector cero,vector nulo y denotado con el símbolo $\mathbf{0}$, elemplo: $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ es de la forma $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Dados dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, se dice que son iguales y escribimos $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ si $x_i = y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

## 1.1. Operaciones en $\mathbb{R}^n$

**Multiplicación por un escalar**

Dados el punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y un múmero real $\alpha$, se define la multiplicación de $\mathbf{x}$ con $\alpha$ como un nuevo punto de $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

Ejemplos:

*a*) $3(1, 2, 3) = (3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3) = (3, 6, 9)$

*b*) $2(-2, 5, 7, 0) = (-4, 10, 14, 0)$

*c*) $-1(1, 2, 3) = (-1, -2, -3)$

Denotaremos con el símbolo $-\mathbf{x}$ al producto $-1\mathbf{x}$.

**Suma y resta**

Dados dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ; $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, se define la suma denotado por $\mathbf{x}$+$\mathbf{y}$ como el punto de $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$\mathbf{x}\text{+}\mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}.$$

La resta de $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ se define como la operación $\mathbf{x} + (-\mathbf{y})$ denotada simplemente por $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ de modo que

$$\mathbf{x}\text{-}\mathbf{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$$

Para cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$0\mathbf{x} = \mathbf{x}0 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

**Vectores Canónicos**

En $\mathbb{R}^2$ los vectores de la forma $(1, 0)$ y $(0, 1)$ son llamados vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^3$ los vectores de la forma $(1, 0, 0)$ , $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ son llamados vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$.

En general para $\mathbb{R}^n$ el i-ésimo vector canónico es $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i = 1$ y $x_j = 0$ para todo $j \neq i$. El i-ésimo vector canónico se denota por el símbolo $e^i$. Por ejemplo:

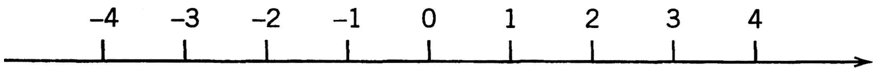
1. En $\mathbb{R}^3$, $e^2 = (0, 1, 0)$

2. En $\mathbb{R}^4$, $e^3 = (0,0,1,0)$

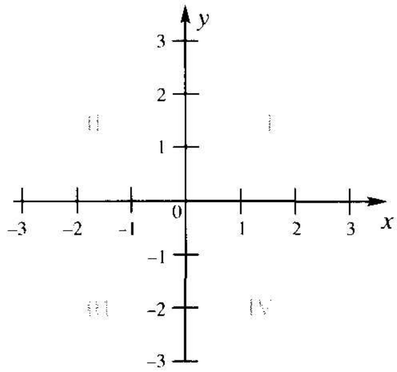
3. En $\mathbb{R}^7$, $e^5 = (0,0,0,0,1,0,0)$

## 1.2. Representación Geométrica de $\mathbb{R}^n$

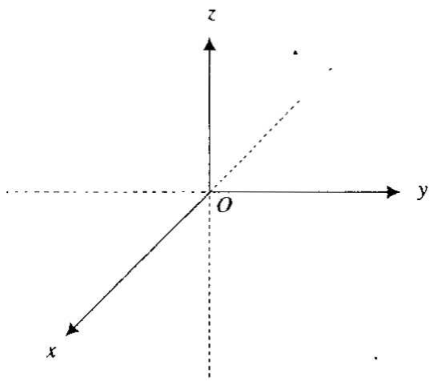
1. Para $n = 1$ tenemos $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, que es el conjunto de los números reales ya estudiado

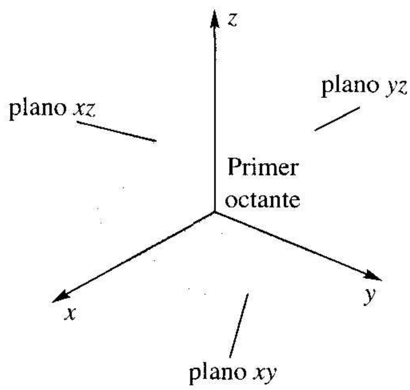



2. Para $n = 2$ tenemos $\mathbb{R}^2$, corresponde al Plano Cartesiano

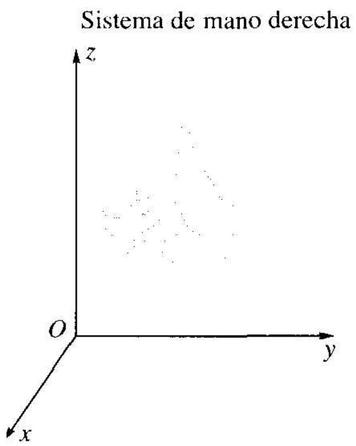


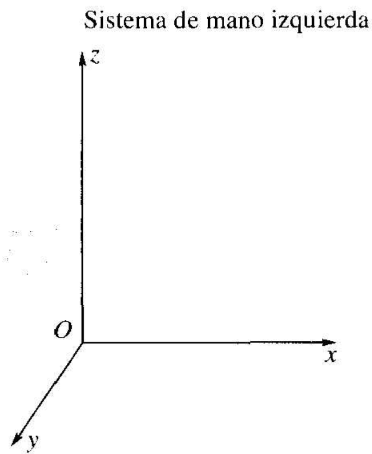

3. Para $n = 3$ tenemos $\mathbb{R}^3$, el Espacio




Estructura General del Espacio:

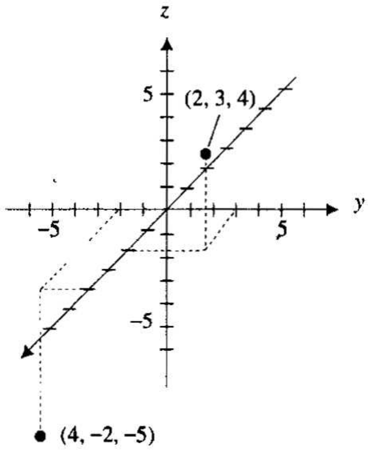


4. Para $n \geq 4$ NO existe una representación geométrica de $\mathbb{R}^n$

# 2. Representación de Puntos

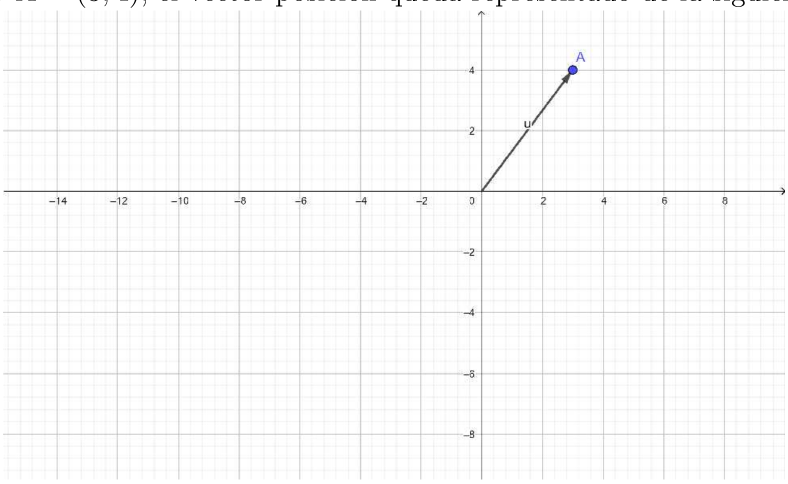
Dados los puntos $(2,3,4)$ y $(4,-2,-5)$, su representación en el espacio está dado por:



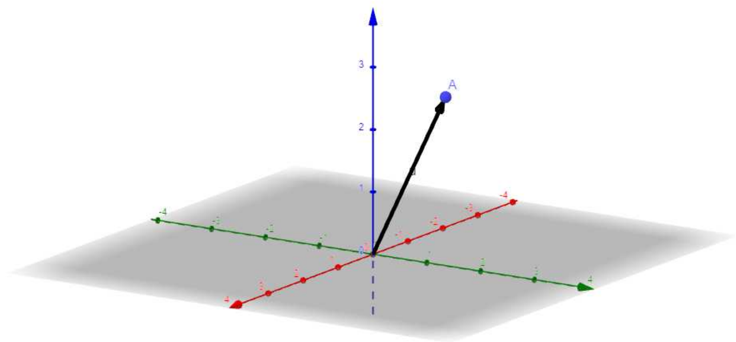

## 2.1. Vector Posición

Todos los puntos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tienen una representación geométrica y podemos cosiderar los puntos como vectores con salida en el origen de coordenadas.

Dado el punto $A=(3,4)$, el vector posición queda representado de la siguiente manera



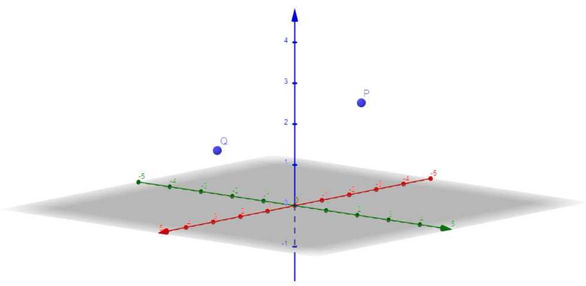

En $\mathbb{R}^3$ dado el punto $A=(1,2,3)$, el vector posición queda representado de la siguiente manera

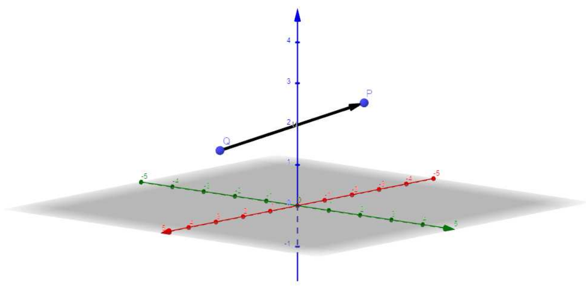


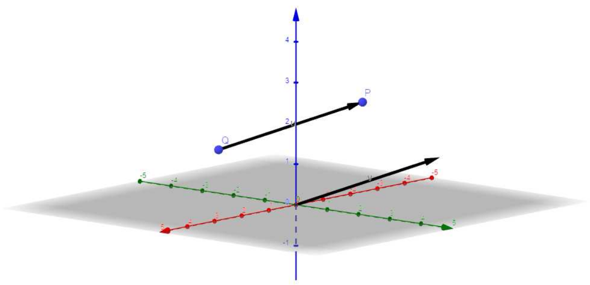

**Definición 2** *Dados dos puntos* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *y* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *en* $\mathbb{R}^3$*, se define el vector desplazamiento de* $P_1$ *a* $P_2$ *dado por*

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

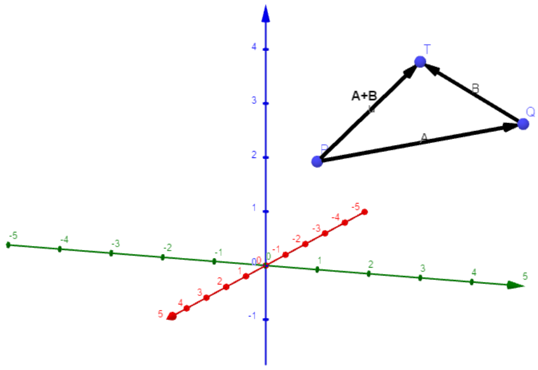
**Ejemplo 2.1** *Consideremos los puntos* $P = (1, 3, 3)$ *y* $Q = (4, 1, 2)$



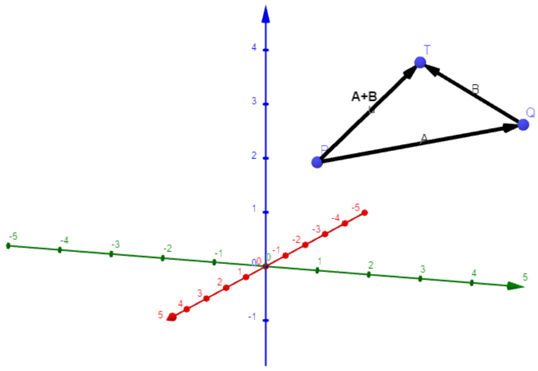



### 2.2. Suma




### 2.3. Resta




## 3. Producto escalar

**Definición 3** *Sean* $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *y* $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ *dos vectores en* $\mathbb{R}^n$*. Su producto escalar se representa por* $A \cdot B$ *y se define con la igualdad*

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

**Propiedades**: Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^n$

1. El producto punto genera un escalar
2. $A \cdot A \geq 0$ y $A \cdot A = 0 \Leftrightarrow A = 0$
3. $A \cdot B = B \cdot A$
4. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

## 3.1. Norma y Distancia

**Definición 4** *Sea* $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$*. Se define la norma de* $A$ *denotada por* $\| A \|$ *como*

$$\| A \| = \sqrt{A \cdot A}$$

- Para $A = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\| A \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- Para $A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $\| A \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

**Definición 5** *Sean* $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *y* $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ *vectores en* $\mathbb{R}^n$*. Se define la distancia entre* $A$ *y* $B$ *denotada por* $d(A, B)$ *como*

$$d(A, B) = \| A - B \|$$

**Definición 6** *Dos vectores* $A, B \in \mathbb{R}^n$ *son paralelos si existe* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $A = tB$ *ó* $B = tA$

**Definición 7** *Dos vectores* $A, B \in \mathbb{R}^n$ *son ortogonales o perpendiculares si* $A \cdot B = 0$

## 3.2. Proyección de vectores

**Definición 8** *Sean* $A, B \in \mathbb{R}^n$ *vectores, se define la proyección de* $A$ *sobre* $B$ *como un nuevo vector de la forma*

$$Proy_B A = \left( \frac{A \cdot B}{\| B \|^2} \right) B$$

**Definición 9** *Sean* $A, B \in \mathbb{R}^n$ *vectores, se define el ángulo entre* $A$ *y* $B$ *como*

$$\theta = \arccos \left( \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} \right)$$

**Definición 10** *Sean $A, B \in \mathbb{R}^n$ vectores, se define la componente normal de $A$ respecto a $B$ como*

$$norm_B(A) = A - Proy_B A$$

# 4. Producto Vectorial

En $\mathbb{R}^3$ está definido un producto adicional al producto punto muy importante para desarrollos e interpretaciones geométricas en este espacio.

**Definición 11** *Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ vectores en $\mathbb{R}^3$. Su producto vectorial denotado por $A \times B$ se define como el vector*

$$A \times B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

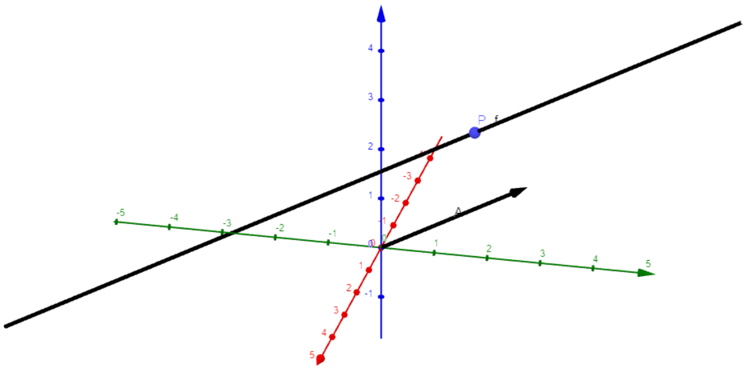
**Propiedades:** Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$

1. Técnica para calcular el producto cruz
$$A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
2. $A \times B = -(B \times A)$
3. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$
4. $k(A \times B) = kA \times B$
5. $A \cdot (A \times B) = 0$ y $B \cdot (A \times B) = 0$
6. $\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$
7. $A \times B = 0$ si y solo si $A$ y $B$ son paralelos (LD)
8. Todo vector $N \in \mathbb{R}^3$ ortogonal a $A$ y $B$ simultáneamente es el producto de un escalar por $A \times B$
9. $\|A \times B\| = \|A\| \|B\| sen(\theta)$ , donde $\theta$ es el ángulo entre los vectores.

# 5. Rectas

**Definición 12** *Sea $P$ un punto dado en $\mathbb{R}^n$ y $A$ un vector no nulo dado en $\mathbb{R}^n$. El conjunto de todos los puntos de la forma $P + tA$, donde $t \in \mathbb{R}$, es una **Recta** que pasa por el punto $P$ en la dirección del vector $A$, notación $L(P; A)$, es decir,*

$$L(P; A) = \{P + tA : t \in \mathbb{R}\}$$




**Observaciones:**

1. En la ecuación de la recta $P + tA$ cuando $P = 0$ tenemos $tA$ que es llamada envolvente lineal de $A$, esta es una definición del álgebra lineal, El envolvente lineal de $A$ son todos los múltiplos de $A$
2. La recta se obtiene sumando a $P$ todos los vectores de la envolvente lineal de un vector no nulo $A$.
3. Un punto $Q \in L(P; A)$, si y solo si, existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $Q = P + t_0 A$
4. $P \in L(P; A)$ porque para $t_0 = 0$ se tiene que $P = P + 0A$
5. $L(0, A)$ es la recta que pasa por el origen en dirección del vector $A$

**Ejemplo 5.1** *Consideremos* $P = (1, 2, 3)$ *y* $A = (-1, 5, 4)$*, la recta que pasa por* $P$ *en la dirección de* $A$ *está dada por*

$$L(P; A) = \{P + tA : t \in \mathbb{R}\} = \{(1, 2, 3) + t(-1, 5, 4) : t \in \mathbb{R}\}$$

*conjunto que podemos escribir de la siguiente manera*

$$L(P; A) = \{(1 - t, 2 + 5t, 3 + 4t) : t \in \mathbb{R}\}$$

*Para buscar puntos que estén sobre la recta* $L(P; A)$*, asignamos valores a* $t$*, por elemplo:*

*Para* $t = 0$*, se tiene* $(1 - (0), 2 + 5(0), 3 + 4(0)) = (1, 2, 3)$

*Para* $t = 1$*, se tiene* $(1 - (1), 2 + 5(1), 3 + 4(1)) = (0, 7, 7)$

*Para* $t = -2$*, se tiene* $(1 - (-2), 2 + 5(-2), 3 + 4(-2)) = (3, -8, -5)$

*Todos esos puntos están sobre la recta* $L(P; A)$*, de esta manera podemos buscar infinitos puntos sobre una recta dada.*

*Ahora, ¿Cómo verificamos que un punto dado está sobre una recta dada?.*

*Dado* $(-1, 12, 11)$ *un punto, verifiquemos si el punto está o no en la recta* $L(P; A)$

*Debemos encontrar un* $t \in \mathbb{R}$ *tal que* $(-1, 12, 11) = (1 - t, 2 + 5t, 3 + 4t)$

*de la igualdad de los puntos planteamos el siguiente sistema*

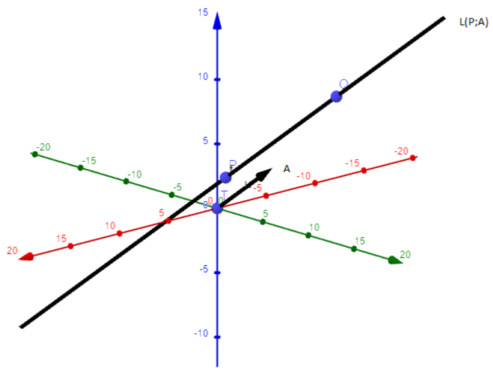
$$\begin{cases} -1 = 1 - t \\ 12 = 2 + 5t \\ 11 = 3 + 4t \end{cases}$$

*observe que el valor de $t$ debe satisfacer las tres ecuaciones, de la primera se tiene que $t = 2$ y este valor satisface las tres ecuaciones. Por lo tanto el punto $(-1, 12, 11) \in L(P; A)$*

*Por otra parte el punto $(0, 0, 0)$ no está sobre la recta, ya que NO existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $(0, 0, 0) = (1 - t, 2 + 5t, 3 + 4t)$ ya que al plantear el sistema*

$$\begin{cases} 0 = 1 - t \\ 0 = 2 + 5t \\ 0 = 3 + 4t \end{cases}$$

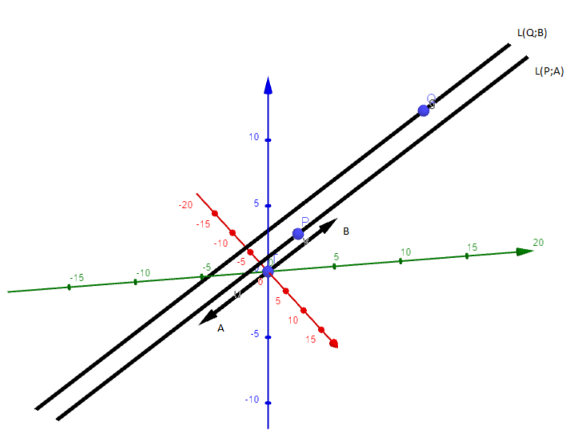
*NO existe un $t \in \mathbb{R}$ que satisfaga las tres ecuaciones.*




## 5.1. Propiedades de las rectas

**Definición 13** *Dos vectores $A, B$ se dice que son paralelos si existe una constante no nula $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $A = cB$ ó $B = cA$*

**Definición 14** *Dos rectas $L(P; A)$ y $L(Q; B)$ son paralelas si sus vectores de dirección son paralelos.*




- Dos rectas $L(P;A)$ y $L(P;B)$ son iguales si y solo si $A$ y $B$ son paralelos.
- Dos rectas $L(P;A)$ y $L(Q;A)$ con el mismo vector director son iguales si y solo si $Q \in L(P, A)$.
- Dada una recta $L(P;A)$ y un punto $Q \notin L(P;A)$, existe una única recta $L'$ que contiene a $Q$ y es paralela a $L$. **Considerar** $L'(Q;A)$.
- Dos puntos distintos determinan una recta, es decir, Si $P \neq Q$ existe una única recta que pasa por $P$ y $Q$.

  Consideramos como vector director a $\overrightarrow{PQ}$ por lo tanto la recta es

  $$L(P, \overrightarrow{PQ}) = L(P, Q-P) = \{P + t(Q-P) : t \in \mathbb{R}\}$$

  También se puede considerar el punto $Q$ y así construir

  $$L(Q, \overrightarrow{PQ}) = L(Q, Q-P) = \{Q + t(Q-P) : t \in \mathbb{R}\}$$

  También se puede considerar el vector director $\overrightarrow{QP}$

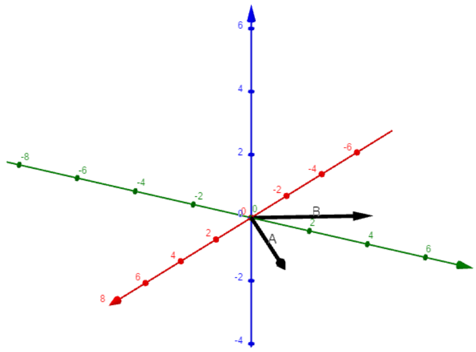
# 6. Planos

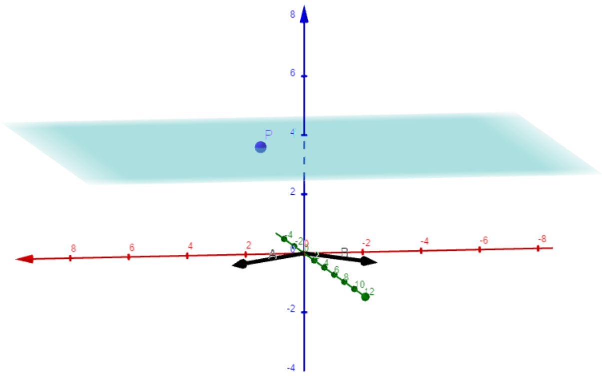
**Definición 15** *Dado un punto $P$ y dos vectores $A$ , $B$ linealmente independientes, Un plano es el conjunto $M$ de puntos de la forma*

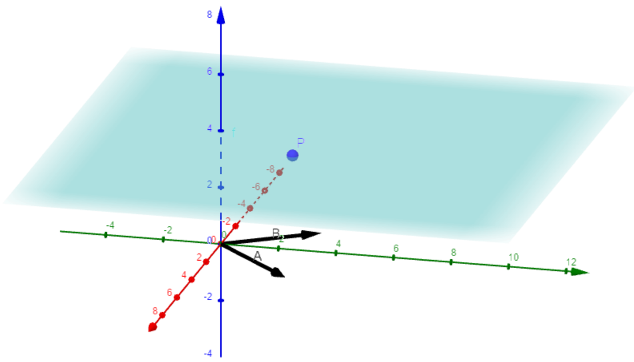
$$M = \{P + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$$

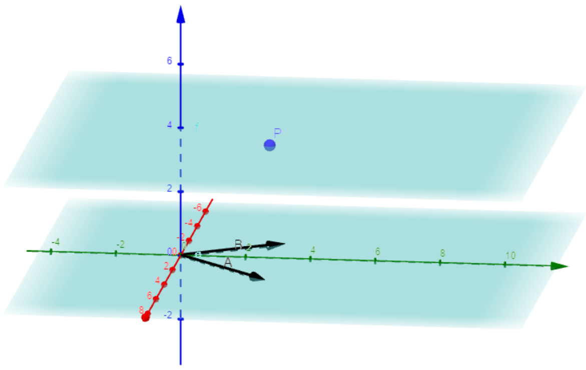
**Observaciones:**

- El conjunto $\{P + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$ es llamado el plano que pasa por $P$ generado por los vectores $A$ y $B$.
- La condición de que $A$ , $B$ sean linealmente independientes, es para que no sean paralelos









- Un punto $Q \in M$ si y solo si existen $t, s \in \mathbb{R}$ tales que

$$Q = P + sA + tB$$

- $P \in M$ ya que para $t = 0$ y $s = 0$ se tiene que

$$P = P + 0A + 0B$$

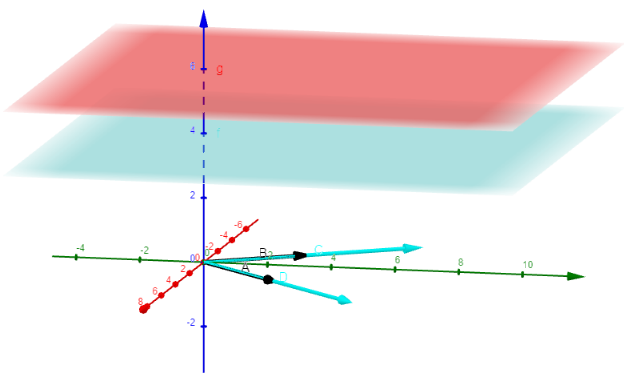
- Cuando $P = 0$ (el origen) el plano es el envolvente lineal de $A$ y $B$, es decir, el conjunto $\{sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$

## 6.1. Propiedades de los planos

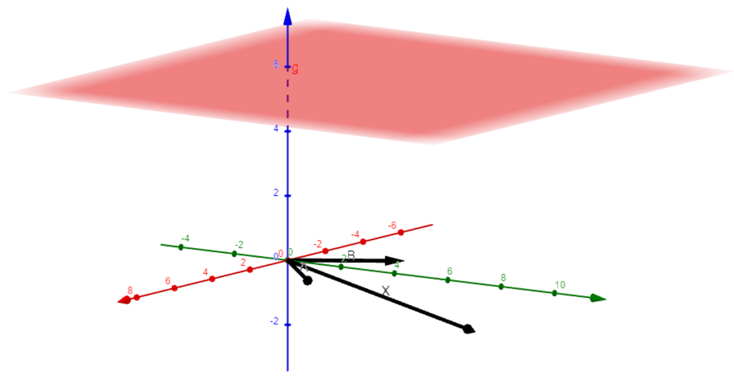
- Dos planos $M = \{P + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$ y $M' = \{P + sC + tD : s, t \in \mathbb{R}\}$ que pasan por el mismo punto $P$, son iguales si y solo si el envolvente lineal de $A$ y $B$ coincide con el de $C$ y $D$, es decir,

$$\{sA + tB\} = \{sC + tD\}$$

- Dos planos $M = \{P + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$ y $M' = \{Q + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$ generados por los mismos vectores $A$ y $B$, son iguales si y solo si $Q \in M$.
- Dos planos $M = \{P + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$ y $M' = \{P + sC + tD : s, t \in \mathbb{R}\}$ son paralelos si la envolvente lineal de $A$ y $B$ es igual a la de $C$ y $D$.



- Un vector $X$ es paralelo al plamo $M$ si $X$ pertenece a la envolvente lineal de $A$ y $B$, es decir, $X$ es combinación lineal de $A$ y $B$.



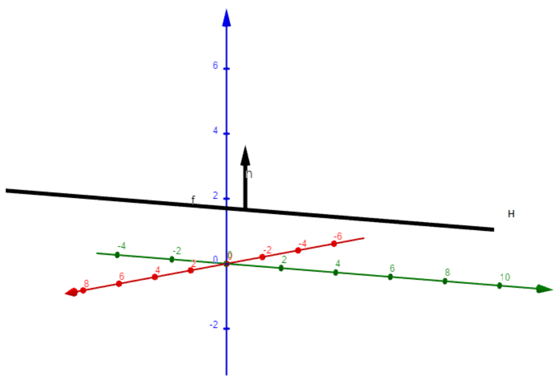
- Dado un plano $M = \{P + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$ y un punto $Q \notin M$, existe un único plano $M'$ que contiene al punto $Q$ y que es paralelo a $M$.

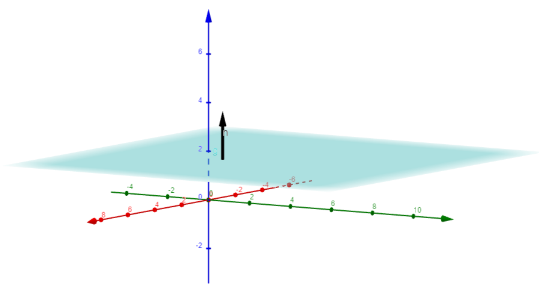
  Consideremos $M' = \{Q + sA + tB : s, t \in \mathbb{R}\}$; es decir, construimos $M'$ con el punto $Q$ y el mismo envolvente lineal de $M$.
- Si $P, Q, R$ son tres puntos NO situados en la misma recta, existe un único plano $M$ que contiene a ésos tres puntos. Consideremos

$$M' = \{P + s(Q - P) + t(R - P) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

## 6.2. Planos en $\mathbb{R}^3$

**Definición 16** *Se dice que un vector $n \in \mathbb{R}^3$ es ortogonal a $H$ (un plano ó una recta) si para todo $a, b \in H$ se cumple que $n \cdot (b - a) = 0$*





**Planos**: Una manera de describir planos mendiante el lenguaje de los vectores

Sea $n = (a, b, c)$ un vector fijo no nulo y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto fijo. El conjunto de puntos $P = (x, y, z)$ que satisface

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot n = 0$$

es el **plano** que pasa por $P_1$ perpendicular al vector $n$. (vector normal al plano).

Para obtener la ecuación cartesiana desarrollamos la fórmula $\overrightarrow{P_1P} \cdot n = 0$

$$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_2, z - z_1)$$

entonces $\overrightarrow{P_1P} \cdot n = 0$ equivale a

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

de donde se tiene la ecuación cartesiana

$$ax + by + cz = d$$

**Ejemplo:**

Determine la ecuación del plano que pasa por $(5, 1, -2)$ y perpendicular a $n = (2, 4, 3)$

# 7. Problemas de distancia

1. Distancia entre un punto y una recta

   Dada una recta $L$ con vector director $A$ y un punto $P_0 \notin L$, calculamos la distancia entre el punto y la recta, $d(P_0, L)$ de la siguiente manera:

   *a*) Calcular un punto $B$ sobre la recta $L$; $B \in L$
   *b*) Calcular el vector $\overrightarrow{BP_0}$
   *c*) Calcular la proyección $Proy_A\overrightarrow{BP_0}$
   *d*) Calcular el vector $\overrightarrow{BP_0} - Proy_A\overrightarrow{BP_0}$
   *e*) La distancia buscada es $d(P_0, L) = \|\overrightarrow{BP_0} - Proy_A\overrightarrow{BP_0}\|$

   **OTRA MANERA**

   Usando trigonometría y el ángulo entre vectores tenemos que
   *a*) Calcular un punto $B$ sobre la recta $L$; $B \in L$
   *b*) Calcular el vector $\overrightarrow{BP_0}$
   *c*) Consideramos el vector $\overrightarrow{BA}$ y $\theta$ el ángulo entre $\overrightarrow{BP_0}$ y $\overrightarrow{BA}$, por propiedades trigonométricas tenemos que

   $$sen(\theta) = \frac{d}{\|\overrightarrow{BP_0}\|}$$

   por lo tanto,

   $$d = \|\overrightarrow{BP_0}\| sen(\theta)$$

   *d*) Usando el item anterior y propiedades del producto punto cruz tenemos que:

   $$d = \|\overrightarrow{BP_0}\| sen(\theta) = \frac{\|A\|\|\overrightarrow{BP_0}\| sen(\theta)}{\|A\|} = \frac{\|A \times \overrightarrow{BP_0}\|}{\|A\|}$$

e) La distancia buscada es

$$d = \frac{\|A \times \overrightarrow{BP_0}\|}{\|A\|}$$

2. Distancia entre dos rectas Paralelas

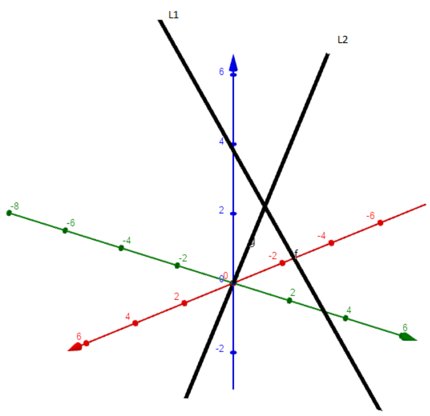
   Sean $L_1$ y $L_2$ dos rectas paralelas, la distancia entre ellas $d(L_1, L_2)$ se obtiene de la siguiente manera:

   a) Calcular un punto $P_0$ de $L_1$ y luego calcular $d(P_0, L_2)$ con el procedimiento anterior.

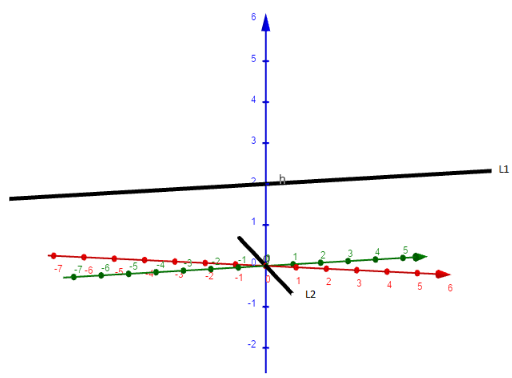
   b) Otra forma es calcular un punto $P_0$ de $L_2$ y luego calcular $d(P_0, L_1)$ con el procedimiento anterior.

3. Distancia entre dos rectas NO paralelas

   Puede ocurrir que las rectas no sean paralelas y se toquen en un punto, en cuyo caso la distancia es cero.




Puede ocurrir que las rectas no sean paralelas y NO se toquen en un punto.




En este caso calculamos de la siguiente manera:

a) Identificamos los vectores directores de $L_1$ y $L_2$ como $A_1$ y $A_2$ respectivamente.

b) Calculamos dos puntos, $B_1 \in L_1$ y $B_2 \in L_2$

c) Calculamos el vector $\overrightarrow{B_1B_2}$

d) Calculamos el vector $n = A_1 \times A_2$ vector ortogonal a ambas rectas.

*e*) Calculamos el vector $Proy_n \overrightarrow{B_1B_2}$

*f*) Finalmente la distancia buscada es $d(L_1, L_2) = \| Proy_n \overrightarrow{B_1B_2} \|$

**Ejemplo:**

$L_1 = \{(0,0,0) + t(-2,2,0)\}$ y $L_2 = \{(0,0,2) + s(0,2,0)\}$

$d(L_1, L_2) = 2$

4. Distancia entre punto y un plano

   Sea $\Pi$ un plano y $P_0$ un punto fuera de él, $P_0 \notin \Pi$, hallamos la distancia de $P_0$ a $\Pi$; $d(P_0, \Pi)$, de la siguiente manera:

   *a*) Calculamos un punto $P_1 \in \Pi$

   *b*) Calculamos el vector $\overrightarrow{P_1P_0}$

   *c*) Identificamos el vector normal de $\Pi$, como $n$

   *d*) Calculamos la proyección , $Proy_n \overrightarrow{P_1P_0}$

   *e*) La distancia buscada es $d(P_0, \Pi) = \|Proy_n \overrightarrow{P_1P_0}\|$

5. Distancia entre dos planos paralelos.

   Dados dos planos paralelos $\Pi_1$ y $\Pi_2$, hallamos la distancia entre ellos, $d(\Pi_1, \Pi_2)$ de la siguiente manera:

   *a*) Calculamos un punto $P_1 \in \Pi_1$ y luego usamos el procedimiento anterior para calcular $d(P_1, \Pi_2)$

   *b*) Otra manera es calcular un punto $P_2 \in \Pi_2$ y luego usamos el procedimiento anterior para calcular $d(P_2, \Pi_1)$