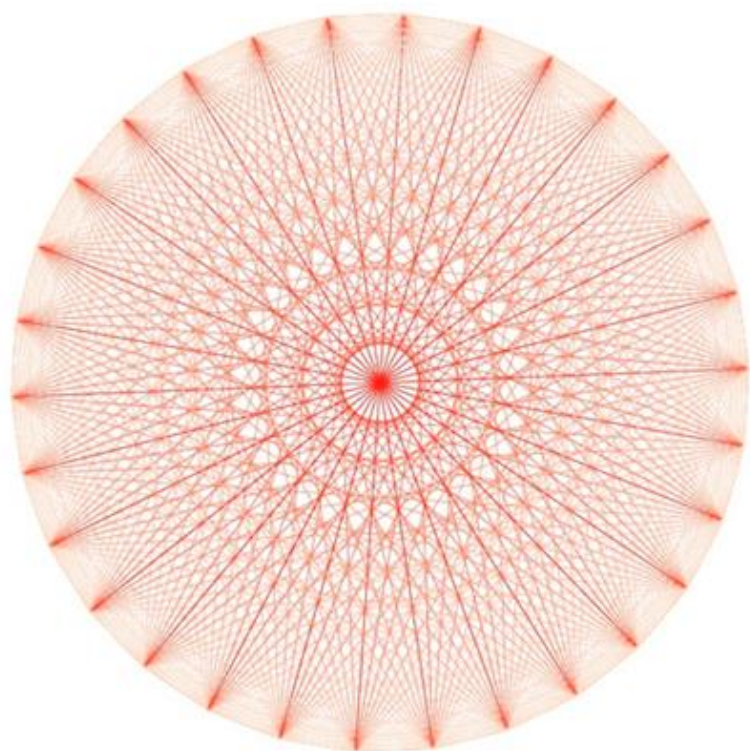


La rose éternelle

David Berlinski



Il n'y a qu'une seule chose qui comprenne mon état, et c'est la rose

Il n'y a qu'un seul être qui comprenne mon cœur : la rose.

— Farid Uddi Attar

Pour
Peter Thiel

Livre I

Table des matières

0	C'EST UN LIVRE SUR LES MATHÉMATIQUES.
1	L'IDÉE ÉTAIT DANS L'AIR.
2	EN SCIENCE, TOUT COMME EN RELIGION...
3	AU PRINTEMPS 1961, EUGENE WIGNER PUBLIA...
4	LA CRÉATION DES NOMBRES...
5	L'IDÉE D'UN INFINI POTENTIEL...
6	DANS UN UNIVERS OÙ LES ESPACES D'ÉCHANTILLONNAGE SONT <i>INFINIS</i> ...
7	ABSORBÉS PAR LEURS CALCULS, LES MATHÉMATICIENS LISAIENT...
8	AU MILIEU DU VIII ^E SIÈCLE, L'EMPEREUR BYZANTIN...
9	EN 1971, SAUL KRIPKE A PRÉSENTÉ AUX PHILOSOPHES LE CONCEPT DE « RIGIDE »...
10	LA DÉNOMINATION DÉPEND D'UN LIEN ENTRE LES NOMS ET LES CHOSES...
11	LUDWIG WITTGENSTEIN A PUBLIÉ LE <i>*TRACTATUS*</i> ...
12	L'ONTOLOGIE DE LA VIE QUOTIDIENNE.
13	DANS <i>L'ENUMA ELISH</i> , C'EST LE CHAOS PRIMORDIAL INCARNÉ PAR TIAMUT...
14	UNE LANGUE SE SITUE D'UN CÔTÉ DE LA LIGNE QUI DIVISE LE MONDE...
15	LES MATHÉMATIQUES TRAITENT PEUT-ÊTRE DE NOMBREUSES CHOSES, MAIS AVANT TOUT...
16	ÉCRIVANT SUR LES POÈTES ET LA TRADITION POÉTIQUE, T. S. ELIOT...
17	LA SYMÉTRIE DU MONDE : CELA SONNE BIEN...
18	<i>LES PRINCIPIA</i> DE NEWTON ONT ÉTÉ PUBLIÉS EN 1687...
19	NÉE EN 1882, EMMY NOETHER EST MORTE EN EXIL EN 1935, TOUT COMME EINSTEIN...
20	UN GRAND THÉORÈME DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE EST COMME LE VENT SUR L'EAU.

0 J'AI LONGTEMPS RÉFLÉCHI À LA FIN DE CE LIVRE...

NOTES DE FIN

Ce livre traite des mathématiques, de leur sens et de leur mystère. J'avais initialement envisagé d'écrire un long ouvrage sur un vaste sujet, mais le résultat s'est avéré aussi déroutant que l'Ancien Testament, voire encore plus rebutant. À la fin, j'avais oublié ce que j'avais dit au début. Si de telles circonstances ne sont agréables pour aucun écrivain, aucun lecteur n'est susceptible de les trouver captivantes. La solution m'est venue comme une main paternelle et apaisante posée sur mon épaule. *In der Kürze liegt die Würze*. Lorsque les lecteurs refermeront la toute dernière page de ce livre avec un grognement de satisfaction solennelle, ils auront lu tout ce que j'aurais pu dire sans en dire plus qu'ils ne souhaitaient lire.

Comme je les envie.

Les mathématiciens savent bien que les mathématiques sont une discipline étrange. Ils ne voudraient pas qu'il en soit autrement. Les physiciens théoriciens, en revanche, pensent que c'est l'univers qui est étrange. La physique théorique, elle, va très bien. Il faudrait simplement plus d'argent pour qu'elle s'améliore encore davantage. Quant à l'univers, ils n'ont pas tort. La chose *est* étrange. Pourtant, il y a une limite à la vitalité qui peut subsister dans une discipline qui se consacre principalement à proclamer à quel point tout cela est bizarre.

À chaque génération depuis Platon, certains mathématiciens ont cru que, à l'instar du douzième imam dans la théologie chiite, les objets mathématiques se trouvaient en occultation. Ils existeraient dans un monde au-delà de l'espace et du temps. Après tout, cela n'a aucun sens de parler d'une époque *antérieure* à l'existence des nombres naturels. Comment la mesurerait-on ? Il n'est pas plus logique d'attribuer aux objets mathématiques une place *au-delà* de l'espace. Où se trouverait-elle ? Au XX^e siècle, Kurt Gödel a soutenu que les objets mathématiques sont perçus au moyen d'un organe de perception par lequel ils sont perçus. Si tel est le cas, où se trouve cet organe ? Si ce n'est pas le cas, où se trouvent les objets ? Le douzième imam, selon les théologiens chiïtes, est destiné à revenir de son occultation. Les objets mathématiques, quant à eux, sont destinés à rester là où ils sont.

Lorsqu'on les considère sous le bon angle — *en scrutant, en plissant les yeux, en se tortillant* —, ce sont là des circonstances dans lesquelles les mathématiciens peuvent trouver satisfaction. Ayant accédé sans effort à un monde au-delà de l'espace et du temps, ils jouissent d'un privilège refusé au physicien. Quelle que soit la théorie physique, le physicien

doit, en fin de compte, se dépêcher de vérifier par l'expérience si les quarks qui montent descendent jamais. C'est un inconvénient. Il y a indéniablement quelque chose de sordide dans la méthode expérimentale. En faisant bien moins, les mathématiciens font bien plus. Si le platonisme mathématique avait le moindre sens, aucun mathématicien ne serait autre chose qu'un platonicien.

Si l'on ne peut vivre avec le platonisme mathématique, on ne peut pas non plus vivre sans lui. Albert Einstein a un jour soutenu que, à l'instar de *l'Iliade* ou *des Ménéides*, les mathématiques sont une création libre de l'esprit humain. Est-ce *vrai* ? *Vraiment* ? Les propositions mathématiques, si elles sont vraies, le sont nécessairement ; et dire d'une création *libre* qu'elle ne pourrait en être autrement revient à évoquer l'un de ces mornes récits de prison dans lesquels le détenu fait l'éloge de sa cellule. *Rien de mieux*. Si les mathématiques étaient réductibles à la logique élémentaire, comme l'avaient espéré Gottlob Frege, Bertrand Russell et Alfred North Whitehead, l'énigme pourrait être levée ; mais nous savons désormais que la réduction doit être incomplète si le système logique est élémentaire, et non concluante s'il ne l'est pas.

Si les mathématiques restent une énigme parce que nous n'avons aucune explication de leur nature, elles restent une énigme parce que nous n'avons aucune explication de leurs origines. Noam Chomsky a un jour suggéré que les mathématiques et le langage pourraient avoir une origine commune dans la fonction successeur : $S(n) = n + 1$. Le cerveau d'un de nos ancêtres, par ailleurs tout à fait ordinaire, a subi une anomalie génétique fortuite. Des connexions qui s'étaient croisées se sont décroisées, ou l'inverse. Un singe qui, auparavant, ne pouvait rien faire en matière de récursivité, a soudain pu tout faire. La fonction successeur a rendu le langage possible en élargissant le champ des mots ; et elle a rendu l'arithmétique possible en étendant celui des nombres. Dès lors, le singe a pu compter et ses enfants ont pu parler.

C'est ingénieux sans être, le moins du monde, convaincant. Si l'on a découvert que la fonction successeur existait, c'est qu'elle était là pour être découverte, ce qui n'enlève rien à notre étonnement face à son existence. Si elle n'existait pas du tout, alors son invention doit être considérée comme un miracle cognitif.

Le caractère purement mystérieux des mathématiques aurait pu rester l'apanage de la théologie ou de l'art ; mais *non*, les mathématiques sont partout indélébiles, et dans les sciences physiques, ineffaçables. Eugene Wigner et Roger Penrose l'ont tous deux observé. Une organisation dans laquelle les mathématiques et la physique partagent un même espace implique inévitablement un brouillage des frontières. Nous, philosophes, n'avons rien contre

les frontières floues, mais nous ne proposons pas non plus de les accueillir avec exubérance. Et ce, pour la raison la plus évidente qui soit. Le matérialisme métaphysique, ou physicalisme, est la doctrine la plus répandue et la plus largement admise de notre époque. C'est un article de foi. Se fiant aux preuves fournies par leurs sens, des millions de personnes *ne* croient qu'en ces preuves.

Il serait embarrassant qu'une partie de l'univers physique se trouve en occultation permanente.

Les mathématiciens mènent des recherches ; ils se réunissent dans des salles de comité ; ils enseignent, ils discutent, ils bavardent. Au sein de cet environnement extrêmement artificiel, il existe, comme il se doit, d'importantes différences de temps et de lieu. Les grands mathématiciens du XVIIIe siècle rayonnaient d'extase. On disait de Leonhard Euler qu'il calculait aussi facilement qu'il respirait, même si une partie de ce qu'il inspirait, il ne parvenait pas tout à fait à l'expirer. Lorsqu'il ne parvenait pas à justifier la somme d'une série infinie, il la calculait quand même. Et retenait son souffle. Il n'est pas surprenant qu'il soit devenu aveugle à cause de la pression exercée sur son nerf optique. Le mathématicien anglais Francis Maseres, en revanche, imaginait plutôt que les nombres négatifs « assombrissent l'ensemble même des doctrines des équations et obscurcissent des choses qui sont, par nature, excessivement évidentes et simples ». Malgré ses dettes de bordel, personne ne parvint à le convaincre du contraire.

Un changement s'opéra dans les mathématiques et chez les mathématiciens au cours du siècle qui suivit. Des mathématiciens tels que Carl Friedrich Gauss, Augustin Cauchy, Karl Weierstrass, Leopold Kronecker et Richard Dedekind, facilement reconnaissables sur les portraits, voire les photographies, à leurs yeux petits et injectés de sang, se mirent à la tâche de remettre au pas une discipline capricieuse et anarchique. Les paradoxes de la théorie naïve des ensembles, découverts au début du XXe siècle, ont convaincu les mathématiciens qu'il valait mieux devenir aveugle en s'attardant sur les détails que de faire faillite en les ignorant. La peur de la cécité est très répandue chez les mathématiciens. En 1934, un groupe de mathématiciens français fonda le groupe Bourbaki, officiellement pour asseoir divers domaines des mathématiques sur des fondements solides issus de la théorie des ensembles. Il s'agissait d'un exercice intellectuel qui, par son mélange de snobisme et de sévérité, combinait les caractéristiques du Jockey Club — dont l'adhésion m'est d'ailleurs toujours

refusée, je dois le préciser — et d'une colonie pénitentiaire.

S'ensuivit alors une véritable explosion d'exubérance mathématique. La théorie des catégories a entamé son ascension inévitable, une théorie remarquable *tant* par son très haut niveau d'abstraction *que* par son recours concret aux diagrammes commutatifs — *des images*. Dans des dessins rappelant les caricatures de Saul Steinberg publiées *dans le New Yorker*, les objets devenaient des flèches et les flèches devenaient des objets ; mais si les images étaient charmantes, les mathématiques restaient très abstraites, introduisant ainsi au cœur même des mathématiques une façon de penser facile à visualiser mais difficile à saisir.

Les mathématiciens ont trouvé cette combinaison idéale.

Moi aussi.

Il en résulta, au cours des années soixante et soixante-dix, une magnifique série de triomphes architecturaux. À l'*Institut des Hautes Études Scientifiques*, aux portes de Paris, l'e Alexander Grothendieck lança un programme de géométrie algébrique qui, à la fin de la décennie, était devenu aussi imposant qu'une ziggourat babylonienne. Le séminaire qu'il animait — *le Séminaire de géométrie algébrique* — est devenu légendaire. Grothendieck quitta l'IHES en 1971 pour se consacrer à la réflexion et à l'activisme politique. Je me suis rendu à l'IHES quelques années plus tard. Chaque après-midi, les mathématiciens se réunissaient pour prendre le thé ensemble et regarder dans le vide. Une grande force organisatrice avait quitté les lieux. Une époque avait pris fin.



En 1967, Robert Langlands écrivit une lettre à André Weil. Grande éminence de la géométrie algébrique, Weil était un homme au goût très raffiné. Après avoir vu le Taj Mahal, il renifla d'un air déçu. « *Le mauvais goût mène au crime.* » Weil n'était pas du genre à entretenir une correspondance informelle.

Langlands, en revanche, était un étudiant canadien de troisième cycle, inconnu, méconnu et non sollicité.

Dans sa lettre, Langlands esquissait un programme de recherche audacieux en mathématiques. Audacieux ? Il était flamboyant. Il avait conçu les différentes disciplines mathématiques comme s'il s'agissait de masques dans un drame Nô. Sous chacun d'eux, un seul et même visage. La théorie des nombres, la géométrie et les corps de fonctions étaient ainsi reliés. Ce sont là des objets qui semblaient inviolables dans leur majesté et, par conséquent, dans leur isolement. C'est désormais l'inverse qui semble le plus proche de la

vérité. Les nombres, les formes et les corps sont comme trois masques dans une pièce de théâtre Nô. Les mathématiciens impliqués dans le programme de Langlands s'attendent à ce qu'ils tombent, révélant enfin les yeux noirs perçants de l'acteur de théâtre Nô qui les portait depuis le début.

Robert Langlands n'avait rien de la force démoniaque de Grothendieck. Il ne se rasait pas la tête. Personne ne pouvait l'imaginer quittant l'Institute for Advanced Study de Princeton pour se rendre, en sandales éraflées, à une manifestation contre la guerre. Il possédait néanmoins ce qui manquait à Grothendieck : la ruse d'un grand administrateur. S'il ressemblait à quelqu'un, c'était à James E. Webb, qui dirigeait la NASA à l'époque glorieuse du programme Apollo.

Le programme de Langlands amusait André Weil, qui s'amusait très rarement, et il prit son essor. Lorsque, dans les années 1990, Andrew Wiles apporta enfin une preuve correcte du dernier théorème de Fermat, il le fit en s'appuyant sur la conjecture de Shimura-Taniyama. Introduite dans les années 1950, la conjecture de Shimura-Taniyama établissait un lien entre les formes modulaires et les courbes elliptiques. Goro Shimura et Takata Taniyama connaissaient parfaitement le théâtre Nô. Ils avaient donné aux mathématiques des masques de leur propre création.



Dans Matthieu 20, 16, il est écrit : « Les derniers seront les premiers, et les premiers seront les derniers. »

Pendant très longtemps, la logique mathématique avait semblé, aux yeux de la plupart des mathématiciens, figurer parmi les dernières des dernières. Au cours des années 1930, cette discipline a connu une renaissance. Kurt Gödel publia ses théorèmes d'incomplétude en 1931. Les logiciens avaient espéré que l'arithmétique fût démontrablement cohérente et complète. Ils furent déçus. Elle n'était ni l'une ni l'autre. Si elle était cohérente, elle était incomplète, et si elle était incomplète, elle ne pouvait démontrer sa propre cohérence. Gödel avait vingt-quatre ans. Il n'occupait encore aucun poste officiel à l'université de Vienne, si ce n'est celui d'attirer la foudre.

À Princeton, ville pâle, placide et presbytérienne, la foudre frappa deux fois, sans doute pour s'assurer de l'emplacement. En 1936, Alonzo Church démontra que l'arithmétique était indécidable, tout comme incomplète. À l'instar de la logique du premier ordre elle-même, l'arithmétique se situait hors de portée de toute procédure de décision formelle. Par la suite, Alan Turing démontra que le problème de l'arrêt était insoluble. Il

n'existe aucun schéma mécanique permettant de tester tous les autres.

Pendant plus de trois siècles, le calcul avait semblé aux mathématiciens être la plus profonde des idées mathématiques. Sans lui, il ne pourrait y avoir de physique théorique. Gödel, Church et Turing avaient défini, ou découvert, l'idée radicalement différente d'un algorithme. Si cette idée était ancienne dans l'expérience humaine, elle était restée longtemps latente dans la conscience humaine. Elle se manifestait désormais au grand jour. Gödel s'appuyait sur les fonctions récursives ; Church, sur le calcul de la conversion lambda ; et Turing, sur ce qu'il appelait une machine automatique. Bien que trois définitions fussent proposées, un seul concept – la calculabilité – faisait l'objet d'une définition. Ce concept était absolu, affirmait Gödel, car les définitions étaient équivalentes.

Bien que les définitions *fussent* équivalentes, elles n'avaient pas la même force rhétorique. La machine automatique de Turing devint très rapidement la machine de Turing. Ce nom s'imposa en raison de la grande simplicité de l'idée qu'il renvoyait. Une machine de Turing se compose d'une bande infinie divisée en cases, d'une tête de lecture et d'écriture se déplaçant d'une case à la fois, d'une poignée de symboles ; d'une liste finie d'instructions du type « se déplacer vers la gauche », « se déplacer vers la droite », « ne pas bouger d'un pouce », et rien de plus.

Simple, précise, convaincante. Une fois vue, impossible de l'oublier.

La machine de Turing a servi de modèle à l'ordinateur numérique, et l'ordinateur numérique est devenu le modèle des systèmes d'intelligence artificielle désormais omniprésents et source de crainte partout.

Les mathématiciens n'ont embrassé ce qu'ils ne pouvaient plus ignorer que lorsqu'ils ne pouvaient plus ignorer ce qu'ils refusaient d'embrasser, mais même face aux preuves qui les entouraient, leurs avancées restaient tièdes, comme des pandas contraints de s'accoupler.

Kurt Gödel ne devint professeur titulaire à l'Institute for Advanced Study qu'en 1951 ; Alan Turing s'est illustré comme décrypteur de codes pendant la Seconde Guerre mondiale et a ensuite été traqué jusqu'à sa mort par un gouvernement alarmé par son homosexualité ; mais lorsqu'Alonzo Church prit sa retraite du département de mathématiques de Princeton, qui avait longtemps ignoré son génie, il accepta un poste à l'université de Californie à Los Angeles, où, vêtu d'une robe de soie flottante, il répondit à l'admiration des philosophes avec toute la dignité d'un pacha oriental.

Là, au moins, les derniers étaient devenus les premiers.