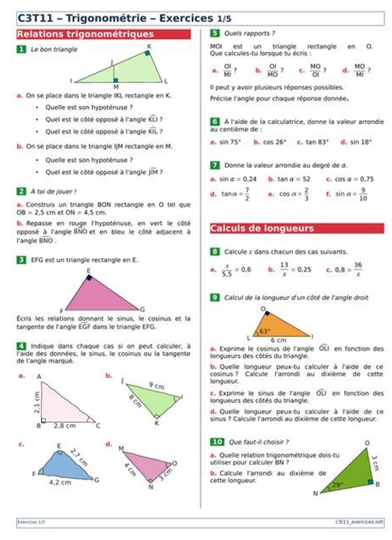
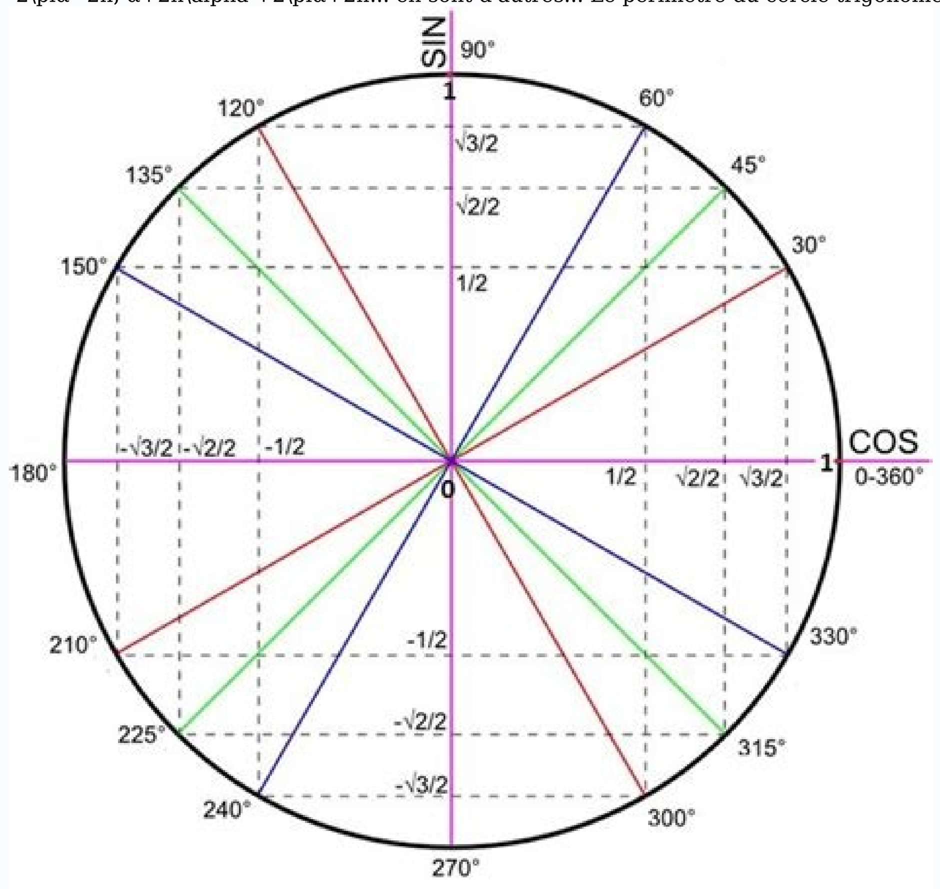
Cours sur la trigonométrie 1ere s pdf

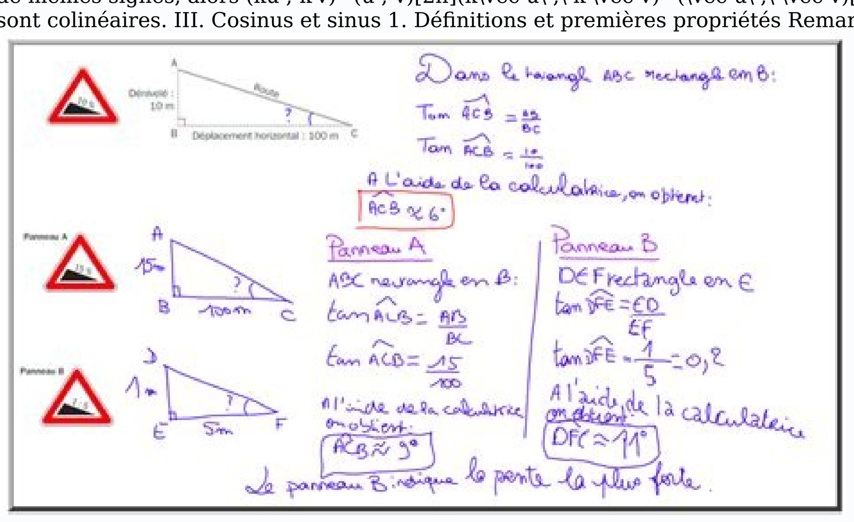
Angles orientés Un peu d’histoire… La trigonométrie (qui vient du grec trigonos « triangulaire » et de metron « mesure ») est une branche des mathématiques qui traite des rapports de distance et d’angles dans les triangles et de fonctions trigonométriques telles que sinus, cosinus et tangente. Les origines de la trigonométrie remontent aux civilisations d’Egypte antique, de Mésopotamie et de la vallée de l’Indus, il y a plus de 4 000 ans. La première utilisation du sinus apparaît dans les sulbasutras en Inde entre 800 et 500 avant Jésus Christ. Les sulbasutras sont des textes indiens qui contiennent l’ensemble des connaissances requises pour ériger des temples et des autels. Les fonctions trigonométriques furent étudiées plus tard par le mathématicien grec Hipparque de Nicée (190 av. J.C. – 120 av. J.C.) qui construisit les premières tables trigonométriques. Les travaux d’Hipparque furent poursuivis en Egypte par Ptolémée (90 – 168) qui développa des formules d’addition et de soustraction. Lignes trigonométriques Quelques points importants à retenir : Définition Soit un repère orthonormé direct. Soient et deux vecteurs non nuls, t une mesure en radians de l’angle et M le point image de t sur le cercle C. Autrement dit on a Premières propriétés Propriété Pour tout nombre réel t et tout nombre entier relatif k on a • • • • • On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π Remarque Les mesures d’un angle orienté ont toutes le même cosinus et le même sinus.



Le cosinus et le sinus d’un angle orienté ne dépendent donc pas de la mesure choisie. Tangente Définition Soit t un nombre réel. Si où k un nombre entier relatif, la tangente de t est le nombre réel Valeurs particulières Les valeurs particulières suivantes doivent être connues : Important Lignes trigonométriques des angles associés Pour tout nombre réel t, on a les égalités suivantes : Angles associés et . Angles associés et . Formules d’addition Point cléf Pour tous nombres réels a et b on a cos (a+b) = cos a cos b – sin a sin b cos (a-b) = cos a cos b + sin a sin b sin (a+b) = sin a cos b + cos a sin b sin (a-b) = sin a cos b – cos a sin b Formules d’addition : démonstration Le plan est rapporté à un repère orthonormé Soient a et b deux nombres réels . Soit a le point du cercle trigonométrique correspondant à a Soit b le point du cercle trigonométrique correspondant à a+b Soit c le point du cercle trigonométrique correspondant à Le point t A a pour coordonnées (cos a , sin a) Le point C a pour coordonnées On a donc Dans le repère orthonormé le point B a pour coordonnées (cos b ,sin b) D’où On a donc Par ailleurs , dans le repère , le point B a pour coordonnées (cos(a+b), sin (a+b)) On en déduit Ces égalités était valables pour tous nombre réels a et b, en remplaçant b par –b, on obtient c’est-à-dire et c’est-à-dire Formules de duplication Pour tout nombre réel a on a cos (2a) = cos2 a – sin2 a = 2cos2 a - 1 = 1 – 2sin2 a sin (2a) = 2sin a cos a Formules de duplication : démonstration On a, pour tous a et b réels, d’où en posant b=a De plus, d’où Et De même d’où, en posant b=a Formules de linéarisation Des formules de duplication, on déduit les formules de linéarisation : Equations trigonométriques Une équation trigonométrique est une équation dans laquelle l’inconnue apparaît à travers ses lignes trigonométriques. Exemples Les équations ci-dessous sont des équations trigonométriques d’inconnue x : 1) Trouver tel que 2) Résoudre l’équation Résolution de l’équation cos x = a Soit à résoudre dans ℝ l’équation cos x=a Ou a est un nombre réel .soit S l’ensemble des solutions il faut distinguer deux cas: * Si IaI >1 l’équation n’a pas de solution car, pour tout *Si IaI L’équation admet une infinité de solutions : L’ensemble des solutions est Exemples Résoudre l’équation Résolution de l’équation sin x = a Soit à résoudre dans ℝ l’équation sin x=a Ou a est un nombre réel . Soit S l’ensemble des solutions. Il fut distinguer deux cas : • Si IaI >1 l’équation n’ a pas de solution Car, pour tout , • Si IaI dans L’intervalle l’équation admet une infinité de solutions : L’ensemble des solutions est Exemples Résoudre l’équation On en déduit On note C\mathcal CC le cercle trigonométrique, c'est-à-dire un cercle de centre OOO et de rayon 1, d'origine OOO et orienté positivement.
Grâce à l'algorithme d'enroulement de la tangente (D)\mathcal (D)(D) au cercle trigonométrique rappelé ci-dessous, on peut associer à tout réel xxx un unique point M(x)M(x)M(x) du cercle C\mathcal CC. On remarque alors que : "xxx repère le point" ou "xxx est une mesure de l'angle IOM^\widehat{IOM}IOM" Propriété : Pour tout réel xxx et tout entier kkk, les points M(x)M(x)M(x) et M(x+2kπ)M(x+2k\pi)M(x+2kπ) sont confondus. Remarque : Le sens positif, ou trigonométique correspond au sens contraire des aiguilles d'une montre. 2. Mesure en radian d'un angle. Remarque : La mesure en radian d'un angle IOM^\widehat{IOM}IOM correspond à la longueur de son arc IMIMIM. Propriété : Les mesures en degrés et en radians d'un angle géométrique sont proportionnelles. La méthode de conversion repose sur le tableau de proportionnalité suivant : Mesure en degrés 180 ddd Mesure en radians π\piπ α\alphaα On peut résumer les différentes correspondances usuelles dans le tableau suivant : xxx en radians 0 π6\frac{\pi}{6}6π π4\frac{\pi}{4}4π π3\frac{\pi}{3}3π π2\frac{\pi}{2}2π 2π3\frac{2\pi}{3}32π 3π4\frac{3\pi}{4}43π 5π6\frac{5\pi}{6}65π π\piπ 2π2\pi2π xxx en degrés 0 30 45 60 90 120 135 150 180 360 3. Mesure principale d'un angle. Un angle possède en radians un infinité de mesures : Si α\alphaα en est une, alors α−4π\alpha -4\piα−4π, α−2π\alpha -2\piα−2π, α+2π\alpha +2\piα+2π... en sont d'autres... Le périmètre du cercle trigonométrique étant de mesure 2π2\pi2π, on a la définition suivante : II. Angles de vecteurs. Dans toute cette partie, u⃗\vec uu et v⃗\vec vv sont deux vecteurs non nuls. 1.



Définitions et mesure d'un angle de vecteurs. Sur la figure ci-dessus, les vecteurs u⃗\vec uu et v⃗\vec vv dirigent les demi-droites d'origine OOO et passant par MMM et NNN respectivement. Ainsi, une mesure de l'angle (u⃗ ; v⃗)(\vec u\ ;\ \vec v)(u ; v) est aussi une mesure de l'angle (OM→ ; ON→)(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON})(OM ; ON). Notations : Si α\alphaα est une mesure de l'angle orienté (u⃗ ; v⃗)(\vec u\ ;\ \vec v)(u ; v), alors pour tout entier kkk, le réel α +2kπ\alpha\ +2k\piα +2kπ est une mesure de l'angle (u⃗ ; v⃗)(\vec u\ ;\ \vec v)(u ; v). On dit alors que l'angle orienté (u⃗ ; v⃗)(\vec u\ ;\ \vec v)(u ; v) a pour mesure α\alphaα modulo 2π2\pi2π On écrit aussi : (u⃗ ; v⃗)=α[2π](\vec u\ ;\ \vec v)=\alpha[2\pi](u ; v)=α[2π] Remarques : On dit qu'une mesure d'angle est définie à 2π2\pi2π près : deux mesures d'angles d'un même angle orienté sont distantes d'au moins 2π2\pi2π. Conséquences : Les mesures des angles (u⃗ ; v⃗)(\vec u\ ;\ \vec v)(u ; v) et (v⃗ ; u⃗)(\vec v\ ;\ \vec u)(v ; u) sont opposées: (v⃗ ; u⃗)=−(u⃗ ; v⃗) [2π](\vec v\ ;\ \vec u)=-(\vec u\ ;\ \vec v)\ [2\pi](v ; u)=−(u ; v) [2π] ; (u⃗ ; u⃗)=0[2π](\vec u\ ;\ \vec u)=0[2\pi](u ; u)=0[2π] (angle nul) ; (u⃗ ; −u⃗)=π[2π](\vec u\ ;\ -\vec u)=\pi [2\pi](u ; −u)=π[2π] (angle plat) ; Si (u⃗(\vec u(u et v⃗)\vec v)v) sont orthogonaux et non nuls, alors (u⃗ ; v⃗)=π2[π](\vec u\ ;\ \vec v)=\frac{\pi}{2}[\pi](u ; v)=2π[π] (angles droit) ; La mesure de l'angle orienté (u⃗ ; v⃗)(\vec u\ ;\ \vec v)(u ; v) dans l'intervalle]−π ; π]]-\pi\ ;\ \pi]]−π ; π] est sa mesure principale. 2. Propriétés des angles orientés. Propriétés : kkk et k′k'k′ sont deux réels ; u⃗\vec uu, v⃗\vec vv et w⃗\vec ww sont trois vecteurs non nuls. (u⃗ ; v⃗)=(u⃗ ; w⃗)+(w⃗ ; v⃗)[2π](\vec u\ ;\ \vec v)=(\vec u\ ;\ \vec w)+(\vec w\ ;\ \vec v)[2\pi](u ; v)=(u ; w)+(w ; v)[2π] ; Si kkk et k′k'k′ sont de mêmes signes, alors (ku⃗ ; k′v⃗)=(u⃗ ; v⃗)[2π](k\vec u\ ;\ k'\vec v)=(\vec u\ ;\ \vec v)[2\pi](ku ; k′v)=(u ; v)[2π] ; Si kkk et k′k'k′ sont de signes contraires, alors (ku⃗ ; k′v⃗)=π+(u⃗ ; v⃗)[2π](k\vec u\ ;\ k'\vec v)=\pi + (\vec u\ ;\ \vec v)[2\pi](ku ; k′v)=π+(u ; v)[2π] ; (u⃗ ; v⃗)=0[π](\vec u\ ;\ \vec v)=0[\pi](u ; v)=0[π] si et seulement si les vecteurs u⃗\vec uu et v⃗\vec vv sont colinéaires. III. Cosinus et sinus 1. Définitions et premières propriétés Remarque : Dans le repère (O ; ı⃗ , ȷ⃗)(O\ ;\ \vec i\ ,\ \vec j)(O ; i , j), le point MMM associé au réel xxx a pour coordonnées (cos(x) ; sin(x))(\cos (x)\ ;\ \sin (x))(cos(x) ; sin(x)).



Propriétés immédiates : Pour tout réel xxx, cos2(x)+sin2(x)=1\cos^2 (x) + \sin^2 (x)=1cos2(x)+sin2(x)=1 ; −1≤cos(x)≤1-1\leq\cos (x)\leq 1−1≤cos(x)≤1 et −1≤sin(x)≤1-1\leq\sin (x)\leq 1−1≤sin(x)≤1 ; cos(x+2kπ)=cos(x)\cos (x+2k\pi)=\cos (x)cos(x+2kπ)=cos(x) et sin(x+2kπ)=sin(x)\sin (x+2k\pi)=\sin (x)sin(x+2kπ)=sin(x) pour k∈Zk\in\mathbb Zk∈Z. 2. Propriétés des angles associés. On considère xxx un réel donné et MMM le point associé sur le cercle trigonométrique C\mathcal CC. Grâce aux propriétés de symétrie du cercle, certains autres points du cercle ont des coordonnées pouvant se déduire de celles de M(cos(x) ; sin(x))M(\cos (x)\ ;\ \sin (x))M(cos(x) ; sin(x)). Ces points permettent de définir ce que l'on appelle des angles associés. Propriétés des angles associés : cos(−x)=cos(x)\cos(-x)=\cos (x)cos(−x)=cos(x) sin(−x)=−sin(x)\sin(-x)=-\sin (x)sin(−x)=−sin(x) Propriétés des angles supplémentaires : cos(π−x)=−cos(x)\cos (\pi -x)=-\cos (x)cos(π−x)=−cos(x) et cos(π+x)=−cos(x)\cos (\pi +x)=-\cos (x)cos(π+x)=−cos(x) sin(π−x)=sin(x)\sin (\pi -x)=\sin (x)sin(π−x)=sin(x) et sin(π+x)=−sin(x)\sin (\pi +x)=-\sin (x)sin(π+x)=−sin(x) Propriétés des angles complémentaires : cos(π2−x)=sin(x)\cos (\frac{\pi}{2} -x)=\sin (x)cos(2π−x)=sin(x) et cos(π2+x)=−sin(x)\cos (\frac{\pi}{2} +x)=-\sin (x)cos(2π+x)=−sin(x) sin(π2−x)=cos(x)\sin (\frac{\pi}{2} -x)=\cos (x)sin(2π−x)=cos(x) et sin(π2+x)=cos(x)\sin (\frac{\pi}{2} +x)=\cos (x)sin(2π+x)=cos(x) Remarque : Toutes ces propriétés peuvent se retrouver facilement sur le cercle trigonométrique suivant, en se rappelant que le cosinus d'un réel se lit sur l'axe des abscisses, alors que le sinus d'un réel se lit sur l'axe des ordonnées. Toutes nos vidéos sur trigonométrie en 1ère s D'autres interrogations sur ce cours ? Démarrez une discussion et obtenez des réponses à des exercices pratiques. Accéder au forum Identifie-toi pour voir plus de contenu.