Problemario de Ingeniería Nuclear

Tema: Fundamentos, energía y balance de momento.

Lamarsh, J. R., Baratta, A. J. 2001. Introduction to Nuclear Engineering. Prentice Hall, Third Edition.

Red Mexicana de Educación, Capacitación e Investigación Nuclear

Ejercicio 1.

Un fotón posee momento, por lo cual un átomo libre (o un núcleo) retrocede cuando emite un fotón. Sea E la energía entre dos estados energéticos de un átomo o núcleo de masa M, y E_γ la energía del fotón emitido debido a la transición entre dichos estados. Demuestre que:

$$E_\gamma \approx E\left(1-\frac{E}{2Mc^2}\right)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Solución:

De acuerdo con la información que nos da el problema, definiremos como E la energía entre los dos estados energéticos y E_γ la energía del fotón. Por lo anterior, la primera ecuación de balance que plantearemos es la siguiente:

$$E = E_\gamma + E_K, \tag{1}$$

donde E_K es la energía cinética asociada con el retroceso del núcleo o átomo. Nuestra segunda ecuación de balance, por otro lado, será la relacionada con la conservación de momento:

$$P_\gamma = P, \tag{2}$$

donde P_γ representa el momento del fotón y P es el momento del núcleo o átomo, el cual consideraremos gobernado por la expresión de mecánica clásica dada por:

$$P = \sqrt{2ME_K}. \tag{3}$$

Esta aproximación es válida para núcleos y átomos, así como para contextos como el que se dan en ingeniería nuclear (Lamarsh y Baratta, 2001, p. 13). Para el caso de fotón, se tiene que:

$$P_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}. \tag{4}$$

Sustituyendo las expresiones dadas en (3) y (4) en la ecuación (2), se sigue que:

$$\underbrace{P_\gamma = P}_{\text{Ecuación (2)}} \rightarrow \frac{E_\gamma}{c} = \sqrt{2ME_K}. \tag{5}$$

Despejando de esta última ecuación, tenemos que:

$$\begin{gathered} E_\gamma = c\sqrt{2ME_K} \\ \downarrow \\ E_\gamma^2 = c^2(2ME_K) \\ \downarrow \\ \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} = E_K. \end{gathered} \tag{6}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1), se tiene que:

$$\begin{gathered} E = E_\gamma + E_K \\ \downarrow \\ E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} \\ \downarrow \\ E = E_\gamma \left(1 + \frac{E_\gamma}{2Mc^2}\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Podemos observar que nuestra ecuación se parece bastante a lo que deseamos probar, pero hay notables diferencias. La primera de ellas es que la energía del fotón aparece despejada en la expresión que buscamos, pero en la ecuación (7) aparece en dos lados y de manera cuadrática. La segunda diferencia es que el término dentro del paréntesis debe incluir una diferencia, no una suma. Una forma de reescribir dicha expresión consiste en pasar dividiendo la suma que tenemos en el lado derecho:

$$\begin{gathered} E = E_\gamma \left(1 + \frac{E_\gamma}{2Mc^2}\right) \\ \downarrow \\ \frac{E}{\left(1 + \frac{E_\gamma}{2Mc^2}\right)} = E_\gamma. \end{gathered} \tag{8}$$

Por lo regular, la energía del fotón puede considerarse menor que el producto $2Mc^2$. Por lo tanto, podemos ocupar la siguiente expansión en series:

$$\frac{1}{\left(1+\dfrac{E_\gamma}{2Mc^2}\right)} = \left(1+\frac{E_\gamma}{2Mc^2}\right)^{-1} = (1+x)^{-1} = \underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + \cdots}_{\text{Válida siempre que } |x|<1}, \tag{9}$$

la cual puede aproximarse considerando los primeros términos:

$$\left(1+\frac{E_\gamma}{2Mc^2}\right)^{-1} = (1+x)^{-1} \approx 1 - x = 1 - \frac{E_\gamma}{2Mc^2}. \tag{10}$$

Por lo anterior, se tiene que:

$$\begin{gathered}
\frac{E}{\left(1+\dfrac{E_\gamma}{2Mc^2}\right)} = E_\gamma \\
\downarrow \\
E\left(1+\frac{E_\gamma}{2Mc^2}\right)^{-1} = E_\gamma \\
\downarrow \\
\underbrace{E\left(1-\frac{E_\gamma}{2Mc^2}\right)}_{\text{Se usó la Ecuación (10)}} \approx E_\gamma \\
\downarrow \\
E - \frac{EE_\gamma}{2Mc^2} \approx E_\gamma \rightarrow \quad E \approx E_\gamma + \frac{EE_\gamma}{2Mc^2}.
\end{gathered} \tag{11}$$

Factorizando la energía del fotón de esta última ecuación se obtiene:

$$E \approx E_\gamma\left(1+\frac{E}{2Mc^2}\right). \tag{12}$$

Aplicando nuevamente el procedimiento que usamos anteriormente, de pasar dividiendo y luego una expansión en series, se tiene que:

$$\begin{gathered}
E \approx E_\gamma\left(1+\frac{E}{2Mc^2}\right) \\
\downarrow \\
\frac{E}{\left(1+\frac{E}{2Mc^2}\right)} \approx E_\gamma \\
\downarrow \\
E\left(1-\frac{E}{2Mc^2}\right) \approx E_\gamma.
\end{gathered} \tag{13}$$

Y esta última ecuación es la que deseábamos encontrar, terminado por ello con nuestro problema.

Referencias:

Lamarsh, J. R., Baratta, A. J. 2001. Introduction to Nuclear Engineering. Third Edition. Prentice Hall.