Tema: Ecuación de Difusión

Lamarsh, J. R., Baratta, A. J. 2001. Introduction to Nuclear Engineering. Prentice Hall, Third Edition.

Red Mexicana de Educación, Capacitación e Investigación Nuclear

Ejercicio 2.

La ecuación estacionaria de difusión de neutrones monoenergéticos, en coordenadas esféricas en un medio difusivo homogéneo y considerando una fuente puntual isotrópica de neutrones, puede escribirse del modo siguiente:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi(r)}{dr}\right)-\frac{1}{L^2}\phi(r)=0,$$

para $r \neq 0$. Demuestre que, usando un adecuado cambio de variable, dicha ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{L^2}w=0,$$

y usando esta última expresión, encuentre la solución general de la ecuación diferencial original.

Solución:

Contexto: resulta conveniente deducir la ecuación que nos está proporcionando el problema para dar un contexto al lector sobre su desarrollo. Para ello partimos de la ecuación estacionaria de difusión, la cual puede escribirse como (Lamarsh y Baratta, 2001, p. 237):

$$\nabla^2\phi(r)-\frac{1}{L^2}\phi(r)=\frac{-S}{D}, \tag{1}$$

donde $\phi(r)$ es el flujo neutrónico, S es la fuente, D es el coeficiente de difusión (que se asume constante) y L^2 es el área de difusión. Esta última, a su vez, está definida por:

$$L^2=\frac{D}{\Sigma_a}, \tag{2}$$

siendo Σ_a la sección macroscópica de absorción. Usando coordenadas esféricas es posible usar la siguiente expresión para el Laplaciano (Lamarsh y Baratta, 2001, p. 750):

$$\nabla^2\phi(r)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi(r)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi(r)}{\partial\varphi^2}. \tag{3}$$

Dado que el problema asume isotropía para la fuente, que implica que no existe una dirección privilegiada para la emisión de los neutrones (Landau y Lifshitz, 1991, p. 82), entonces se sigue que las siguientes derivadas parciales del flujo se anularían:

$$\frac{\partial \phi(r)}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \phi(r)}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{4}$$

y por lo tanto la expresión (3) se reduce a:

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi(r)}{\partial r}\right). \tag{5}$$

Como el término fuente vale cero para todo $r \neq 0$, podemos concluir que el lado derecho de la ecuación (1) se anula para dichas posiciones. Combinando esto con la ecuación (5), se llega a la ecuación de la que parte el problema:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr}\right) - \frac{1}{L^2}\phi(r) = 0, \ \ \text{para } r \neq 0. \tag{6}$$

Una vez construida tal expresión, pasemos a efectuar el cambio de variable pedido.

Cambio de variable: para encontrar el cambio de variable, podemos observar que la variable r^2 que aparece dentro del primer término en la ecuación (6) desaparece en la ecuación a la que nos piden llegar. Es decir, se encuentra ausente. Por lo tanto, un candidato natural para nuestro cambio de variable es el siguiente producto:

$$\underbrace{w = r\phi(r)}_{\text{Cambio de variable propuesto}} \qquad \rightarrow \ \frac{w}{r} = \phi(r). \tag{7}$$

Sustituyéndolo en la ecuación (6) y calculando la derivada, se tiene que:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\left(\frac{w}{r}\right)\right) - \frac{1}{L^2}\frac{w}{r} = 0,$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \quad \underbrace{\frac{r\frac{dw}{dr} - w\frac{dr}{dr}}{r^2}}_{\substack{\text{Derivada del cociente}\\ \text{de } \frac{w}{r}}}\right) - \frac{1}{L^2}\frac{w}{r} = 0. \tag{8}$$

Cancelando el término r^2 y observando que $\frac{dr}{dr} = 1$, se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr} - w\right) - \frac{1}{L^2}\frac{w}{r} = 0. \tag{9}$$

La derivada del término dentro del paréntesis está dada por:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}-w\right)=\underbrace{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)-\frac{dw}{dr}}_{\text{Derivada de la resta}}$$

$$=\underbrace{\frac{dw}{dr}\frac{dr}{dr}+r\frac{d^2w}{dr^2}}_{\text{Derivada del producto}}-\frac{dw}{dr}=\frac{dw}{dr}+r\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{dw}{dr}=r\frac{d^2w}{dr^2}. \tag{10}$$

Sustituyendo (10) en (9), se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r^2}\underbrace{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}-w\right)}_{\text{Sustituyendo (10)}}-\frac{1}{L^2}\frac{w}{r}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{r^2}r\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{L^2}\frac{w}{r}=0. \tag{11}$$

Multiplicando ambos lados por r, se llega a la expresión pedida:

$$r\frac{1}{r^2}r\frac{d^2w}{dr^2}-r\frac{1}{L^2}\frac{w}{r}=0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{w}{L^2}=0}. \tag{12}$$

Y con esto resolvemos la primera parte del ejercicio, pasemos ahora a la solución general.
Solución general: el polinomio característico de la ecuación diferencial (12) está dado por (Zill, 2009, p. 133):

$$u^2-\frac{1}{L^2}=0, \tag{13}$$

cuyas raíces son $u=\pm\frac{1}{L}$. Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial está dada por:

$$w=A_1\exp\left(\frac{r}{L}\right)+A_2\exp\left(-\frac{r}{L}\right). \tag{14}$$

donde A_1 y A_2 son constantes. Finalmente, revertiendo el cambio de variable que anterior mente se propuso, se tiene que:

$$w=r\phi(r)$$

$$\downarrow$$

$$r\phi(r)=A_1\exp\left(\frac{r}{L}\right)+A_2\exp\left(-\frac{r}{L}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\phi(r)=A_1\frac{\exp\left(\frac{r}{L}\right)}{r}+A_2\frac{\exp\left(-\frac{r}{L}\right)}{r}} \tag{15}$$

Terminando con esto el problema.

Notas finales: la ecuación (15) solo es válida para $r \neq 0$, lo cual es obvio debido a que dicho dicho valor conduciría a una indeterminación debido al término $\frac{1}{r}$. Pero tal restricción también aparece porque la ecuación de balance (6) se resolvió en todo punto, salvo en el origen, lo cual por un lado permite ignorar la fuente, y por el otro obedece a las limitaciones propias del modelo de difusión. Una forma más general de resolver el problema es considerando la siguiente expresión:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\phi(r)}{dr}\right) - \frac{1}{L^2}\phi(r) = \frac{\delta(r)S}{D}, \tag{16}$$

donde $\delta(r)$ es la delta de Dirac (Zill, 2009, p. 292), la cual está definida como:

$$\delta(r) = \begin{cases} \infty, & \text{cuando } r = 0 \\ 0, & r \neq 0 \end{cases}. \tag{17}$$

Dicha distribución será muy útil en futuros problemas donde se requiera construir la función de Green, y donde sea necesario aplicar transformaciones integrales para encontrar la resolver la ecuación de difusión. Finalmente, el cambio de variable propuesto funcionó adecuadamente en este problema, pero en muchos casos es necesario intentar a prueba y error, pues no siempre se puede simplificar un sistema como el actual. Existen métodos más avanzados que permiten proponer cambios de variable, como sucede en problemas de cinética puntual, pero de eso hablaremos después.

Referencias:

Lamarsh, J. R., Baratta, A. J. 2001. Introduction to Nuclear Engineering. Third Edition. Prentice Hall.

Landau, L. D., Lifshitz, E. M. 1991. Course of Theoretical Physics. Vol. 3. Quantum Mechanics. Pergamon Press.

Zill, D. G., Cullen, M. R. 2009. Differential Equations with Boundary-Value Problems. Brooks/Cole CENGAGE Learning. Seventh Edition.