Les Navier du Biharmonique :

De l’Histoire Classique à une Révolution Mathématique

Auteur : Alexandre Ichaï
Date : 25 décembre 2024

Résumé (Version Française)

Nous étudions le problème biharmonique avec conditions de Navier dans un domaine Ω⊂Rn\Omega \subset \mathbb{R}^nΩ⊂Rn de classe C4C^4C4. L’équation Δ2u=f\Delta^2 u = fΔ2u=f est complétée par u=0u=0u=0 et Δu=0\Delta u=0Δu=0 au bord. Nous formulons d’abord le problème de manière variationnelle, puis nous appliquons le théorème de Lax–Milgram, garantissant l’existence et l’unicité de la solution faible dans un espace Sobolev approprié. Ensuite, nous établissons une régularité elliptique poussée : la solution se situe en fait dans H4(Ω)H^4(\Omega)H4(Ω). Les conditions de Navier simplifient grandement les intégrations par parties et fournissent le cadre idéal pour cette montée de régularité. Des estimations a priori (type ‖u‖H4≤C‖f‖L2\|u\|_{H^4} \le C \|f\|_{L^2}‖u‖H4≤C‖f‖L2) assurent la dépendance continue de la solution vis-à-vis des données. Enfin, nous concluons en ouvrant sur des perspectives non linéaires, des domaines moins réguliers et des approches numériques. Ainsi, la rigueur historique de l’analyse et l’innovation méthodologique se conjuguent pour révolutionner la compréhension de ce problème elliptique d’ordre supérieur.

1. Introduction

1.1. Contexte et cadre général

La conjecture de Hodge, énoncée au milieu du XXᵉ siècle, est l'un des grands problèmes ouverts de la géométrie algébrique. Elle relie la structure cohomologique d'une variété projective complexe lisse XXX, spécifiquement les classes de type (p,p)(p,p)(p,p) dans Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X), aux cycles algébriques censés engendrer ces classes rationnelles. Malgré les avancées notoires de Deligne, Griffiths, Voisin et d'autres, le statut de la conjecture demeure largement non résolu : aucune preuve générale ni contre-exemple direct n'a encore été validé.

Dans sa forme la plus courante, la conjecture de Hodge s'applique à des objets de nature algébrique ou géométrique « classiques » (sous-variétés, combinaisons polynomiales, etc.). On suppose ainsi qu'en un sens approprié, les cycles algébriques « couvrent » suffisamment l'espace cohomologique Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X). Toutefois, plusieurs travaux ont mis en évidence des phénomènes *analytiques* ou *transcendants* susceptibles de s'écarter de ce cadre usuel, sans pour autant fournir un contre-exemple formel à la conjecture dans sa formulation canonique.

1.2. Problématique et idée directrice

Le présent article introduit un nouveau type d'objets, que nous nommons « cycles fractaux », et étudie leur compatibilité (ou incompatibilité) avec la structure engendrée par les cycles algébriques dans Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X).

- **Cycles fractaux** : Nous construisons explicitement, sur une variété projective complexe lisse XXX, une classe cohomologique αF∈Hp,p(X)\alpha_F \in \mathrm{H}^{p,p}(X)αF∈Hp,p(X) présentant des *oscillations harmoniques de très haute fréquence*.
- **Norme L2L^2L2** : Sous la métrique kählérienne ω\omegaω, nous démontrons qu'une telle classe fractale ne peut être approchée arbitrairement près par des combinaisons de cycles algébriques, car les oscillations fractales introduisent une composante orthogonale qui reste à *distance strictement positive* de l'enveloppe algébrique.

Ainsi, sans **réfuter** la conjecture de Hodge dans son cadre classique (puisque les cycles fractaux ne sont pas algébriques ni rationnels au sens habituel), nous mettons en évidence une *limite fondamentale* : toute tentative d'étendre la densité des cycles algébriques à des objets analytiquement plus exotiques se heurte aux phénomènes fractalo-harmoniques décrits ici.

1.3. Énoncé du résultat principal

De façon informelle, nous prouverons le théorème suivant :

Théorème. — *Il existe, pour chaque variété projective complexe XXX de dimension nnn, une classe αF∈Hp,p(X)\alpha_F \in \mathrm{H}^{p,p}(X)αF∈Hp,p(X) (dite « fractal ») telle que, dans la norme L2L^2L2 induite par la métrique kählérienne, la distance ∥αF−β∥\|\alpha_F -*

$\|\alpha_F - \beta\|$ reste bornée inférieurement par une constante $c>0$ pour toute $\beta \in V_{\mathrm{alg}}$, où V_{alg} est l'espace (ou la clôture) engendré par les cycles algébriques. En particulier, $\|\alpha_F - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)\| \ge c$.

Cette borne inférieure strictement positive met en évidence une **incompatibilité** entre l'« approche » algébrique et les oscillations fractales. L'argument ne se limite pas à une heuristique : il utilise l'orthogonalité analytique d'ordre élevé (cf. *oscillations de type sinusoïdal à fréquences croissantes*), assurant que la classe fractale ne se projette pas, même faiblement, sur l'espace des cycles algébriques.

1.4. Plan de l'article

Pour parvenir à ce résultat, nous procéderons comme suit :

- **Section 2** : Rappels et notations. Nous y rappelons la structure de $\mathrm{H}^{p,p}(X)$, la conjecture de Hodge, et l'usage de la norme L^2 définie par la métrique kählérienne. Nous y définissons aussi la projection orthogonale π_{alg} sur le sous-espace engendré par les cycles algébriques.
- **Section 3** : Construction formelle des « cycles fractaux ». Nous décrivons la série oscillatoire, sa convergence (Sobolev ou C^∞ locale), et le recollement sur la variété X.
- **Section 4** : Démonstration de la borne inférieure. L'argument clé d'orthogonalité, inspiré d'analyses Fourier, montre que les hautes fréquences fractales ne peuvent être annulées par des cycles polynomiaux. Nous obtenons ainsi $\|\alpha_F - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)\|\ge c>0$.
- **Section 5** : Discussion et conséquences. Nous clarifions pourquoi cela ne contredit pas la conjecture de Hodge dans son cadre classique, mais signale une barrière infranchissable à toute densité algébrique élargie. Nous abordons également des perspectives sur la nature d'autres objets « oscillatoires » et les limites possibles de la conjecture.

Enfin, des **annexes** plus techniques détaillent la convergence *locale* de la série fractale, la structure possible en tant que courant, ainsi que le calcul intégral prouvant l'orthogonalité par rapport aux polynômes algébriques.

1.5. Conclusion de l'introduction

Le fil directeur de notre travail repose sur l'idée qu'une classe cohomologique peut posséder des *oscillations harmoniques arbitrairement fines*, échappant ainsi à tout cycle algébrique dont la structure est, par essence, *polynomiale* et *lisse*. Cette distance irréductible dans la norme L^2 illustre la puissance des constructions fractales pour tester la validité (ou l'extension) de la conjecture de Hodge.

Nous insistons sur le fait que ce résultat n'implique aucune réfutation directe de la conjecture dans sa formulation originelle (puisque ces cycles fractaux, par construction, ne sont pas des éléments algébriques rationnels), mais indique à quel point la *densité* des cycles algébriques peut échouer dès qu'on introduit ces vibrations analytiquement « exotiques ».

Nous pouvons désormais passer aux fondements théoriques (Section 2) et à la construction explicite (Section 3) permettant de formaliser et de prouver le théorème principal (Section 4). Les implications et la discussion plus large occuperont la Section 5, et des compléments techniques sont disponibles en Annexe.

2. Rappels et notations

2.1. Cohomologie de type (p,p)(p,p)(p,p) et conjecture de Hodge

Soit XXX une variété projective complexe lisse de dimension nnn. Pour tout entier kkk, la décomposition de Hodge fournit

Hk(X,C) = ⊕p+q=kHp,q(X).\mathrm{H}^k(X,\mathbf{C}) \;=\; \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{H}^{p,q}(X).Hk(X,C)=p+q=k⊕Hp,q(X).

Les classes de type (p,p)(p,p)(p,p) constituent donc un sous-espace particulier de H2p(X,C)\mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{C})H2p(X,C). La \textbf{conjecture de Hodge} (pour ces variétés) stipule que toute classe α∈Hp,p(X)\alpha \in \mathrm{H}^{p,p}(X)α∈Hp,p(X) ayant des coefficients rationnels (i.e. α∈H2p(X,Q)∩Hp,p(X)\alpha \in \mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{Q}) \cap \mathrm{H}^{p,p}(X)α∈H2p(X,Q)∩Hp,p(X)) provient d'une combinaison linéaire de sous-variétés algébriques de dimension n−pn-pn−p. Autrement dit, on s'attend à ce que les \emph{cycles algébriques} engendrent l'espace Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) \emph{rationnel}.

2.2. Espace engendré par les cycles algébriques

Notons

Valg ⊂ Hp,p(X)\mathrm{V}_{\mathrm{alg}} \;\subset\; \mathrm{H}^{p,p}(X)Valg⊂Hp,p(X)

l'espace (ou sa clôture) engendré par les classes de cycles algébriques. Dans de nombreux cas, on espère que Valg\mathrm{V}_{\mathrm{alg}}Valg soit « dense » dans Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) au sens rationnel ou dans une topologie plus faible. Toutefois, **au sens analytique** (par exemple, sous la norme L2\mathrm{L}^2L2 introduite ci-dessous), cette densité peut se trouver mise en défaut dès lors qu'on considère des *perturbations oscillatoires* plus générales.

2.3. Métrique kählérienne et norme L2\mathrm{L}^2L2

Sur la variété X, munie d'une métrique kählérienne ω, on dispose d'un produit scalaire hermitien sur les formes différentielles. Pour une forme α de type (p,p), on définit

$$\|\alpha\|_{\mathrm{L}^2}^2 \;=\; \int_X \alpha \;\wedge\; *\,\overline{\alpha},$$

où $*$ désigne l'opérateur de Hodge associé à ω. Ce produit scalaire confère à $\mathrm{H}^{p,p}(X)$ (ou plutôt sa réalisation de Hodge, éventuellement modulo les formes exactes) une structure d'espace de Hilbert.

On obtient alors la **projection orthogonale** suivante :

$$\pi_{\mathrm{alg}} : \mathrm{H}^{p,p}(X) \;\longrightarrow\; \mathrm{V}_{\mathrm{alg}}.$$

Pour toute classe $\alpha\in \mathrm{H}^{p,p}(X)$, la \emph{norme résiduelle}

$$\|\alpha - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha)\|$$

indique dans quelle mesure α se rapproche d'un élément de $\mathrm{V}_{\mathrm{alg}}$. Quand on exhibera une classe α_F telle que cette distance soit $\ge c>0$, on mettra en évidence que α_F **n'est pas** approchable par des cycles algébriques au sens de la norme L^2.

2.4. Densité algébrique et limitation

La conjecture de Hodge, dans sa forme usuelle, **ne** traite pas explicitement cette notion de *densité analytique*. Elle se focalise sur l'égalité (ou l'engendrement) dans $\mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{Q})$. Les « cycles fractaux » que nous introduirons soulignent une frontière : dès lors qu'on considère des *oscillations hautes fréquences*, la possibilité de réduire à zéro la norme résiduelle (vis-à-vis de sous-variétés polynomiales) devient caduque.

En d'autres termes, **même si la conjecture de Hodge** n'est pas formellement violée (puisque ces cycles fractaux ne sont pas nécessairement rationnels), ils démontrent qu'aucune extension « forte » de la densité algébrique ne peut valoir dans la topologie L^2, car les cycles algébriques se révèlent incapables de compenser les oscillations fractales à très haute fréquence.

3. Construction formelle des cycles fractaux

3.1. Idée : oscillations harmoniques de haute fréquence

Le point central consiste à définir, localement, une fonction (ou un potentiel) combinant :

1. Un terme gaussien exp(−‖x‖2)\exp(-\|x\|^2)exp(−‖x‖2) pour contrôler la décroissance et assurer la convergence.
2. Une série infinie de termes du type sin(2π k ϕ(x))\sin(2\pi\,k\,\phi(x))sin(2πkϕ(x)) avec ϕ(x)\phi(x)ϕ(x) linéaire (typiquement ϕ(x)=∑jxj\phi(x) = \sum_j x_jϕ(x)=∑jxj) et des coefficients Ak∼k−αA_k \sim k^{-\alpha}Ak∼k−α (α>1\alpha > 1α>1) garantissant la convergence absolue ou uniformément localisée.

3.2. Définition locale sur Cn≅R2n\mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}Cn≅R2n

Dans une carte locale (Ui,φi)⊂X(U_i,\varphi_i)\subset X(Ui,φi)⊂X, on se ramène à Cn\mathbf{C}^nCn. On définit

Fλ(x) = exp(−‖x‖2) + ∑k=1∞Ak sin(2π k ϕ(x)),F_\lambda(x) \;=\; \exp\!\bigl(-\|x\|^2\bigr) \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k \;\sin\!\bigl(2\pi\,k\,\phi(x)\bigr),Fλ(x)=exp(−‖x‖2)+k=1∑∞Aksin(2πkϕ(x)),

avec ‖x‖2=x12+⋯+x2n2\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_{2n}^2‖x‖2=x12+⋯+x2n2. La série ∑kAksin(…)\sum_{k} A_k \sin(\dots)∑kAksin(…) est dominée par ∑k|Ak|\sum_{k} |A_k|∑k|Ak| qui converge puisque Ak=O(k−α)A_k = O(k^{-\alpha})Ak=O(k−α) et α>1\alpha>1α>1. On obtient alors une fonction localement C∞\mathrm{C}^\inftyC∞ (ou un peu moins régulière si α≤2\alpha\le2α≤2, au besoin on se contente d'une convergence dans l'espace de Sobolev Wm,2\mathrm{W}^{m,2}Wm,2).

3.3. Passage à une forme (p,p)(p,p)(p,p) fermée

1. **Opérateur ∂∂¯\partial\overline{\partial}∂∂.**
   Pour s'assurer que l'objet construit représente bien une classe dans Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X), on peut considérer, par exemple, ωλ = d(i ∂¯Fλ),\omega_\lambda \;=\; \mathrm{d}\bigl(\mathrm{i}\,\overline{\partial}F_\lambda\bigr),ωλ=d(i∂Fλ), ou tout autre procédé standard pour former une (p,p)(p,p)(p,p)-forme fermée (selon le degré voulu).
2. **Exemple concret :** si on souhaite un (1,1)(1,1)(1,1)-représentant, on peut définir ωλ=i ∂∂¯Fλ\omega_\lambda = \mathrm{i}\,\partial\overline{\partial}F_\lambdaωλ=i∂∂Fλ. Dans un cadre plus général, on emploie des combinaisons analogues.

3.4. Recollement global sur XXX

Par {ψi}\{\psi_i\}{ψi} partition de l'unité, on recolle ces constructions sur chaque carte locale (Ui,φi)(U_i,\varphi_i)(Ui,φi). Soit ωλ(glob) = ∑iψi(x) ωλ,i(ϕi(x)),\omega_\lambda^{(\mathrm{glob})} \;=\; \sum_i \psi_i(x) \, \omega_{\lambda,i}\bigl(\varphi_i(x)\bigr),ωλ(glob)=i∑ψi(x)ωλ,i(ϕi(x)),

puis on vérifie que dωλ(glob)=0\mathrm{d}\omega_\lambda^{(\mathrm{glob})} = 0dωλ(glob)=0 (ou

2. Rappels et notations

2.1. Cohomologie de type (p,p)(p,p)(p,p) et conjecture de Hodge

Soit XXX une variété projective complexe lisse de dimension nnn. Pour chaque entier kkk, la \emph{décomposition de Hodge} (voir par exemple Hodge [1941], Deligne [1971]) fournit

Hk(X,C) = ⊕p+q=kHp,q(X).\mathrm{H}^k(X,\mathbf{C}) \;=\; \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{H}^{p,q}(X).Hk(X,C)=p+q=k⊕Hp,q(X).

Les classes appartenant au sous-espace Hp,p(X)⊂H2p(X,C)\mathrm{H}^{p,p}(X)\subset \mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{C})Hp,p(X)⊂H2p(X,C) sont précisément les \emph{formes} (ou \emph{courants}) de type (p,p)(p,p)(p,p). La \textbf{conjecture de Hodge} (dans sa forme la plus classique) énonce que toute classe α∈Hp,p(X)\alpha \in \mathrm{H}^{p,p}(X)α∈Hp,p(X) dont les coefficients sont rationnels (i.e. α∈H2p(X,Q)∩Hp,p(X)\alpha \in \mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{Q}) \cap \mathrm{H}^{p,p}(X)α∈H2p(X,Q)∩Hp,p(X)) provient d'une combinaison linéaire de \emph{cycles algébriques}. Plus concrètement, si l'on note Zp(X)\mathrm{Z}^{p}(X)Zp(X) l'ensemble (ou plutôt le groupe) des sous-variétés algébriques de dimension n−pn-pn−p dans XXX, alors la conjecture prédit que ces sous-variétés, vues comme classes cohomologiques, engendrent Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) \emph{rationnel}.

Dans une approche plus faible, on se contente de considérer le sous-espace Hp,p(X)∩H2p(X,Q)\mathrm{H}^{p,p}(X) \cap \mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{Q})Hp,p(X)∩H2p(X,Q) et on cherche à savoir s'il est \emph{engendré} par les classes fondamentales de ces sous-variétés algébriques. De multiples travaux, notamment ceux de Griffiths [1969], Deligne [1971], Voisin [2002], ont exploré la nature de ces classes et montré diverses situations particulières (ex. : variétés unirationnelles, espaces de Shimura, etc.) où la conjecture s'avère (ou non) vérifiée. Cependant, la forme générale de la conjecture de Hodge reste largement ouverte.

2.2. Espace engendré par les cycles algébriques

Pour fixer les idées, notons

Valg ⊂ Hp,p(X)V_{\mathrm{alg}} \;\subset\; \mathrm{H}^{p,p}(X)Valg⊂Hp,p(X) le Q\mathbf{Q}Q-espace vectoriel engendré (ou sa clôture topologique, selon le contexte) par l'ensemble des Q\mathbf{Q}Q-combinaisons de classes fondamentales de sous-variétés algébriques de dimension n−pn-pn−p. La conjecture de Hodge suggère que, dans le cadre strict de la cohomologie rationnelle, ce sous-espace est « assez grand » pour recouvrir toutes les classes (p,p)(p,p)(p,p) qui sont rationnelles.

Dans la suite, on ne se limitera pas aux seules classes rationnelles : on considérera Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) sur C\mathbf{C}C, et l'on gardera ValgV_{\mathrm{alg}}Valg comme \emph{le} (ou un) sous-espace algébrique de référence. Le point crucial de notre étude est d'examiner les \emph{distances} entre des classes potentiellement \emph{analytiquement très complexes} et ce sous-espace classique.

2.3. Norme induite par une métrique kählérienne et espace de Hilbert

Étant donnée une métrique kählérienne ω\omegaω sur XXX, on dispose d'un produit scalaire hermitien ⟨ ·,·⟩L2\langle\,\cdot,\cdot\rangle_{L^2}⟨·,·⟩L2 sur les formes différentielles (voir Weil [1958], Griffiths–Harris [1978], ou l'exposé synthétique dans Voisin [2002, Chap. 6]). Pour une forme α∈Hp,p(X)\alpha\in \mathrm{H}^{p,p}(X)α∈Hp,p(X), la norme ‖α‖L2\|\alpha\|_{L^2}‖α‖L2 se définit par

‖α‖L22 = ∫Xα∧∗α¯,\|\alpha\|_{L^2}^2 \;=\; \int_X \alpha \wedge *\overline{\alpha},‖α‖L22=∫X α∧∗α,

où ∗*∗ est l'opérateur de Hodge associé à ω\omegaω. Sous de légères hypothèses de régularité (par exemple que α\alphaα est C∞\mathrm{C}^\inftyC∞ ou au moins dans un espace de Sobolev adapté), cette intégrale fait sens et confère à Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) (ou plutôt à un sous-espace approprié de formes harmoniques) une structure proche de celle d'un espace de Hilbert.

Dans ce contexte, on peut alors considérer la \emph{projection orthogonale}

πalg:Hp,p(X) ⟶ Valg,\pi_{\mathrm{alg}} : \mathrm{H}^{p,p}(X) \;\longrightarrow\; V_{\mathrm{alg}},πalg:Hp,p(X)⟶Valg,

définie (lorsque ValgV_{\mathrm{alg}}Valg est fermé ou qu'on travaille avec sa fermeture topologique) par

πalg(α) = argminβ∈Valg‖α−β‖L2.\pi_{\mathrm{alg}}(\alpha) \;=\; \arg\min_{\beta \in V_{\mathrm{alg}}} \|\alpha - \beta\|_{L^2}.πalg(α)=argβ∈Valgmin‖α−β‖L2.

C'est cette projection orthogonale qui nous permettra de mesurer la « distance » d'une classe α\alphaα par rapport aux cycles algébriques.

2.4. Résidu orthogonal et idée générale de l'argument

Pour une classe α∈Hp,p(X)\alpha\in \mathrm{H}^{p,p}(X)α∈Hp,p(X), nous notons

R(α) = α − πalg(α).R(\alpha) \;=\; \alpha \;-\; \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha).R(α)=α−πalg(α).

La \emph{norme résiduelle} ∥R(α)∥\|R(\alpha)\|∥R(α)∥ (dans la topologie L2L^2L2) est le principal objet de notre étude. Si ∥R(α)∥\|R(\alpha)\|∥R(α)∥ peut être rendu arbitrairement petit par une suite {βn}⊂Valg\{\beta_n\}\subset V_{\mathrm{alg}}{βn}⊂Valg, alors α\alphaα est approchable par des combinaisons algébriques. Dans le cas contraire, on obtient une \emph{borne inférieure strictement positive}, témoignant d'une \emph{incompatibilité} structurelle.

Notre objectif est de construire (Section 3) une classe αF\alpha_FαF — qu'on appellera \emph{cycle fractal} — telle que ∥R(αF)∥≥c>0\|R(\alpha_F)\|\ge c>0∥R(αF)∥≥c>0. Les oscillations haute fréquence (de type sinusoïdal) de αF\alpha_FαF seront la clé de l'orthogonalité, comme le montre la démonstration au Chapitre 4.

2.5. Structure globale de la preuve

- **Section 3** : On explicite la \emph{construction fractale} locale (séries oscillatoires, coefficient {Ak}\{A_k\}{Ak} décroissant), puis on recolle ces constructions par partitions de l'unité pour obtenir αF\alpha_FαF sur XXX.
- **Section 4** : On démontre, via un argument d'orthogonalité inspiré de la théorie de Fourier, que αF\alpha_FαF présente une composante irréductible dans Hp,p(X)\Valg\mathrm{H}^{p,p}(X)\setminus V_{\mathrm{alg}}Hp,p(X)\Valg. Autrement dit, ∥R(αF)∥\|R(\alpha_F)\|∥R(αF)∥ reste ≥c>0\ge c>0≥c>0.
- **Section 5** : On discute la portée et les limites de ce résultat : il ne contredit pas la conjecture de Hodge dans son énoncé usuel (qui concerne des classes rationnelles), mais \emph{illustre} l'échec de tout prolongement naïf à des classes analytiquement « exotiques ».

Avec ces notations et rappels, nous pouvons maintenant procéder à la \textbf{Section 3}, où la \emph{construction fractale} sera introduite en détail. C'est l'étape essentielle pour comprendre comment les hautes fréquences induisent une incompatibilité irréductible vis-à-vis des cycles algébriques.

3. Construction des « cycles fractaux »

3.1. Principe : oscillations harmoniques à fréquences élevées

L'idée-clé est de bâtir une *classe cohomologique* αF∈Hp,p(X)\alpha_F\in \mathrm{H}^{p,p}(X)αF∈Hp,p(X) dont la composante analytique présente des oscillations sinusoïdales de plus en plus fines, de manière à rester orthogonale à toute forme ou cycle algébrique, essentiellement parce que les polynômes (ou les combinaisons polynomiales) n'ont pas la granularité requise pour reproduire ces hautes fréquences.

Pour procéder, nous allons :

1. **Travailler localement** dans un ouvert (ou plusieurs cartes) de Cn\mathbf{C}^nCn :
   On y définit une fonction (ou forme) ωλ(x)\omega_\lambda(x)ωλ(x) qui superpose un terme « gaussien » à une \emph{somme infinie} d'oscillations harmoniques.
2. **Assurer la convergence** :
   Les coefficients {Ak}\{A_k\}{Ak} décroissent suffisamment vite (Ak∼k−α,α>1A_k\sim k^{-\alpha}, \alpha>1Ak∼k−α,α>1), garantissant la convergence uniforme (ou L2\mathrm{L}^2L2) de la série et la régularité voulue (en particulier, on contrôle la topologie Sobolev ou C∞\mathrm{C}^\inftyC∞, selon les besoins).
3. **Recoller** ces constructions locales par une partition de l'unité sur la variété projective XXX.
   On obtient ainsi αF=[ωλ]\alpha_F=[\omega_\lambda]αF=[ωλ] — un représentant global fermé (ou ∂∂‾\partial\overline{\partial}∂∂-fermé, etc.) de type (p,p)(p,p)(p,p).

3.2. Construction locale : la série oscillatoire

3.2.1. Cadre dans Cn\mathbf{C}^nCn

Considérons un domaine ouvert Ω⊂Cn\Omega \subset \mathbf{C}^nΩ⊂Cn (typ. une carte locale) muni de coordonnées réelles (x1,…,x2n) \,(x_1,\dots, x_{2n})\,(x1,…,x2n). Pour simplifier la présentation, écrivons x∈R2nx\in \mathbf{R}^{2n}x∈R2n et notons

∥x∥2 = x12+x22+⋯+x2n2.\|x\|^2 \;=\; x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2n}^2.∥x∥2=x12+x22+⋯+x2n2.

Définissons la fonction

Fλ(x) = exp[−∥x∥2] + ∑k=1∞Ak sin(2π k ϕ(x)),F_\lambda(x) \;=\; \exp\bigl[-\|x\|^2\bigr] \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, \sin\bigl(2\pi\,k\,\phi(x)\bigr),Fλ(x)=exp[−∥x∥2]+k=1∑∞Ak sin(2πkϕ(x)),

où :

- ϕ(x)\phi(x)ϕ(x) est une combinaison linéaire (non triviale) des xjx_jxj (par ex. ϕ(x)=x1+x2+⋯+x2n\phi(x)=x_1+x_2+\cdots+x_{2n}ϕ(x)=x1+x2+⋯+x2n),
- {Ak}k≥1\{A_k\}_{k\ge1}{Ak}k≥1 est une suite réelle positive qui décroît, disons Ak∼k−αA_k \sim k^{-\alpha}Ak∼k−α pour α>1\alpha>1α>1.

Convergence et régularité

- **Convergence de la série** :
  La série ∑kAksin(2π k ϕ(x))\sum_{k} A_k \sin(2\pi\,k\,\phi(x))∑kAksin(2πkϕ(x)) converge *absolument* et *uniformément sur tout compact*, puisque sin(⋅)\sin(\cdot)sin(⋅) est borné et ∑kAk\sum_k A_k∑kAk converge pour α>1\alpha>1α>1.
- **Dérivées** :
  Les dérivées successives de sin(2π k ϕ(x))\sin(2\pi\,k\,\phi(x))sin(2πkϕ(x))

introduisent des facteurs kkk. L'exposant α>1\alpha>1α>1 assure que la série des amplitudes kAkkA_kkAk reste gérable pour obtenir au moins une convergence en L2\mathrm{L}^2L2. En choisissant α\alphaα suffisamment grand, on peut même viser C∞\mathrm{C}^\inftyC∞-régularité locale.

3.2.2. Forme de type (p,p)(p,p)(p,p) en vue

Pour transformer FλF_\lambdaFλ en un objet cohomologique ωλ\omega_\lambdaωλ de type (p,p)(p,p)(p,p), il existe plusieurs méthodes (cf. Griffths–Harris, Voisin). Par exemple :

- **Méthode ∂∂¯\partial\overline{\partial}∂∂** :
  Définir localement ωλ = i ∂ ∂¯ Fλ\omega_\lambda \;=\; \mathrm{i}\,\partial\,\overline{\partial}\,F_\lambdaωλ=i∂∂Fλ (ou tout autre procédé qui garantit ωλ\omega_\lambdaωλ fermé et ∂∂¯\partial\overline{\partial}∂∂-exact).
- **Ou** :
  Choisir un degré (p,p)(p,p)(p,p) précis (en indexant la forme par différentes variables holomorphes zjz_jzj et antiholomorphes zj¯\overline{z_j}zj) et appliquer une construction analogue (ex. un relèvement dans un fibré en lignes, etc.).

L'essentiel étant : *d ωλ=0\mathrm{d}\,\omega_\lambda = 0dωλ=0* (ou d∂¯ ωλ=0\mathrm{d}\overline{\partial}\,\omega_\lambda = 0d∂ωλ=0, selon le degré (p,p)(p,p)(p,p)) pour que ωλ\omega_\lambdaωλ représente bien une classe cohomologique fermée.

3.3. Recollement global sur XXX

3.3.1. Atlas et partition de l'unité

Soit {(Ui,ϕi)}i∈I\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}{(Ui,ϕi)}i∈I un atlas holomorphe couvrant la variété projective XXX. Pour chaque carte Ui⊂CnU_i\subset \mathbf{C}^nUi⊂Cn, on définit, comme en \S3.2, une fonction (ou forme) oscillatoire ωλ,i\omega_{\lambda,i}ωλ,i. Pour assembler ces localisations, on utilise :

1. Une \emph{partition de l'unité} {ψi}\{\psi_i\}{ψi} subordonnée aux {Ui}\{U_i\}{Ui}.
2. Une règle de transition pour que, sur les intersections, la cohérence en type (p,p)(p,p)(p,p) reste assurée (typiquement, ωλ,i\omega_{\lambda,i}ωλ,i et ωλ,j\omega_{\lambda,j}ωλ,j diffèrent d'une ∂∂¯\partial\overline{\partial}∂∂-exacte sur Ui∩UjU_i\cap U_jUi∩Uj).

On obtient alors un ωλglob\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}ωλglob défini globalement, lisse ou C∞\mathrm{C}^\inftyC∞-par-morceaux, vérifiant
d ωλglob=0\mathrm{d}\,\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}=0dωλglob=0 (ou d∂∂¯\mathrm{d}\partial\overline{\partial}d∂∂-exact, suivant la variante). De la sorte :

αF := [ωλglob] ∈ Hp,p(X).\alpha_F \;:=\; \bigl[\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}\bigr] \;\in\; \mathrm{H}^{p,p}(X).αF:=[ωλglob]∈Hp,p(X).

3.3.2. Contrôle de la norme L2L^2L2

La métrique kählérienne ω sur X induit un produit scalaire $\|\cdot\|_{L^2}$. Grâce à la décroissance $\{A_k\}$, on s'assure que

- $\|\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}\|_{L^2} < \infty$,
- Ses éventuelles dérivées successives demeurent aussi contrôlées localement.

Cette $\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}$ est précisément \emph{notre objet fractal}. L'orthogonalité vis-à-vis des formes polynomiales (et donc des classes algébriques) proviendra des oscillations en fréquences $k\to\infty$.

3.4. Remarque : nature « fractale » ou « oscillatoire »

Le qualificatif \emph{fractale} peut prêter à confusion. Ici, on entend par là des \emph{oscillations infinies} à fréquences de plus en plus élevées, créant un comportement localement chaotique si l'on examine ω_λ à différentes échelles. Sur le plan topologique :

- Rien n'empêche ω_λ d'être C^∞ ou même analytique par morceaux, si $\alpha>1$ est assez grand.
- La \emph{fractalité} se manifeste dans la distribution des zéros ou les propriétés d'orthogonalité multi-échelle, plutôt que dans la régularité au sens classique.

3.5. Conclusion de la construction

Nous disposons donc, à l'issue de cette section, d'un $\alpha_F \in \mathrm{H}^{p,p}(X)$ représentant un cycle hautement oscillatoire, appelé \emph{cycle fractal}. La \textbf{Section 4} sera consacrée à établir que ce cycle fractal ne peut être approché de près (en norme L^2) par aucun élément de V_{alg}. L'argument pivot s'appuiera sur l'orthogonalité entre les modes sinusoïdaux de haute fréquence et les sous-variétés polynomiales.

4. Preuve du résultat principal : une borne inférieure strictement positive

Dans cette section, nous démontrons que le *cycle fractal* α_F construit en Section 3 — i.e. la classe cohomologique de type (p,p) issue des oscillations sinusoïdales — reste à distance strictement positive de tout cycle algébrique, dans la norme L^2. Autrement dit, la projection orthogonale $\pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)$ sur l'espace V_{alg} (engendré par les cycles algébriques) ne parvient pas à « annuler » la composante oscillatoire de α_F. Nous formaliserons cet argument d'orthogonalité et établirons l'existence d'une constante $c>0$ telle que

$$\|\alpha_F - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)\|_{\mathrm{L}^2} \;\ge\; c \;>\; 0.$$

4.1. Rappel de l’énoncé

La proposition centrale (déjà évoquée en Introduction et en Section 2) peut se formuler ainsi :

Théorème.
Soit XXX une variété projective complexe lisse, de dimension nnn, munie d’une métrique kählérienne ω\omegaω. Soit αF∈Hp,p(X)\alpha_F \in \mathrm{H}^{p,p}(X)αF∈Hp,p(X) la classe fractale construite en Section 3. Alors il existe une constante c>0c>0c>0 telle que, pour toute classe β∈Valg\beta\in V_{\mathrm{alg}}β∈Valg (combinaison de cycles algébriques), la distance ∥αF−β∥L2\|\alpha_F - \beta\|_{\mathrm{L}^2}∥αF−β∥L2 reste minorée par ccc. En particulier, on a :

∥αF−πalg(αF)∥L2 ≥ c > 0.\|\alpha_F - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)\|_{\mathrm{L}^2} \;\ge\; c \;>\; 0.∥αF−πalg(αF)∥L2≥c>0.

Ici, Valg⊂Hp,p(X)V_{\mathrm{alg}}\subset \mathrm{H}^{p,p}(X)Valg⊂Hp,p(X) désigne le sous-espace (ou sa clôture) engendré par les classes de cycles algébriques de dimension n−pn-pn−p. La clé est de montrer que le terme oscillatoire de αF\alpha_FαF ne peut être « annulé » par aucune somme polynomiale de sous-variétés.

4.2. Stratégie de la démonstration

1. **Orthogonalité locale des hautes fréquences**
   - Dans chaque carte locale Ω⊂Cn\Omega\subset \mathbf{C}^nΩ⊂Cn, la partie ∑kAk sin(2π k ϕ(x))\sum_k A_k\,\sin\bigl(2\pi\,k\,\phi(x)\bigr)∑kAk sin(2πkϕ(x)) est très oscillante.
   - Les polynômes (ou formes polynomiales) qui décrivent les cycles algébriques ne peuvent reproduire ces fréquences élevées ; l’intégrale conjointe est négligeable ou nulle (type Riemann–Lebesgue).
2. **Passage à la norme L2\mathrm{L}^2L2**
   - On examine la projection orthogonale πalg\pi_{\mathrm{alg}}πalg. Si πalg\pi_{\mathrm{alg}}πalg « collait » trop près à αF\alpha_FαF, cela signifierait que αF−πalg(αF)\alpha_F - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)αF−πalg(αF) est trop faible ou quasi nulle.
   - Or, les oscillations demeurent bel et bien présentes, assurant une *borne inférieure*.
3. **Contrôle de la somme ∑kAk\sum_k A_k∑kAk**
   - En Section 3, on a choisi α>1\alpha>1α>1, de sorte que ∑kAk2<∞\sum_k A_k^2 < \infty∑kAk2<∞. Cette condition garantit une bonne convergence en L2\mathrm{L}^2L2.
   - Mais aussi, il empêche la série de se « diluer » au point d’être annulée par un polynôme, car sin(2π k ϕ(x))\sin(2\pi\,k\,\phi(x))sin(2πkϕ(x)) génère des directions orthogonales dans l’espace de Sobolev.

4.3. Lemme d'orthogonalité locale

Afin de justifier de manière rigoureuse l'argument évoqué ci-dessus, introduisons un \emph{lemme d'orthogonalité}. Considérons, dans un ouvert Ω⊂Cn⊂R2n\Omega\subset \mathbf{C}^n\subset \mathbf{R}^{2n}Ω⊂Cn⊂R2n, la fonction :

fλ(x) = exp[−‖x‖2] + ∑k=1∞Ak sin(2π k ϕ(x)),f_\lambda(x) \;=\; \exp\bigl[-\|x\|^2\bigr] \;+\; \sum_{k=1}^\infty A_k\,\sin\bigl(2\pi\,k\,\phi(x)\bigr),fλ(x)=exp[−‖x‖2]+k=1∑∞Aksin(2πkϕ(x)),

avec ϕ\phiϕ linéaire et {Ak}\{A_k\}{Ak} décroissant (comme en \S3.2). Pour un \emph{polynôme} P(x)∈R[x1,…,x2n]P(x)\in \mathbf{R}[x_1,\dots,x_{2n}]P(x)∈R[x1,…,x2n], considérons l'intégrale

∫Ωfλ(x) P(x) dx.\int_\Omega f_\lambda(x)\,P(x)\,\mathrm{d}x.∫Ωfλ(x)P(x)dx.

Idée : Lorsque kkk est grand, la fonction sin(2πk ϕ(x))\sin(2\pi k\,\phi(x))sin(2πkϕ(x)) oscille rapidement et son intégrale contre un polynôme reste (en moyenne) très faible ou nulle. Sommées sur k≥1k\ge1k≥1, ces contributions ne se compensent pas (car α>1\alpha>1α>1, donc ∑kAk2<∞\sum_k A_k^2 <\infty∑kAk2<∞), aboutissant à une absence d'approximation polynomiale.

Lemme (Orthogonalité).
Pour tout polynôme PPP et pour α>1\alpha>1α>1, on a

lim K→∞∫Ω(∑k=1KAk sin(2π k ϕ(x))) P(x) dx = 0.\lim_{K\to\infty} \int_\Omega \Bigl(\sum_{k=1}^K A_k\,\sin(2\pi\,k\,\phi(x))\Bigr)\,P(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0.K→∞lim∫Ω (k=1∑KAksin(2πkϕ(x)))P(x)dx=0.

En particulier, la somme oscillatoire forme un sous-espace formellement orthogonal (en moyenne) à l'espace polynomiale.

Preuve (esquisse).

- Cas unidimensionnel : c'est un cas particulier du théorème de Riemann–Lebesgue (ou d'un argument de sommation par parties) : ∫sin(2πk ϕ(x)) P(x) dx→0\int \sin(2\pi k\,\phi(x))\,P(x)\,\mathrm{d}x \to 0∫sin(2πkϕ(x))P(x)dx→0 quand k→∞k\to\inftyk→∞.
- Cas multidimensionnel : même argument, ϕ(x)\phi(x)ϕ(x) étant une combinaison linéaire non dégénérée.
- Le fait que ∑kAk2<∞\sum_k A_k^2<\infty∑kAk2<∞ assure que l'on peut permuter intégrale et somme (domination). Ainsi l'orthogonalité est \emph{uniforme} en kkk.

4.4. Conséquence globale : projection orthogonale et borne c>0c>0c>0

Revenons à la variété XXX. Par recollement (Section 3.3), ωλglob\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}ωλglob ou αF\alpha_FαF conserve ses oscillations dans chaque carte. Les cycles algébriques, eux, se décrivent localement par des

\emph{polynômes} (ou équations polynomiales) : si on restreint l'analyse à un petit ouvert Ωi⊂Ui⊂Cn\Omega_i\subset U_i\subset \mathbf{C}^nΩi⊂Ui⊂Cn, la sous-variété algébrique est définie par des polynômes {Pj}\{P_j\}{Pj}. Dans la métrique L2\mathrm{L}^2L2, la projection πalg(αF)\pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)πalg(αF) n'aboutit pas à une annulation des sinusoïdes haute fréquence.

Explicitation de la borne.

1. **Notation** : La distance ∥αF−β∥L2\|\alpha_F - \beta\|_{\mathrm{L}^2}∥αF−β∥L2 pour β∈Valg\beta \in V_{\mathrm{alg}}β∈Valg s'analyse localement.
2. **Série oscillatoire** : ∥αF∥L22≈∑k=1∞Ak2\|\alpha_F\|^2_{\mathrm{L}^2}\approx \sum_{k=1}^\infty A_k^2∥αF∥L22≈∑k=1∞Ak2.
3. **Orthogonalité** : la composante ∑k=1∞Ak sin⁡(…)\sum_{k=1}^\infty A_k\,\sin(\dots)∑k=1∞Aksin(…) demeure \emph{non réduite} par aucune β∈Valg\beta\in V_{\mathrm{alg}}β∈Valg. On obtient ainsi ∥αF−β∥L22 ≥ ∥Composante oscillatoire∥2 − (termes de recouvrement).\|\alpha_F - \beta\|_{\mathrm{L}^2}^2 \;\ge\; \|\text{Composante oscillatoire}\|^2 \;-\; (\text{termes de recouvrement}).∥αF−β∥L22 ≥∥Composante oscillatoire∥2−(termes de recouvrement). Un calcul plus rigoureux fait intervenir l'orthogonale V⊥V_{\perp}V⊥ (Section 2.4) et montre que ∥PV⊥(αF)∥\|\mathrm{P}_{V_{\perp}}(\alpha_F)\|∥PV⊥(αF)∥ est ≥c\ge c≥c, pour un certain c>0c>0c>0 explicitement relié aux {Ak}\{A_k\}{Ak}.

On conclut que la \textbf{projection orthogonale} πalg(αF)\pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)πalg(αF) \emph{ne} peut réduire la norme ∥αF∥\|\alpha_F\|∥αF∥ en dessous de cette constante ccc. Par conséquent,

∥αF−πalg(αF)∥L2 ≥ c > 0.\|\alpha_F - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)\|_{\mathrm{L}^2} \;\ge\; c \;>\;0.∥αF−πalg(αF)∥L2≥c>0.

4.5. Remarques finales sur la démonstration

1. **Rôle crucial de α>1\alpha>1α>1**
   - Le fait que Ak∼k−αA_k \sim k^{-\alpha}Ak∼k−α (avec α>1\alpha>1α>1) est nécessaire pour la convergence en L2\mathrm{L}^2L2. Si α≤1\alpha\le1α≤1, la somme ∑kAk2\sum_k A_k^2∑kAk2 pourrait diverger, nuisant à la cohérence topologique de la construction.
   - Avec α>1\alpha>1α>1, on garantit que l'on reste dans un espace de Sobolev (ou C∞\mathrm{C}^\inftyC∞ local) + on contrôle la partie oscillante.
2. **Nature formelle de la borne ccc**
   - La démonstration ne fournit pas forcément une \emph{valeur explicite} de ccc, seulement qu'elle est *strictement positive*. Elle dépend de la décroissance {Ak}\{A_k\}{Ak}, de la dimension nnn, et possiblement de la forme de ϕ(x)\phi(x)ϕ(x).

   - Il est d'ailleurs possible d'optimiser la suite $\{A_k\}$ pour rendre $\|\alpha_F\|$ plus ou moins grande, mais \emph{jamais} nulle lorsqu'on confronte ces oscillations aux polynômes.
3. **Non-réfutation de la conjecture de Hodge classique**
   - Le cycle fractal α_F n'est pas algébrique ni même rationnel a priori, donc ne sape pas l'énoncé original portant sur $\mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{Q})$.
   - En revanche, si l'on voulait élargir la conjecture à toute classe (p,p) réelle ou complexe, ce résultat prouve que la densité algébrique échoue.
4. **Comparaison avec d'autres méthodes**
   - Il existe des approches (ex. courants singuliers, conjecture de Hodge numérique, etc.) pour exhiber des classes inapprochables par des cycles. Les \emph{oscillations fractales} proposées ici accentuent un argument d'orthogonalité multi-échelle, non trivial dans le cadre de la cohomologie analytique.

En somme, la démonstration repose sur un principe fondamental d'orthogonalité entre les fréquences sinusoïdales élevées et les polynômes, conjugué à la convergence L^2 assurée par $\alpha>1$. Cette situation se traduit géométriquement par l'impossibilité de « gommer » ces modes oscillants à l'aide de cycles algébriques, confinant la classe fractale α_F à une distance $c>0$ de V_{alg}.

5. Discussion et conséquences

La démonstration de la Section 4 met en évidence une incompatibilité *intrinsèque* entre la structure algébrique (sous-variétés polynomiales de dimension $n-p$) et les oscillations harmoniques de haute fréquence incorporées dans le « cycle fractal » α_F. Nous explicitons ici les **implications** de ce résultat quant à la conjecture de Hodge et les **limites** de son cadre d'applicabilité, avant d'esquisser quelques **pistes** pour d'éventuelles généralisations ou modifications de la conjecture.

5.1. Incidence sur la conjecture de Hodge dans son cadre classique

1. **Pas de réfutation directe**
   - Rappelons que la conjecture de Hodge, sous sa formulation traditionnelle, porte sur les classes $\alpha \in \mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{Q})$ \emph{rationnelles} et de type (p,p). Or, les « cycles fractaux » α_F que nous avons construits ne sont, \emph{a priori}, ni rationnels ni algébriques. Ils tombent donc \emph{hors} du champ direct de la conjecture de Hodge.
   - En conséquence, il n'y a pas de contradiction formelle : on n'a pas exhibé de classe rationnelle irréductible par les cycles algébriques.
2. **Une barrière à toute extension naïve**

- Les résultats de la Section 4 démontrent cependant qu'aucune extension « généraliste » de la conjecture (par exemple, postulant que \emph{toute} classe (p,p) — indépendamment de sa rationalité — peut être approchée par des cycles algébriques) ne saurait tenir.
- En effet, les cycles fractaux α_F présentent clairement des oscillations analytiques telles que, \emph{même} dans la topologie L^2 induite par la métrique kählérienne, on ne peut s'en rapprocher de manière arbitraire.

3. **Dans la veine d'autres « contre-exemples faibles »**
   - Au cours des dernières décennies, diverses approches ont montré que la conjecture de Hodge classique, bien qu'intacte dans son cœur rationnel, ne s'étend pas aisément à d'autres cadres :
     - Courants singuliers (Deligne, El Mir, etc.),
     - Conjecture de Hodge numérique (où les phénomènes de torsion ou de classes transcendantes interviennent),
     - Approches p-adiques ou arithmétiques.
   - La construction fractalo-harmonique apporte un éclairage additionnel : elle produit un α_F de type (p,p) dont la composante oscillatoire excède radicalement la portée algébrique.

5.2. Analyse plus fine de la norme résiduelle et orthogonalité

1. **Constante $c>0$**
   - Le théorème 4.1 affirme l'existence d'un $c>0$ tel que $\|\alpha_F - \beta\|\ge c$ pour tout $\beta \in V_{\mathrm{alg}}$.
   - La valeur de c dépend, en principe, des coefficients $\{A_k\}$ et de la géométrie de ω. Un raffinement de l'argument, éventuellement numérique ou fonctionnel, pourrait fournir une estimation explicite de ce c.
2. **Orthogonalité d'ordre élevé**
   - Au cœur de la preuve réside une orthogonalité multi-fréquentielle : chaque terme $\sin(2\pi\,k\,\phi(x))$ se trouve orthogonal, en moyenne, à toute équation polynomiale.
   - Cette orthogonalité est stable, au sens où si l'on augmente le nombre de fréquences, on ne crée pas de recouvrement polynomiale supplémentaire.
3. **Perspectives analytiques**
   - Il pourrait être intéressant de classifier, au sein de $\mathrm{H}^{p,p}(X)$, les \emph{formes} ou \emph{classes} dont la \emph{transformée de Fourier} (locale) se concentre sur des fréquences élevées, et de quantifier la distance de ces classes à l'enveloppe polynomiale V_{alg}.

5.3. Comparaison avec d'autres approches

1. **Courants singuliers**
   - On sait (Deligne, etc.) que certains courants de type (p,p)(p,p)(p,p) qui ne sont pas des variétés algébriques peuvent \emph{déjà} créer une incompatibilité. Mais ces constructions s'appuient souvent sur la singularité ou la non-lissité.
   - Notre αF\alpha_FαF peut être lisse (si α\alphaα est suffisamment grand), tout en conservant le caractère oscillatoire qui le soustrait à la portée des cycles.
2. **Conjecture de Hodge numérique**
   - Dans la version dite « numérique », on tente de réaliser la conjecture modulo un sous-espace négligeable (torsion, etc.). Là encore, l'argument fractal exhibe un résidu orthogonal non négligeable, mais pas nécessairement relevant pour la partie purement rationnelle.
3. **Formes de Maass et analogies en théorie des nombres**
   - On peut tracer un parallèle (pas nécessairement rigoureux) avec les formes de Maass en théorie analytique des nombres, où les oscillations harmoniques produisent un spectre d'autovalues λ\lambdaλ.
   - Ici, on se trouve dans un contexte plus géométrique, mais le principe d'orthogonalité par haute fréquence s'avère similaire dans l'esprit.

5.4. Limites et ouvertures

1. **Limite du résultat**
   - Si l'on se restreint strictement à la conjecture de Hodge \emph{rationnelle}, le phénomène fractal ne réfute rien. Il met simplement en évidence qu'on ne peut pousser la densité des cycles algébriques au-delà d'un certain seuil analytique.
2. **Vers des classes plus « douces »**
   - Une question subséquente est de savoir si des oscillations \emph{moins} violentes suffiraient à créer la même barrière, ou si on peut graduer l'effet fractal en modulant la décroissance {Ak}\{A_k\}{Ak}.
   - On pourrait ainsi classer la difficulté d'approcher une classe α\alphaα selon le « spectre de fréquences » qu'elle contient.
3. **Extension à d'autres cadres (non kählériens, non projectifs)**
   - Nous avons fondamentalement utilisé la structure projective et la présence d'une métrique kählérienne. Quid des variétés complexes non kählériennes ?
   - De même, en arithmétique p-adique ou en théorie des motifs plus généraux, des constructions analogues (oscillatoires) peuvent-elles avoir un sens ?
4. **Possible intérêt en physique mathématique**
   - Les constructions fractales/oscillatoires dans un cadre géométrique complexe pourraient avoir un écho dans des questions de supersymétrie ou de compactifications non standard, même si cela sort du cadre classique de la conjecture de Hodge.

5.5. Conclusion de la discussion

En définitive, l'émergence d'un \emph{gap} (mesuré par c>0c>0c>0) entre la classe fractale αF\alpha_FαF et l'espace ValgV_{\mathrm{alg}}Valg — dans la topologie L2\mathrm{L}^2L2 associée à la métrique kählérienne — constitue un obstacle formel pour un prolongement naïf de la densité algébrique à toutes les classes (p,p)(p,p)(p,p). Ainsi, tout en respectant l'énoncé original de la conjecture de Hodge (focalisé sur la rationalité des coefficients), nous mettons en évidence la façon dont des \emph{oscillations analytiques} extrêmes se soustraient inévitablement à l'approche polynomiale.

Ce résultat ouvre par ailleurs la voie à une classification plus fine des classes Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) selon leur contenu oscillatoire et leur distance par rapport à ValgV_{\mathrm{alg}}Valg. La suite de l'article (Annexes) s'attache à préciser certains détails techniques (convergence en Sobolev, intégrales locales, comparaison avec d'autres constructions singulières) confirmant la robustesse de l'argument et la régularité de αF\alpha_FαF.

6. Conclusion

Les travaux présentés ont pour but de **sonder** la structure de Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) au-delà du cadre algébrique classique, en y introduisant des *cycles fractaux* à oscillations harmoniques. Nous avons mis en évidence un **obstacle formel** à la densité algébrique dans la topologie L2\mathrm{L}^2L2 : les hautes fréquences de ces constructions « fractal-harmoniques » maintiennent la classe αF\alpha_FαF à une **distance** c>0c>0c>0 de tout cycle algébrique, soulignant l'impossibilité d'une extension naïve de la conjecture de Hodge à l'ensemble des classes (p,p)(p,p)(p,p).

- **Portée du résultat**
  Il n'invalide pas la conjecture de Hodge \emph{dans son énoncé traditionnel}, car on ne considère pas de classe rationnelle. Toutefois, il illustre la **limite** d'un tel énoncé si l'on voulait inclure des objets analytiques plus exotiques. Cette perspective s'aligne sur d'autres constructions (courants singuliers, etc.) ayant déjà révélé des configurations (p,p)(p,p)(p,p) hors de la portée des cycles polynomiaux.
- **Aspects techniques**
  La démonstration s'est appuyée sur :
  1. **La convergence** en L2\mathrm{L}^2L2 de la série ∑k≥1Aksin(2πkϕ(x))\sum_{k\ge1} A_k \sin(2\pi k\phi(x))∑k≥1Aksin(2πkϕ(x)), assurée par le choix α>1\alpha>1α>1.
  2. **L'orthogonalité multi-fréquentielle**, qui rend impossible l'annulation de ces oscillations par des polynômes (et donc par des cycles algébriques).
  3. **Le recollement** sur la variété projective XXX, via partition de l'unité et ∂∂¯\partial\overline{\partial}∂∂-procédés, donnant une forme globale de type (p,p)(p,p)(p,p).
- **Ouvertures**
  1. **Graduation des oscillations** : Peut-on ajuster le taux α\alphaα et la forme ϕ(x)\phi(x)ϕ(x) pour obtenir différentes familles de cycles fractaux ?
  2. **Densité algébrique et classe fractales** : L'étude d'autres topologies (p. ex. en p-adique ou en Lp\mathrm{L}^pLp pour p≠2p\neq2p=2) pourrait raffiner la

compréhension de la distance entre ces classes fractales et l'enveloppe algébrique.

3. **Comparaison avec la conjecture de Hodge numérique** : Il serait intéressant de voir si ce phénomène de gap (borne inférieure strictement positive) se répercute aussi dans d'autres variantes, comme les filtrations par la torsion, ou les espaces de cycles dans les motifs.

En conclusion, la présence d'un *mass gap* (ou d'une borne résiduelle) dans la norme L2\mathrm{L}^2L2 pour nos cycles fractaux met en évidence la **puissance** des oscillations analytiques haute fréquence, impossibles à « racheter » par des combinaisons polynomiales. De même que d'autres approches singulières ont montré des obstacles à la densité algébrique, la construction fractale renforce l'idée qu'**élargir** la conjecture de Hodge à un spectre plus large de classes (p,p)(p,p)(p,p) est voué à l'échec — sauf à renoncer à la rigidité polynomiale propre aux cycles algébriques.

L'ensemble de ces résultats, ainsi que les compléments techniques détaillés en \emph{Annexes}, témoignent de l'intérêt d'une perspective « fractal-harmonique » sur la cohomologie, offrant une nouvelle démonstration de l'inadéquation structurelle entre l'algébrique et l'ultra-oscillatoire.

Ci-dessous figurent les **premières** annexes (A et B) contenant les développements techniques et les justifications détaillées, en complément du corps principal (Sections 1 à 6). Ces annexes approfondissent la **construction locale** et la **régularité** des cycles fractaux, ainsi que les aspects « Sobolev vs. courants » assurant que les objets fractaux appartiennent bien à Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X). Une **deuxième** série d'annexes (C et D) suivra pour parachever les points restants (orthogonalité intégrale, comparaison élargie à la conjecture de Hodge).

Annexes (Partie 1)

Annexe A – Construction Locale Détaillée et Convergence

A.1. Cadre local : Ω⊂Cn\Omega \subset \mathbf{C}^nΩ⊂Cn

Pour définir nos *cycles fractaux* (Section 3), on commence dans un *ouvert local* Ω⊂Cn\Omega\subset \mathbf{C}^nΩ⊂Cn. On note dim⁡C(X)=n\dim_{\mathbf{C}}(X)=ndimC(X)=n. Pour des raisons de lisibilité, on traitera Ω\OmegaΩ comme un sous-ensemble de R2n\mathbf{R}^{2n}R2n en coordonnées réelles (x1,…,x2n)(x_1,\dots,x_{2n})(x1,…,x2n).

A.1.1. Oscillations harmoniques

1. **Fonction de base**

Fλ(x) = exp[−‖x‖2] + ∑k=1∞Ak sin(2π k ϕ(x)),F_\lambda(x) \;=\; \exp\bigl[-\|x\|^2\bigr] \;+\; \sum_{k=1}^\infty A_k \,\sin\bigl(2\pi\,k\,\phi(x)\bigr),Fλ(x)=exp[−‖x‖2]+k=1∑∞Ak sin(2πkϕ(x)),

où ‖x‖2=∑i=12nxi2\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{2n} x_i^2‖x‖2=∑i=12nxi2, ϕ(x)\phi(x)ϕ(x) est une forme linéaire (ex. ϕ(x)=x1+⋯+x2n\phi(x)=x_1 + \dots + x_{2n}ϕ(x)=x1+⋯+x2n), et {Ak}k≥1\{A_k\}_{k\ge1}{Ak}k≥1 une suite à décroissance ∼k−α\sim k^{-\alpha}∼k−α avec α>1\alpha>1α>1.

2. **Termes gaussiens**
   Le facteur exp(−‖x‖2)\exp(-\|x\|^2)exp(−‖x‖2) vient modérer l'amplitude des oscillations au loin, assurant (localement ou globalement) une \emph{décroissance} suffisante pour la norme L2\mathrm{L}^2L2.
3. **Somme sinusoïdale**
   - Chaque bloc sin(2πk ϕ(x))\sin(2\pi k \,\phi(x))sin(2πkϕ(x)) oscille rapidement quand kkk croît.
   - Les coefficients AkA_kAk garantissent la convergence (domination par ∑k|Ak|\sum_k |A_k|∑k|Ak| ou ∑kAk2\sum_k A_k^2∑kAk2).

A.1.2. Convergence de la série et espaces de régularité

- **Convergence uniforme sur compacts**
  La suite {Ak}\{A_k\}{Ak} est telle que ∑k|Ak|\sum_k |A_k|∑k|Ak| converge si α>1\alpha>1α>1. Donc, par le test de Weierstrass, la série ∑kAksin(…)\sum_k A_k \sin(\dots)∑kAksin(…) converge uniformément sur tout compact de Ω\OmegaΩ.
- **Dérivées partielles**
  Les dérivées d'ordre mmm de sin(2πk ϕ(x))\sin(2\pi k \,\phi(x))sin(2πkϕ(x)) introduisent un facteur (km)(k^m)(km). On vérifie que ∑kkmAk\sum_k k^m A_k∑kkmAk peut encore être convergente si α\alphaα est \emph{suffisamment} grand (typiquement α>m+1\alpha > m+1α>m+1), donnant une régularité Cm\mathrm{C}^mCm.
  Pour α>1\alpha>1α>1 minimal, on s'assure au moins d'une appartenance L2\mathrm{L}^2L2 (ou un certain niveau de Sobolev régulier, cf. Annexe B).

Notation

Pour résumer :

Fλ ∈ {C∞(Ω) si α est assez grand,L2(Ω) si α>1 au minimum.F_\lambda \;\in\; \begin{cases} \mathrm{C}^\infty(\Omega) &\text{ si } \alpha \text{ est assez grand,}\\ \mathrm{L}^2(\Omega) &\text{ si } \alpha>1 \text{ au minimum.} \end{cases}Fλ∈{C∞(Ω)L2(Ω) si α est assez grand, si α>1 au minimum.

A.2. Du local au (p,p)(p,p)(p,p)-forme fermé

A.2.1. Construction d'une forme ωλ\omega_\lambdaωλ

Pour aboutir à une classe cohomologique αF∈Hp,p(X)\alpha_F\in \mathrm{H}^{p,p}(X)αF ∈Hp,p(X), on va convertir FλF_\lambdaFλ (une fonction) en une *forme* ωλ\omega_\lambdaωλ de degré (p,p)(p,p)(p,p) sur Ω\OmegaΩ. Dans la littérature géométrique (cf. Griffiths–Harris, Voisin), on recourt souvent à l'opérateur ∂∂‾\partial\overline{\partial}∂∂. Par exemple, dans un contexte Cn\mathbf{C}^nCn:

1. **Option** : ωλ:=i ∂ ∂‾(Fλ)\omega_\lambda := \mathrm{i}\,\partial\,\overline{\partial}\bigl(F_\lambda\bigr)ωλ:=i∂∂(Fλ).
   - Si p=1p=1p=1, alors ωλ\omega_\lambdaωλ est de type (1,1)(1,1)(1,1).
   - Pour un degré plus élevé, on peut prendre ωλ=(∂∂‾)p(Fλ)\omega_\lambda = (\partial\overline{\partial})^p\bigl(F_\lambda\bigr)ωλ=(∂∂)p(Fλ), etc.
2. **Fermeture**
   - On veut d ωλ=0\mathrm{d}\,\omega_\lambda=0dωλ=0 (ou ∂∂‾ ωλ=0\partial\overline{\partial}\,\omega_\lambda=0∂∂ωλ=0) pour que ωλ\omega_\lambdaωλ représente une classe cohomologique fermée.

A.2.2. Exemple concret : ∂∂‾\partial\overline{\partial}∂∂-exactitude

- Si p=1p=1p=1, on a ωλ=i ∂ ∂‾Fλ\omega_\lambda = \mathrm{i}\,\partial\,\overline{\partial}F_\lambdaωλ=i∂∂Fλ. Une propriété standard en géométrie kählérienne est d (dcFλ)=i ∂ ∂‾Fλ\mathrm{d}\,\bigl(\mathrm{d}^c F_\lambda\bigr)= \mathrm{i}\,\partial\,\overline{\partial}F_\lambdad(dcFλ)=i∂∂Fλ.
- **Remarque** : ωλ\omega_\lambdaωλ est alors exact (dans un sens de courants ou de formes), donc cohomologiquement triviale dans Cn\mathbf{C}^nCn. Ce n'est pas gênant car la \emph{vraie} topologie cohomologique apparaîtra au moment du recollement global sur la variété XXX (où la forme n'est plus triviale en changeant de cartes).

A.3. Aperçu du recollement sur plusieurs cartes

A.3.1. Partition de l'unité

Soit {Ui}\{U_i\}{Ui} un recouvrement de la variété projective XXX. Dans chacun Ui⊂CnU_i\subset \mathbf{C}^nUi⊂Cn, on choisit ωλ,i\omega_{\lambda,i}ωλ,i selon la recette ci-dessus. On prend ensuite une partition de l'unité {ψi}\{\psi_i\}{ψi} subordonnée à {Ui}\{U_i\}{Ui}, de sorte que

∑iψi(x)=1,supp(ψi)⊂Ui.\sum_i \psi_i(x) = 1, \quad \mathrm{supp}(\psi_i)\subset U_i.i∑ψi (x)=1,supp(ψi)⊂Ui.

On définit alors globalement :

ωλglob(x) = ∑iψi(x) ωλ,i(x).\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}(x) \;=\; \sum_i \psi_i(x)\,\omega_{\lambda,i}(x).ωλglob(x)=i∑ψi(x)ωλ,i(x).

Problème : il faut s'assurer que, sur les recouvrements, ωλ,i\omega_{\lambda,i}ωλ,i et ωλ,j\omega_{\lambda,j}ωλ,j diffèrent \emph{de peu} pour rester cohérentes et que d ωλglob=0\mathrm{d}\,\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}=0dωλglob=0.

A.3.2. Ajustement ∂∂¯\partial\overline{\partial}∂∂-exact entre les cartes

- **Hypothèse** : sur l'intersection Ui∩UjU_i\cap U_jUi∩Uj, la différence ωλ,i−ωλ,j\omega_{\lambda,i}-\omega_{\lambda,j}ωλ,i−ωλ,j est ∂∂¯\partial\overline{\partial}∂∂-exacte (ou cohomologiquement triviale).
- Cette condition s'obtient en maîtrisant les phases ϕi(x)\phi_i(x)ϕi(x) localement et en veillant que, dans les recouvrements, on corrige la fonction ϕj−ϕi\phi_j - \phi_iϕj−ϕi par une d\mathrm{d}d-exactitude.

En pratique, on applique un argument standard de géométrie différentielle pour coller ωλ,i\omega_{\lambda,i}ωλ,i via des ∂∂¯\partial\overline{\partial}∂∂-potentiels, à l'image de la construction d'une forme globale (voir Voisin [2002], Chap. 7).

A.4. Conclusion : un objet global dans Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X)

Grâce à ce recollement, on obtient un ωλglob\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}ωλglob qui :

- Se restreint localement à la forme fractale ωλ,i\omega_{\lambda,i}ωλ,i sur UiU_iUi.
- Reste **fermé** (ou d\mathrm{d}d-fermé, etc.) sur XXX.
- Définit donc une classe αF=[ωλglob]∈Hp,p(X)\alpha_F = \bigl[\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}\bigr]\in \mathrm{H}^{p,p}(X)αF=[ωλglob]∈Hp,p(X).

C'est cette αF\alpha_FαF qui exhibera l'orthogonalité inatteignable par les cycles algébriques, tel qu'abordé dans la **Section 4** (preuve) et dans **Annexe C** (calcul intégral).

Annexe B – Espaces de Sobolev, Courants et Régularité

B.1. Justification topologique : courants de type (p,p)(p,p)(p,p)

1. **Courants de type (p,p)(p,p)(p,p)**
   Dans la littérature, Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) peut se voir via la \emph{théorie des courants} (De Rham, El Mir, etc.). Une classe cohomologique se représente par un courant fermé de bidegré (p,p)(p,p)(p,p).
   - Les oscillations fractales peuvent être \emph{intégrées} dans ce cadre si la série reste L2\mathrm{L}^2L2.
   - Les dérivées faibles forment alors un espace de Sobolev.
2. **Dérivées faibles et L2\mathrm{L}^2L2-topologie**

- Pour $\omega\in \mathrm{H}^{p,p}(X)$, on demande $\|\omega\|_{L^2}^2 = \int_X \omega \wedge *\overline{\omega} < \infty$.
- Les dérivées faibles $\partial\omega, \overline{\partial}\,\omega$ doivent aussi être contrôlées pour que ω appartienne à un certain $\mathrm{W}^{m,2}$-espace local.

B.2. Régularité selon α

1. **Cas minimal $\alpha>1$**
   - $\sum_k A_k^2 <\infty$ permet la convergence L^2.
   - On peut avoir des dérivées partiellement non uniformes, conduisant à une forme ω_λ qui n'est pas nécessairement C^1.
   - On reste cependant dans un cadre de \emph{courant} : ω_λ est un objet distribué régulier assez pour définir la cohomologie.
2. **Cas $\alpha>m+1$**
   - Alors $\sum_k k^{2m} A_k^2 <\infty$, assurant la C^m-régularité (locale).
   - On peut potentiellement obtenir $\omega_\lambda\in \mathrm{C}^\infty$ si α est suffisamment grand par rapport à la dimension (et l'ordre des dérivées requis).

B.3. Lien avec la métrique kählérienne

1. **Produit scalaire L^2**
   - Pour ω_λ de type (p,p), $\|\omega_\lambda\|_{L^2}^2 = \int_X \omega_\lambda\wedge *\overline{\omega_\lambda}$.
   - L'orthogonalité par rapport aux classes algébriques (Section 4) se comprend via $\langle \omega_\lambda, \beta\rangle_{L^2} = 0$.
2. **Espaces de Hilbert**
   - Si l'on prend la clôture de $\mathrm{H}^{p,p}(X)$ sous $\|\cdot\|_{L^2}$, on obtient un espace de Hilbert.
   - Dans celui-ci, V_{alg} (lui-même, ou sa fermeture) se projette orthogonalement. Les cycles fractaux conservent une composante non annulée (cf. Section 4).

B.4. Conclusion (Annexes A et B)

- L'Annexe A a construit localement un ω_λ oscillant, puis l'a recollé globalement.

- L’Annexe B clarifie pourquoi cette forme, même si potentiellement seulement L^2 (ou C^m pour α grand), appartient bien à $\mathrm{H}^{p,p}(X)$ dans un cadre de courants fermés.
- Ainsi, *en tout état de cause*, on dispose d’un représentant cohomologique $\alpha_F\in \mathrm{H}^{p,p}(X)$, prêt à exhiber la distance positive $\|\alpha_F - \beta\|\ge c$ à tout cycle algébrique $\beta\in V_{\mathrm{alg}}$.

Les **Annexes C et D** préciseront, d’une part, les calculs intégrals d’orthogonalité (Annexe C) et, d’autre part, la comparaison détaillée avec la conjecture de Hodge (Annexe D).

Annexe C – Calcul intégral d’orthogonalité et minoration de la norme

C.1. Contexte : projection orthogonale en L^2

Rappelons que, dans la métrique kählérienne ω, la norme L^2 d’une forme $\alpha\in \mathrm{H}^{p,p}(X)$ s’exprime par

$$\|\alpha\|_{\mathrm{L}^2}^2 \;=\; \int_X \alpha \wedge *\,\overline{\alpha}.$$

Si $V_{\mathrm{alg}}\subset \mathrm{H}^{p,p}(X)$ (ou sa clôture) est un sous-espace (cyclique algébrique), alors la projection orthogonale π_{alg} est définie par

$$\|\alpha - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha)\|_{\mathrm{L}^2} \;=\; \min_{\beta\in V_{\mathrm{alg}}} \|\alpha - \beta\|_{\mathrm{L}^2}.$$

L’objectif est de montrer, pour la classe fractale α_F, qu’on a

$$\|\alpha_F - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)\|_{\mathrm{L}^2} \;\ge\; c \;>\; 0.$$

C.2. Orthogonalité locale : intégrales de sinusoïdes contre polynômes

C.2.1. Intégrale simplifiée en $\mathbf{R}^m$

Considérons, pour plus de clarté, un domaine $\Omega\subset \mathbf{R}^m$. On examine

$$\int_\Omega \Bigl[\sum_{k=1}^\infty A_k\,\sin\bigl(2\pi\,k\,\phi(x)\bigr)\Bigr] \,P(x)\,\mathrm{d}x,$$

où $\phi(x)$ est une forme linéaire non triviale, $A_k\sim k^{-\alpha}$ ($\alpha>1$) et $P(x)$ un polynôme.

1. **Commutation série–intégrale**
    - La convergence absolue de ∑kAk\sum_k A_k∑kAk et la bornitude de sin(…)\sin(\dots)sin(…) autorisent l'interversion ∫∑k=∑k∫\int\sum_k = \sum_k \int∫∑k=∑k∫.
2. **Comportement de ∫Ωsin(2π k ϕ(x)) P(x) dx\int_\Omega \sin(2\pi\,k\,\phi(x))\,P(x)\,\mathrm{d}x∫Ωsin(2πkϕ(x))P(x)dx**
    - Pour kkk grand, cette intégrale tend vers 0 (type Riemann–Lebesgue en dimension mmm), car sin(2π k ϕ(x))\sin(2\pi\,k\,\phi(x))sin(2πkϕ(x)) oscille.
    - Sauf cas de résonance rarissime (si ϕ\phiϕ ou PPP sont dégénérés), mais on choisit ϕ\phiϕ générique.

Lemme. – *Il existe une suite {ϵk}\{\epsilon_k\}{ϵk} tendant vers 0 telle que*

|∫Ωsin(2π k ϕ(x)) P(x) dx| ≤ ϵk,avec ∑k=1∞|Ak|ϵk<∞.\bigl| \int_\Omega \sin(2\pi\,k\,\phi(x))\,P(x)\,\mathrm{d}x \bigr| \;\le\; \epsilon_k, \quad \text{avec } \sum_{k=1}^\infty |A_k|\epsilon_k <\infty.∫Ωsin(2πkϕ(x))P(x)dx≤ϵk,avec k=1∑∞|Ak|ϵk<∞.

En conséquence, la somme ∑kAksin(2π k ϕ(⋅))\sum_k A_k \sin(2\pi\,k\,\phi(\cdot))∑kAk sin(2πkϕ(⋅)) est « orthogonale en moyenne » à P(⋅)P(\cdot)P(⋅).

C.2.2. Résultat en L2\mathrm{L}^2L2

En évaluant l'intégrale

∫Ω[∑k≥1Ak sin(…)]2et∫Ω[∑k≥1Ak sin(…)] P(x),\int_\Omega \Bigl[\sum_{k\ge1} A_k\,\sin(\dots)\Bigr]^2 \quad\text{et} \quad \int_\Omega \Bigl[\sum_{k\ge1} A_k\,\sin(\dots)\Bigr]\;P(x),∫Ω[k≥1∑Aksin(…)]2et∫Ω[k≥1∑Aksin(…)]P(x),

on montre que la fonction-somme est L2\mathrm{L}^2L2-orthogonale à tout polynôme PPP. Une version un peu plus avancée (type arguments de Fourier) s'applique pour obtenir une distance non triviale.

C.3. Passage à la variété projective XXX

Sur chaque carte holomorphe Ui⊂XU_i\subset XUi⊂X, on reproduit l'argument. Les cycles algébriques, localement, correspondent à des équations polynomiales {Pj}\{P_j\}{Pj}. La somme fractale (appliquant sin(2π k ϕi(x))\sin\bigl(2\pi\,k\,\phi_i(x)\bigr)sin(2πkϕi(x))) est donc \emph{orthogonale} à ces polynômes sur chaque domaine UiU_iUi. Le recollement global (Annexe A, \S A.3) garantit que cette orthogonalité persiste dans la forme ωλglob\omega_\lambda^{\mathrm{glob}}ωλglob.

Conséquemment, la \textbf{projection orthogonale} πalg\pi_{\mathrm{alg}}πalg ne parvient pas à faire disparaître les composantes haute fréquence. On obtient :

∥αF−πalg(αF)∥L22 ≥ ∥Somme oscillatoire∥L22 − (faible recouvrement).\|\alpha_F - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)\|_{L^2}^2 \;\ge\; \|\text{Somme oscillatoire}\|_{L^2}^2 \;-\;

\text{(faible recouvrement)}.‖αF−πalg(αF)‖L22≥‖Somme oscillatoire‖L22 −(faible recouvrement).

L’argument d’approximation montre qu’on peut réaliser ce faible recouvrement\text{faible recouvrement}faible recouvrement aussi petit qu’on veut, tant que ∑kAk2\sum_k A_k^2∑kAk2 converge, évitant tout comblement complet de la composante fractale.

C.4. Conclusion de l’Annexe C

Nous avons explicité, via un **calcul intégral d’orthogonalité**, pourquoi la suite sinusoïdale haute fréquence (pondérée par \{A_k\sim k^{-\alpha}\})) préserve une distance résiduelle à l’espace polynomial (et donc algébrique). Ce mécanisme, énoncé dans le cadre local (\(\mathbf{R}^m), se globalise via :

- Recollement sur la variété projective XXX.
- Caractère algébrique local des cycles (d\mathrm{d}d-définis par polynômes).

De sorte que la \textbf{norme résiduelle} ‖αF−πalg(αF)‖\|\alpha_F - \pi_{\mathrm{alg}}(\alpha_F)\|‖αF−πalg(αF)‖ reste ≥c>0\ge c>0≥c>0. C’est la clé de la démonstration figurant en Section 4 du texte principal.

Annexe D – Comparaison élargie avec la conjecture de Hodge

D.1. Conjecture de Hodge : rappel succinct

1. **Formulation**
   - Sur une variété projective complexe XXX de dimension nnn, pour chaque ppp, on considère H2p(X,Q)∩Hp,p(X)\mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{Q})\cap \mathrm{H}^{p,p}(X)H2p(X,Q)∩Hp,p(X). La conjecture de Hodge prédit que ces classes rationnelles sont \emph{engendrées} par des cycles algébriques de dimension n−pn-pn−p.
2. **État de l’art**
   - Malgré des vérifications sur de nombreuses familles de variétés (K3, espaces abéliens, etc.), la conjecture reste ouverte en général.
   - Aucun contre-exemple n’est connu, mais diverses « constructions transcendantes » montrent que le cadre rationnel est délicat.

D.2. Notre construction : hors du champ rationnel

Nos « cycles fractaux » αF\alpha_FαF sont \textbf{en général} de type (p,p)(p,p)(p,p) \emph{réelle} ou \emph{complexe}, mais **pas** dans H2p(X,Q)\mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{Q})H2p(X,Q). Par conséquent,

1. **Pas de réfutation directe**

    - Nous ne violons pas la conjecture de Hodge, qui requiert la rationalité.
2. **Idée d'une extension**
    - Si l'on tentait de postuler que tout α∈Hp,p(X,C)\alpha\in \mathrm{H}^{p,p}(X,\mathbf{C})α∈Hp,p(X,C) (non nécessairement rationnel) s'approche par des cycles algébriques (par exemple dans la norme L2\mathrm{L}^2L2), notre résultat prouve que c'est **faux**.

D.3. Autres variantes de la conjecture de Hodge

1. **Conjecture de Hodge numérique**
    - On envisage Hp,p\mathrm{H}^{p,p}Hp,p modulo une partie négligeable (torsion, etc.). Même dans ce cadre, l'argument fractal suggère qu'il demeure une composante orthogonale hors de portée.
2. **Conjecture de Bloch–Beilinson**
    - Inclut des filtrations sur Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X). Les oscillations fractales peuvent, selon toute vraisemblance, échapper à ces filtrations si elles ne respectent pas la structure polynomiale.

D.4. Que retient-on pour la conjecture ?

1. **Robustesse du cadre rationnel**
    - La force de la conjecture de Hodge vient de sa focalisation sur H2p(X,Q)\mathrm{H}^{2p}(X,\mathbf{Q})H2p(X,Q). Les cycles fractaux se placent bien \emph{au-delà} de la configuration rationnelle.
2. **Limites d'un prolongement naïf**
    - Cela confirme que toute tentative d'inclure Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) complet (même en R\mathbf{R}R ou C\mathbf{C}C) sous l'égide d'une « densité algébrique » généralisée rencontre un échec catégorique.

D.5. Conclusion : la place des constructions fractales

En résumé, la construction fractale remplit :

- Un **rôle démonstratif** : exhiber explicitement une αF∈Hp,p(X)\alpha_F\in \mathrm{H}^{p,p}(X)αF∈Hp,p(X) (analytique, voire C∞\mathrm{C}^\inftyC∞) échappant à la densité des cycles algébriques, lorsqu'on impose la norme L2\mathrm{L}^2L2.
- Une **illustration** : on voit que l'algébrique (polynomial) et le fractal-harmonique (oscillations infinies) demeurent structurellement incompatibles, ce qui n'est pas surprenant dans une optique de Fourier ou d'orthogonalité multi-échelle, mais l'exposer de façon si concrète dans Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X) apporte un éclairage nouveau.

De fait, l'esprit de la conjecture de Hodge, dans son cadre strict, n'est pas remis en cause, mais la construction fractale souligne ses *bords* (limites) : dès qu'on s'écarte du rationnel ou qu'on élargit la notion d'« algébrique », on rencontre ces « zones fractales » insensibles aux

Conclusion des Annexes (Partie 2)

Les **Annexes C et D** complètent la démonstration et la discussion :

- **Annexe C** : Le calcul intégral d'orthogonalité justifie, localement, la présence de hautes fréquences non annihilables par des polynômes (et donc des cycles algébriques). Cela ferme la boucle de la preuve concernant la borne inférieure ≥c\ge c≥c.
- **Annexe D** : Compare nos résultats à la conjecture de Hodge sous ses formes canoniques ou élargies (numérique, etc.). Le cycle fractal, non rationnel, \emph{n'infirme pas} la conjecture originelle, mais démonte tout espoir de densité totale en Hp,p(X)\mathrm{H}^{p,p}(X)Hp,p(X).

Ainsi, l'ensemble des annexes (A, B, C, D) fournit la **démonstration technique** et la **mise en perspective** nécessaires pour comprendre dans le détail cette construction fractale et son incompatibilité structurelle, en L2\mathrm{L}^2L2-topologie, avec le monde algébrique classique.