Ana Ilie

Clasa a VII-a B

GEOMETRIE

GEOMETRIA = ramura matematicii care studiază figurile geometrice

MODELE MATEMATICE

1. Punctul

- notații: A, B, C, D, etc.
  A_1, A_2, A_3 etc.
- Obs.: C = D → puncte identice (ocupă același loc în plan)
  A ≠ B → puncte diferite

2. Dreapta

- notații: d, a, ...
  $d_1, d_2, \dots$

AB BA
AC CA
BC CB

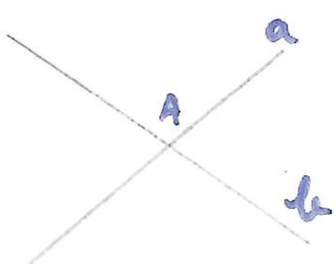
AXIOMA DREPTEI: Două puncte distincte determină o UNICĂ DREAPTĂ.

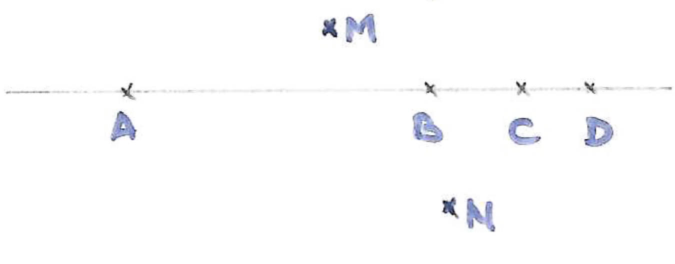
a ∦ b

$a \cap b = \emptyset$

⇒ DREPTE PARALELE

Def.: Trei sau mai multe puncte se numesc PUNCTE COLINIARE dacă toate aparțin unei drepte.





$C \in AB$

$D \in AB$

$M \notin AB$

$N \notin AB$

a ∦ b

$a \cap b = \{A\}$

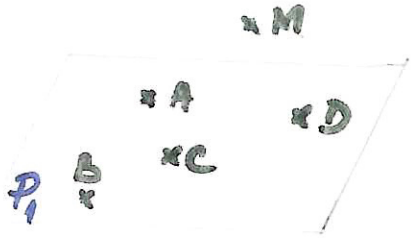
⇒ DREPTE CONCURENTE

Dacă min. unul dintre puncte ∉ dreptei pe care sunt așezate celelalte ⇒ PUNCTE NECOLINIARE

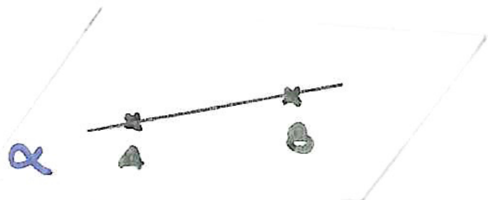
3. Planul

Def.: O suprafață netedă, fără grosime și infinită este un PLAN.

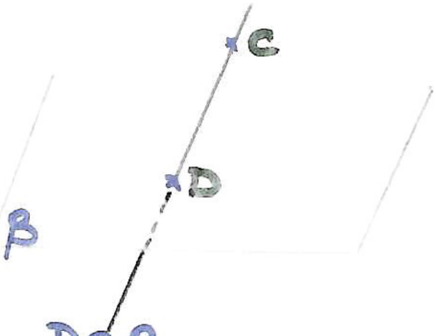
- notații: α, β, γ, δ
  P_1, P_2, ...



$A \in P_1$ $M \notin P_1$
$B \in P_1$



$AB \in \alpha$



$D \in \beta$
$C \notin \beta$

$CD \cap \beta = \{D\}$

$CD \not\subset \beta$

$d \cap \alpha = \emptyset$ $(d \parallel \alpha)$

Figurile geometrice = mulțimi de puncte

a) dacă toate punctele sunt situate în același plan => FIGURA GEOMETRICĂ PLANĂ

b) dacă nu este îndeplinită condiția a) => FIGURĂ GEOMETRICĂ ÎN SPAȚIU sau CORP GEOMETRIC

SEGMENTUL. SEMIDREAPTA

1. SEGMENTUL

$[AB]$ = segment închis $\quad$ (AB) = segment deschis

$A \in [AB]$ $\quad$ $A \notin (AB)$

$B \in [AB]$ $\quad$ $B \notin (AB)$

LUNGIMEA UNUI SEGMENT reprezintă nr. rațional pozitiv care arată câte unități de măsură conține segmentul dat.

u = o unitate de măsură

$AB = 10u$

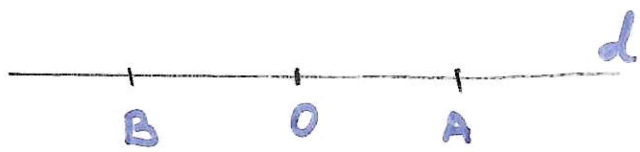
Obs. $AM = MB = 5u$

$\Rightarrow [AM] \equiv [MB]$ $\quad$ „$\equiv$" congruent cu

$M \in (AB)$ a.î. $[AM] \equiv [MB] \Rightarrow$

M este mijlocul $[AB]$

2. SEMIDREAPTA



$[OA$ = semidreaptă închisă $O \in [OA$

$(OA$ = semidreaptă deschisă $O \notin (OA$

O – originea semidreptei

$\left.\begin{matrix}[OA \\ [OB\end{matrix}\right\rangle$ semidrepte OPUSE

$[OA \cap [OB = \{O\}$

$(OA \cap (OB = \emptyset$

$[BA \cap [AB = [AB]$

$[BA \setminus (OA = [BO]$

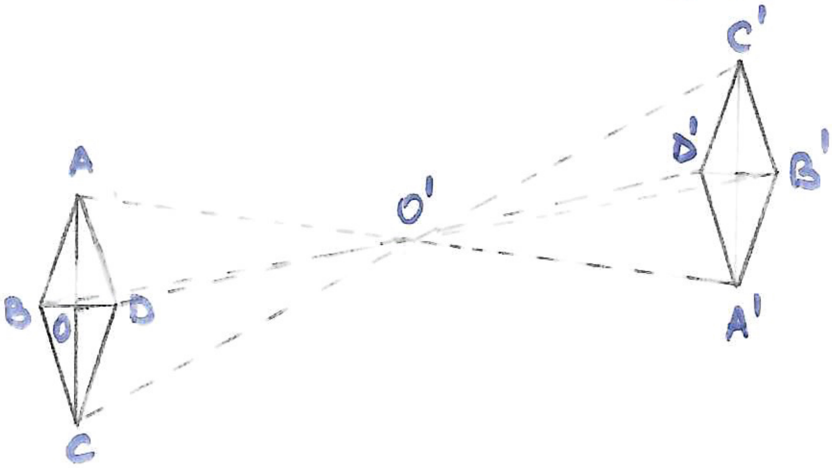
SIMETRIA ȘI TRANSLAȚIA

1. SIMETRIA

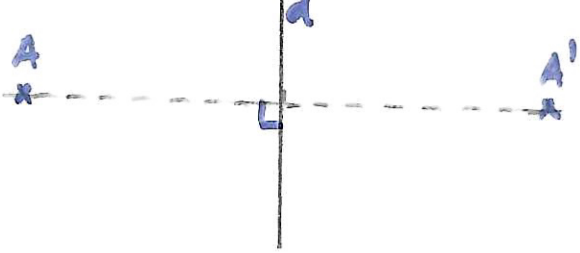
Simetria față de un punct

A' = simetricul punctului A față de O

$O \in (AA')$ a.î. $[OA] \equiv [OA']$

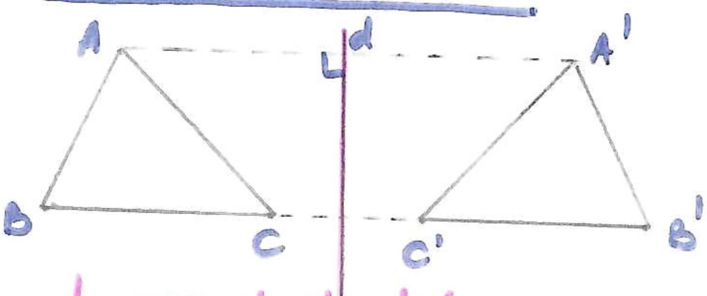


Simetria față de o dreaptă

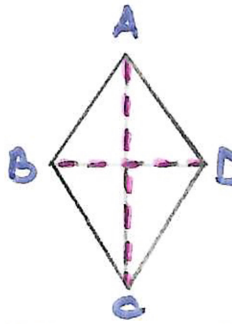


A' = simetricul punctului A față de dreapta d

Axa de simetrie



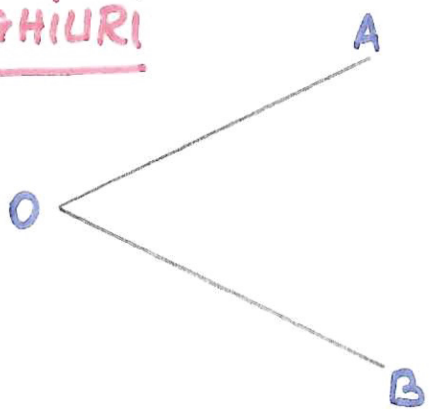
d - axa de simetrie



AC, BD > axe de simetr[ie] ale rombului

FIGURI GEOMETRICE PLANE

UNGHIURI



$[OA$, $[OB$ > laturi

O - vârful unghiului

$[OA \cup [OB = \sphericalangle AOB = \sphericalangle O$

$\sphericalangle AOB = \widehat{AOB}$

CLASIFICAREA UNGHIURILOR

1. UNGHI ALUNGIT (are laturile semidrepte opuse)

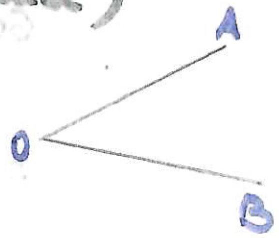
$\sphericalangle AOB$ - unghi alungit

$$\boxed{m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ}$$

2. UNGHIURI PROPRII (laturile nu sunt opuse)

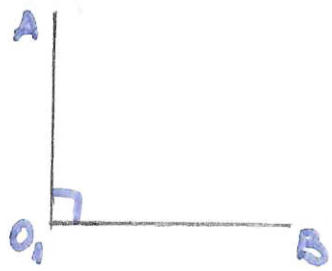
- unghi ascuțit

$0^\circ < m(\sphericalangle O) < 90^\circ$



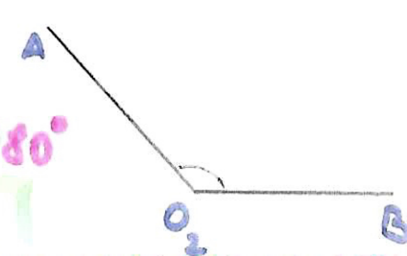
- unghi drept

$m(\sphericalangle O_1) = 90^\circ$



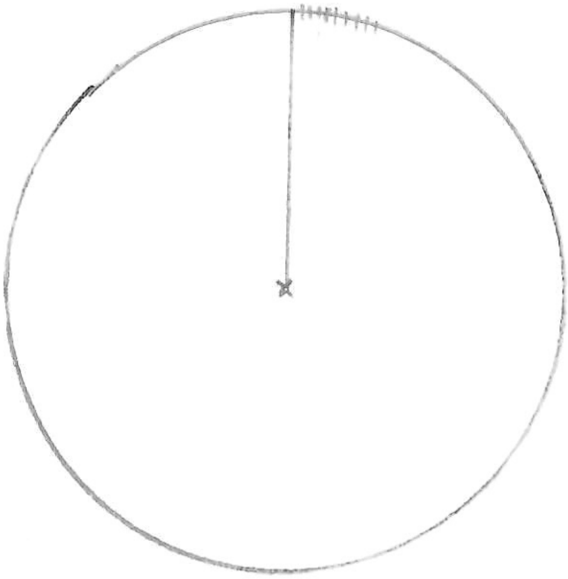
- unghi obtuz

$90^\circ < m(\sphericalangle O_2) < 180^\circ$



Obs. $m(\sphericalangle O) = 0^\circ$ – unghiul este nul

Unitatea de măsură a unghiurilor



360 de părți egale
(ARCE)

1° = grad sexagesimal

↓

unitatea de măsură a unghiurilor

- Altă unitate de măsură a unghiurilor : RADIANUL

$$1 \text{ RADIAN} = 180^\circ \rightarrow \pi \text{ (nr. irațional)}$$

$$\pi \approx 3,14$$

$$90^\circ \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$60^\circ \rightarrow \frac{\pi}{3}$$

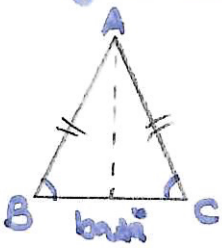
$$30^\circ \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$15^\circ \rightarrow \frac{\pi}{12}$$

TRIUNGHIUL

CLASIFICAREA TRIUNGHIURILOR

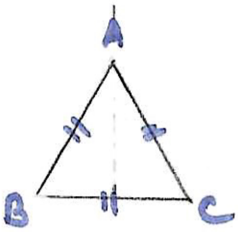
1 a) Triunghiul isoscel



$\Delta ABC : [AB] \equiv [AC]$

$\sphericalangle B = \sphericalangle C$

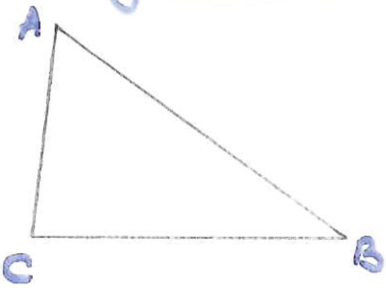
b) Triunghiul echilateral



$\Delta ABC : [AB] \equiv [BC] \equiv [AC]$

$\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C$

c) Triunghiul oarecare (SCALEN)



$\Delta ABC : [AB] \not\equiv [BC] \not\equiv [AC] \not\equiv [AB]$

Elementele triunghiului

A, B, C - puncte necoliniare distincte

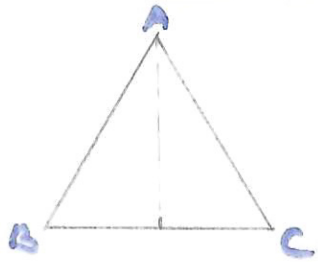
$[AB] \cup [BC] \cup [AC] = \Delta ABC$

A, B, C - vârfuri

$[AB], [AC], [BC]$ - laturi

$\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ - unghiurile ΔABC

2 a) Triunghiul ascuțitunghic

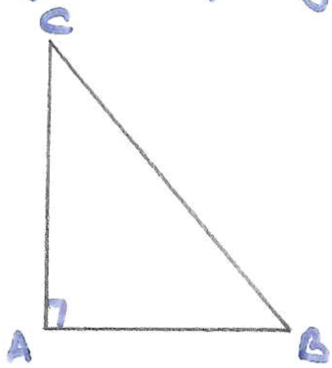


$\Delta ABC: 0° < m(\sphericalangle A) < 90°$

$0° < m(\sphericalangle B) < 90°$

$0° < m(\sphericalangle C) < 90°$

b) Triunghi dreptunghic



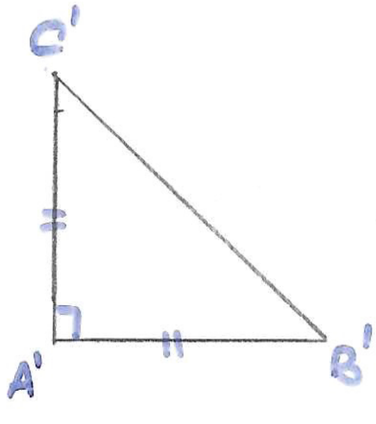
$\Delta ABC: m(\sphericalangle A) = 90°$

$0° < m(\sphericalangle B) < 90°$

$0° < m(\sphericalangle C) < 90°$

$[AC], [AB]$ - catete

$[BC]$ - ipotenuză



$\Delta A'B'C'$ - dreptunghic isoscel

$[A'C'] \equiv [A'B']$

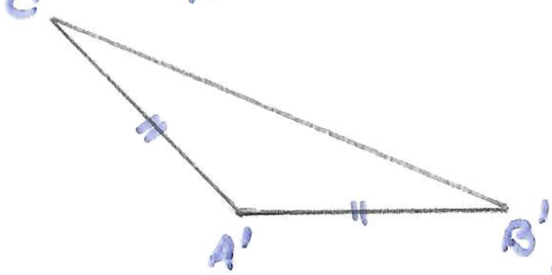
$m(\sphericalangle A') = 90°$

c) Triunghiul obtuzunghic

$\Delta ABC: 90° < m(\sphericalangle A) < 180°$

$0° < m(\sphericalangle B) < 90°$

$0° < m(\sphericalangle C) < 90°$

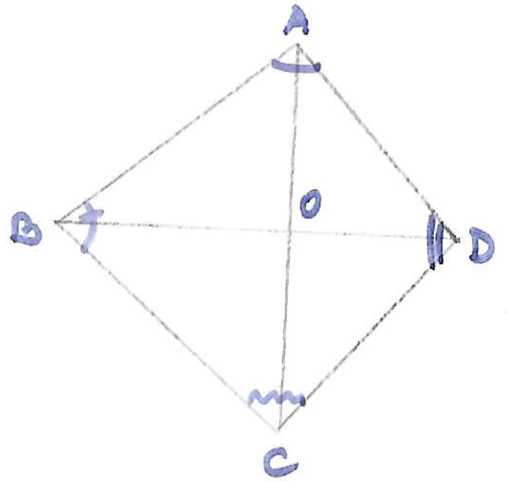


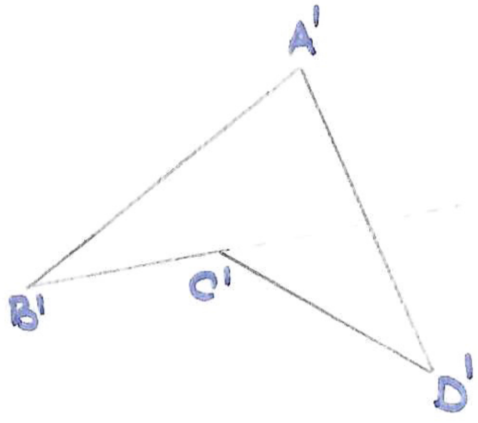
$\Delta A'B'C'$ - obtuzunghic isoscel

$[A'C'] \equiv [A'B']$

$90° < m(\sphericalangle A') < 180°$

PATRULATERUL





ABCD - patrulater convex

A'B'C'D' - patrulater concav

A, B, C, D - vârfuri

[AB], [BC], [CD], [DA] - laturi

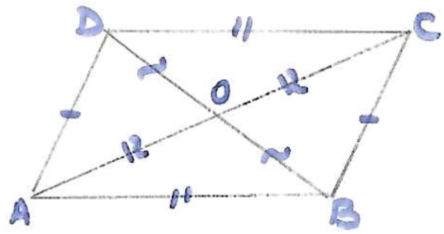
[AC], [BD] - diagonale

$(AC) \cap (BD) = \{O\}$

$\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$ - unghiuri

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$

PARALELOGRAMUL



Def.: Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două

(P1) Laturile opuse sunt congruente într-un paralelogram

$[AB] \equiv [DC]$

$[AD] \equiv [BC]$

(P2) Unghiurile opuse ale paralelogramului sunt congruente

$\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$

$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$

(P3) Într-un paralelogram, diagonalele se înjumătățesc

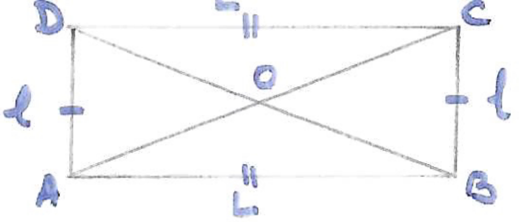
$[AO] \equiv [OC]$

$[DO] \equiv [OB]$

Paralelograme speciale

1. DREPTUNGHIUL
2. ROMBUL
3. PĂTRATUL

1. **DREPTUNGHIUL**



Def. Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept

(P1) Într-un dreptunghi, laturile opuse sunt congruente

$[AB] \equiv [DC]$ $L = AB$ (lungime)

$[AD] \equiv [BC]$ $l = AD$ (lățime)

(P2) Într-un dreptunghi diagonalele se înjumătățesc în părți congruente

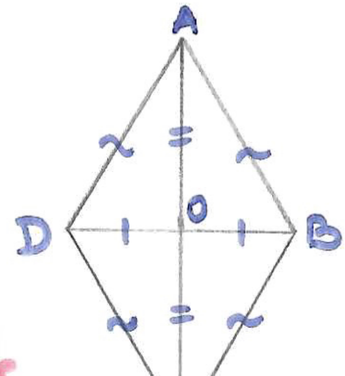
$[AO] \equiv [OC] \equiv [DO] \equiv [OB]$

(P3) Într-un dreptunghi toate unghiurile sunt drepte

$m(\sphericalangle A) = 90^\circ$ $m(\sphericalangle C) = 90^\circ$

$m(\sphericalangle B) = 90^\circ$ $m(\sphericalangle D) = 90^\circ$

2. **ROMBUL**



Def. Rombul este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.

P_1 Într-un romb toate laturile sunt congruente

$[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DA] \equiv [AB]$

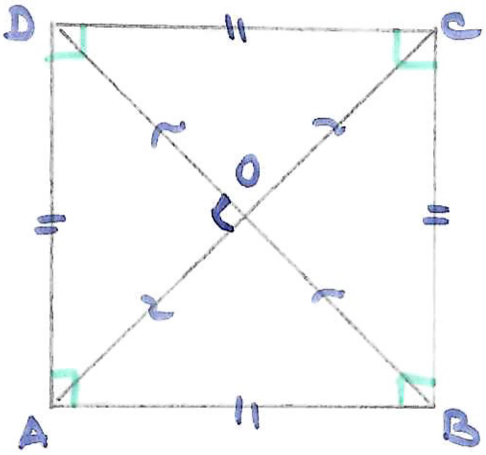
P_2 Într-un romb diagonalele sunt perpendiculare și se înjumătățesc.

$m(\sphericalangle AOD) = 90^\circ$ $m(\sphericalangle COB) = 90^\circ$

$m(\sphericalangle DOC) = 90^\circ$ $m(\sphericalangle BOA) = 90^\circ$

$[AO] \equiv [OC]$ $[DO] \equiv [OB]$

3. PĂTRATUL



Def: Pătratul este rombul cu un unghi drept

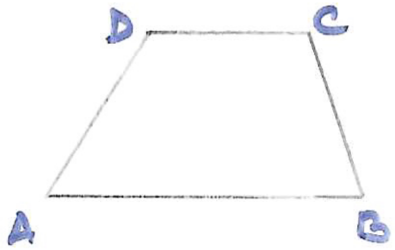
P_1 Toate laturile sunt congruente

P_2 Toate unghiurile sunt drepte

P_3 Diagonalele sunt perpendiculare și se înjumătățesc în părți congruente

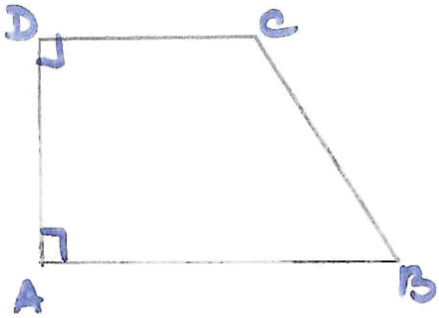
ALTE FIGURI GEOMETRICE PLANE

TRAPEZ



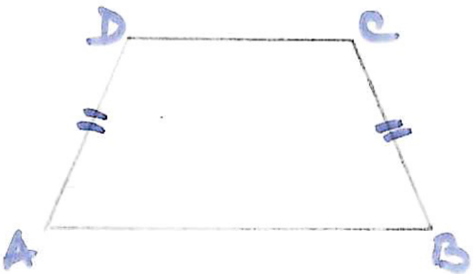
Trapez oarecare

AB = baza mare
CD - baza mică
AB // CD
[AD], [BC] - laturi neparalele



Trapez dreptunghic

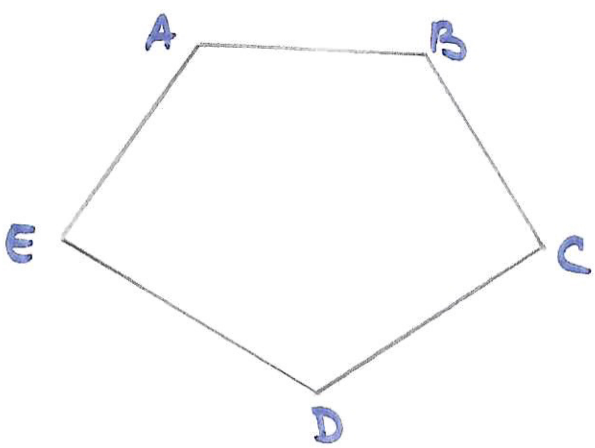
m(∢D) = 90°
m(∢A) = 90°



Trapez isoscel

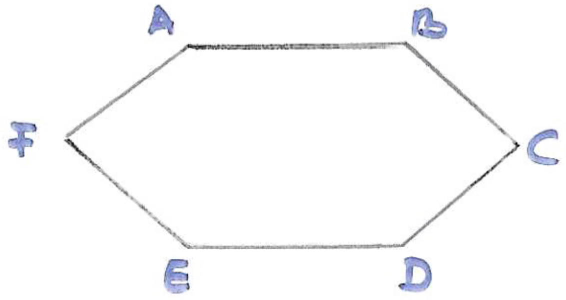
[AD] ≡ [BC]

PENTAGON



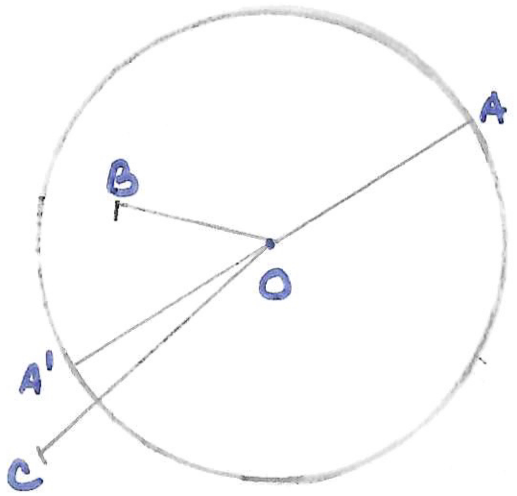
5 laturi

HEXAGON



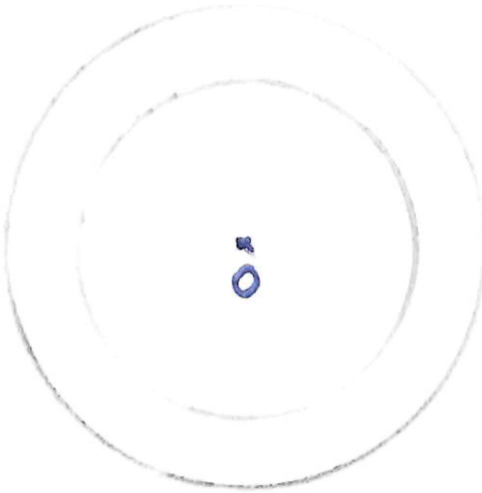
6 laturi

CERC

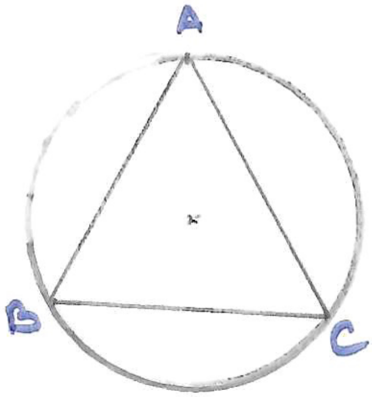


OA - rază cercului

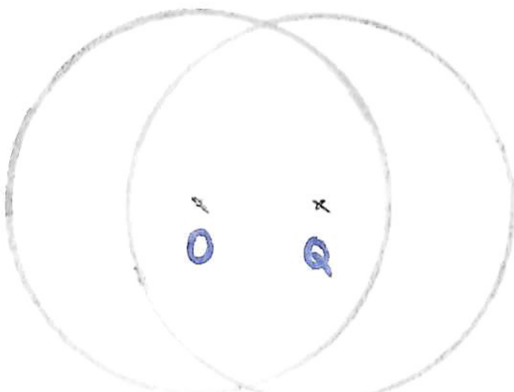
AA' - diametrul cercului

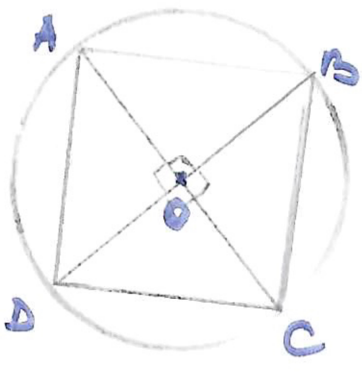


Cercuri concentrice



Δ ABC înscris în cerc





Operații cu lungimi de segmente

Lungimea unui segment este nr. pozitiv egal cu valoarea raportului dintre segmentul dat și unitatea de măsură aleasă.

$AB = 6,5$ u.m.

Def.: Un punct interior unui segment se numește **mijlocul segmentului** dacă este egal depărtat de extremitățile lui.

$M \in (AB)$ a.î. $AM = MB = \frac{AB}{2}$

Def.: Două segmente se numesc CONGRUENTE dacă au lungimile egale.

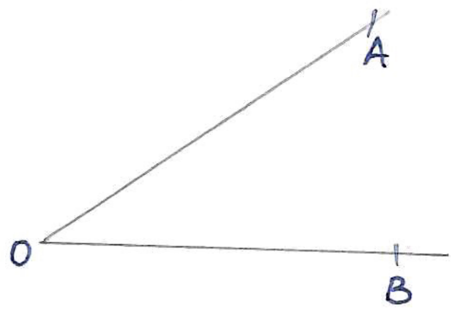
$[AB] \equiv [A'B'] \iff AB = A'B'$

UNGHIURILE

Def.: Unghiul este figura obținută prin reunirea punctelor situate pe două semidrepte închise cu originea comună.

Elemente: – vârful unghiului: O
– laturile unghiului: [OA ; [OB.

Notații: • $\sphericalangle O$; $\hat{O}$
• $\sphericalangle AOB$; $\sphericalangle BOA$
$\widehat{AOB}$; $\widehat{BOA}$
• $\sphericalangle ([OA , [OB)$



Clasificarea unghiurilor:

1. $[OX = [OY$

$\sphericalangle XOY$ - unghi nul

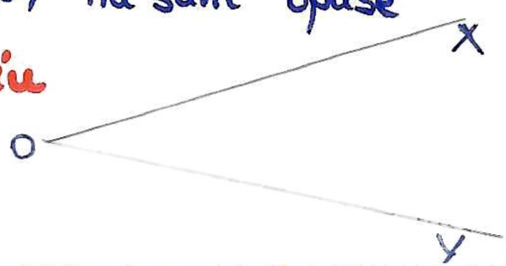
2. $[OX$, $[OY$ opuse

$\sphericalangle XOY$ - unghi alungit

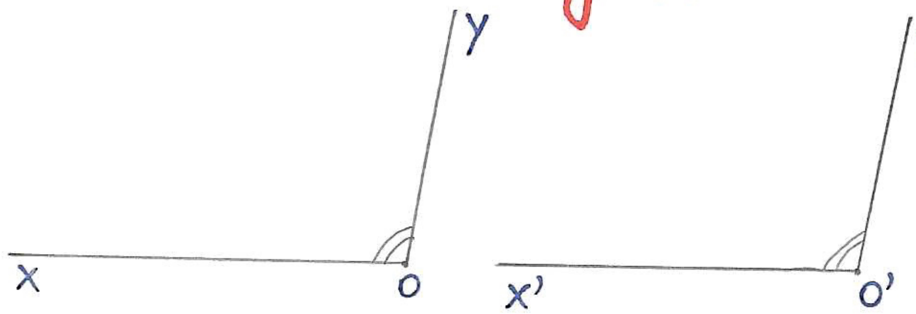
$[OX \cap [OY = \{O\}$
și $[OX \cup [OY = XY$
$O \in (XY)$

3. $[OX \neq [OY$, $[OX$ și $[OY$ nu sunt opuse

$\sphericalangle XOY$ - unghi propriu



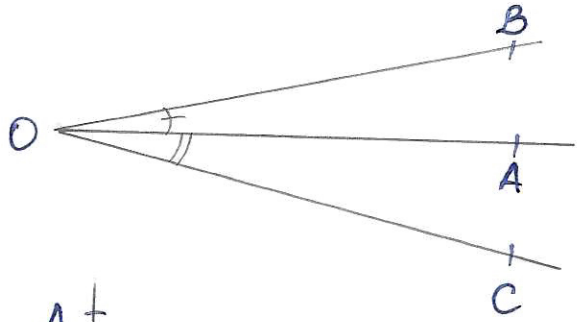
Def. Două unghiuri se numesc CONGRUENTE dacă au măsurile egale.



$\sphericalangle xOy \equiv \sphericalangle x'O'y'$

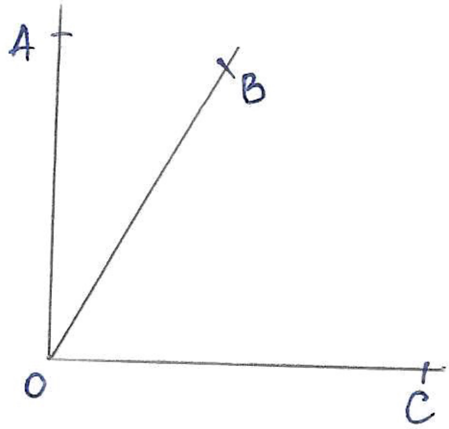
$m(\sphericalangle xOy) = 100^\circ$

Def. Două unghiuri se numesc ADIACENTE dacă au vârful comun, o latură comună, iar laturile necomune sunt situate în semiplane diferite determinate de latura comună.



$\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOC$ – adiacente

$\sphericalangle COB$, $\sphericalangle AOB$ – neadiacente

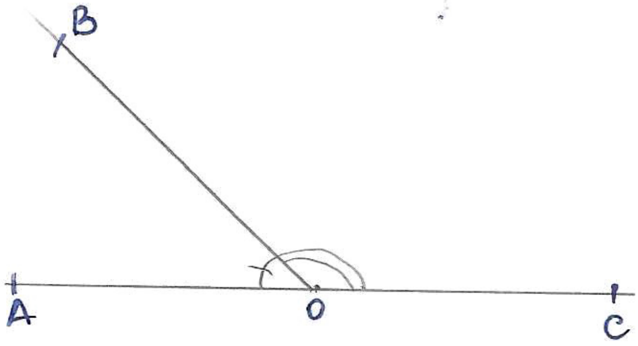


$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$

$\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ – adiacente complementare

$\sphericalangle AOB$ – complementul $\sphericalangle BOC$

$\sphericalangle AOC$; $\sphericalangle BOC$ – neadiacente



$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 180^\circ$

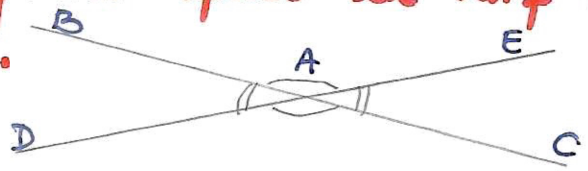
$\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ – adiacente suplementare

$\sphericalangle AOB$ – suplementul $\sphericalangle BOC$

Unghiuri opuse la vârf

Def. Două unghiuri se numesc opuse la vârf dacă au vârful comun și laturile unui unghi sunt semidrepte opuse laturilor celuilalt unghi.

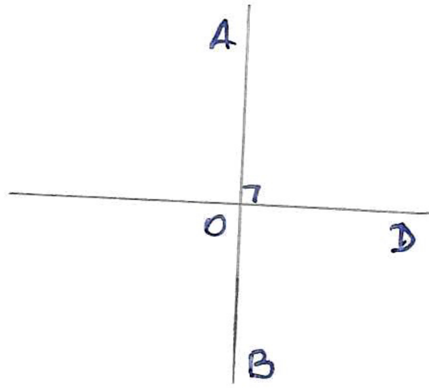
Teoremă Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente.



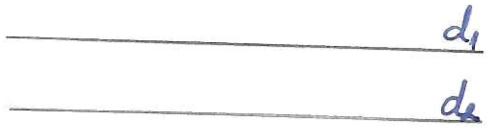
Def. Măsura unghiului dintre două drepte concurente (care nu sunt perpendiculare) este egală cu măsura unghiului ascuțit format în punctul de intersecție.

$$m(\widehat{BC, DE}) = m(\sphericalangle BAD)$$

Dacă $AB \perp CD \Rightarrow m(\widehat{AB, CD}) = m(\widehat{AOD}) = 90^\circ$



Dacă $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow m(\widehat{d_1, d_2}) = 0^\circ$

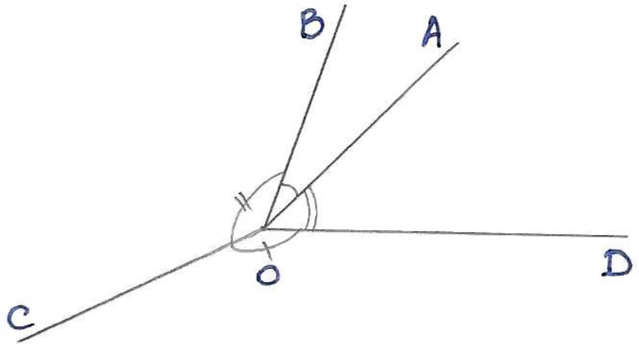


Reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf

Dacă două unghiuri congruente au vârful comun, o pereche de laturi sunt semidrepte opuse, iar celelalte două laturi sunt situate de o parte și de alta a dreptei determinate de primele laturi, atunci unghiurile sunt opuse la vârf.

Unghiuri în jurul unui punct

Def.: Fiind dat un punct în plan și mai multe semidrepte cu originea comună în punctul dat, se numesc unghiuri în jurul unui punct unghiurile ale căror laturi sunt semidreptele date care nu au puncte interioare comune.

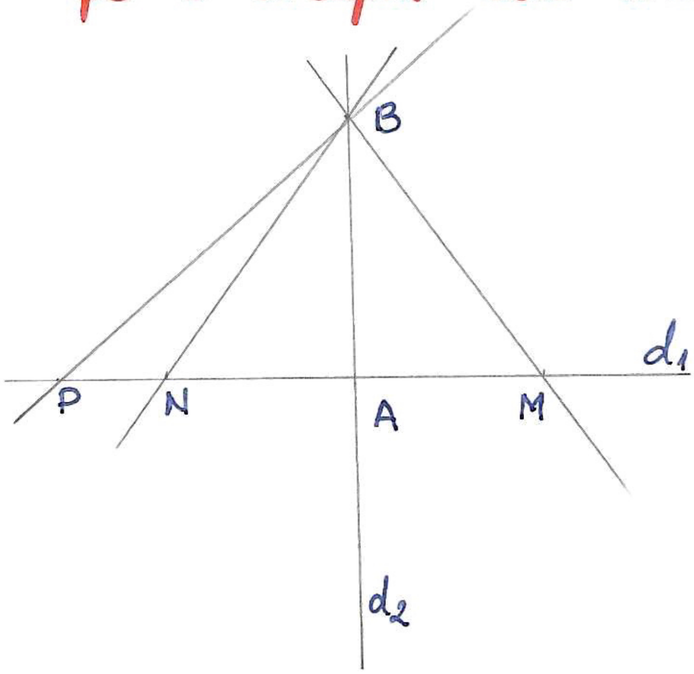


Orice punct din plan aparține fie unei semidrepte fie interiorului unui unghi.

Teoremă Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este $360°$.

PERPENDICULARITATEA

Teoremă Perpendiculara dintr-un punct exterior pe o dreaptă este unică.



$d_1 \cap d_2 = \{A\}$

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m(\measuredangle A) = 90$

$B \in d_2$, $B \neq A$

$\Rightarrow AB \perp d_1$

$d(B, d_1) = AB$

Teoremă Două oblice egal depărtate de piciorul perpendicularei sunt congruente. *)

Perpendiculara într-un punct pe o dreaptă este unică

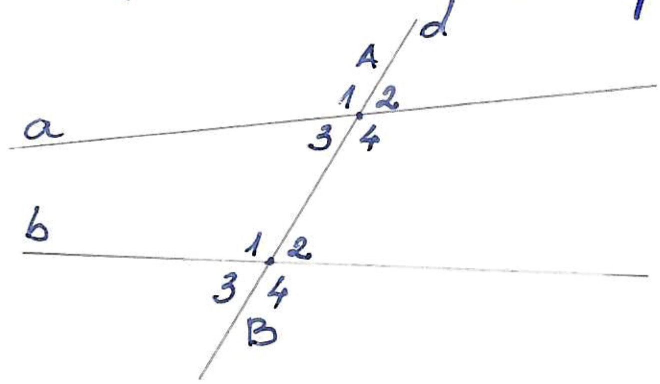
$$\left.\begin{array}{l} A \in d_1 \\ d_2 \cap d_1 = \{A\} \\ d_2 \perp d_1 \end{array}\right| \Rightarrow d_2 \text{ - perpendiculara în A pe } d_2$$

*) d_1 și BM sunt oblice $\Leftrightarrow m(\measuredangle M) \neq 90$ în punctul de intersecț

PARALELISM

Def. Două drepte coplanare care nu au niciun punct comun / a căror intersecție este vidă se numesc drepte paralele.

Unghiuri formate de două drepte cu o secantă



$\left.\begin{array}{l}(\hat{A}_3, \hat{B}_2) \\ (A_4, B_1)\end{array}\right\}$ ∢ alterne interne (a.i.)

$\left.\begin{array}{l}(A_1, B_4) \\ (A_2, B_3)\end{array}\right\}$ ∢ alterne externe (a.e.)

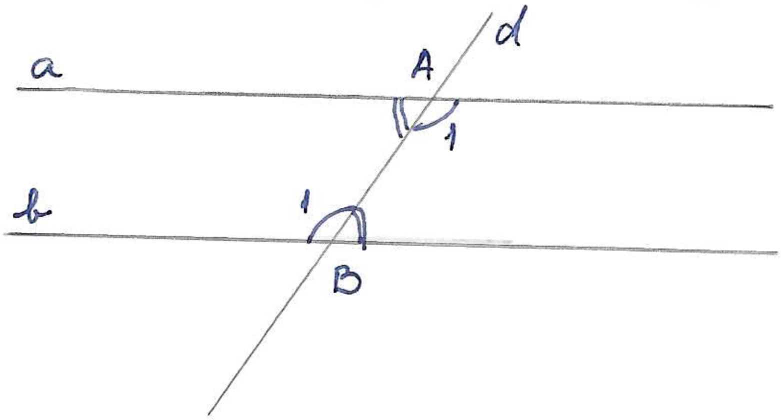
$\left.\begin{array}{l}(A_1, B_1) \\ (A_2, B_2) \\ (A_3, B_3) \\ (A_4, B_4)\end{array}\right\}$ ∢ corespondente

$\left.\begin{array}{l}(A_3, B_1) \\ (A_4, B_2)\end{array}\right\}$ ∢ interne de aceeași parte a secantei

$\left.\begin{array}{l}(A_1, B_3) \\ (A_2, B_4)\end{array}\right\}$ ∢ externe de aceeași parte a secantei

Teorema (de paralelism)

Dacă două drepte formează cu o secantă care le intersectează o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.



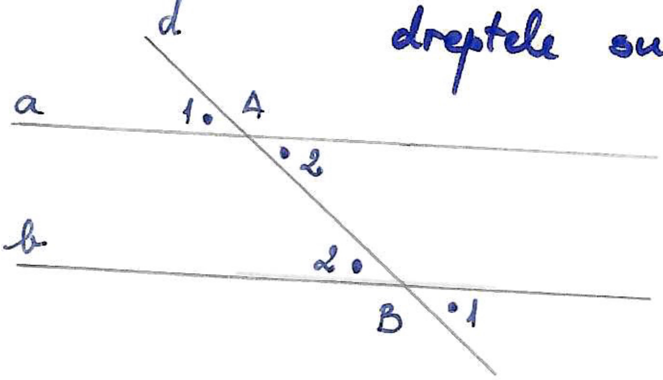
a, b

$a \cap d = \{A\}$

$b \cap d = \{B\}$

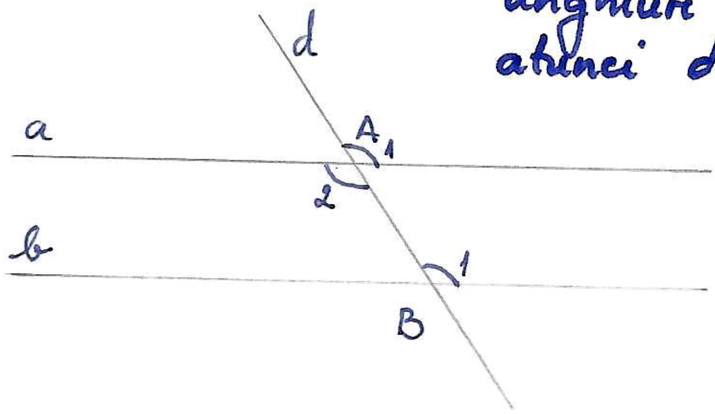
$\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1$ (a.i.)

Consecința 1 (C_1) Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele.



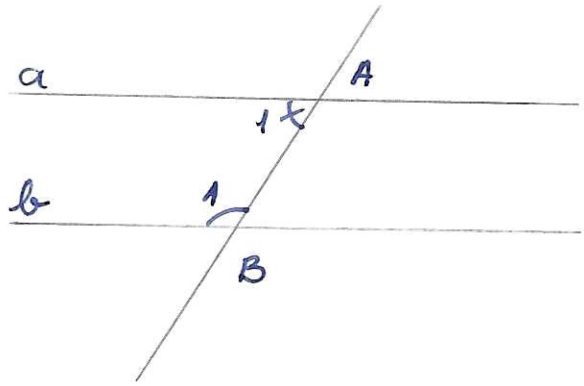
$\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1$ (a.e.)

Consecința 2 (C_2) Dacă două drepte formează cu o secantă care le intersectează unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele.



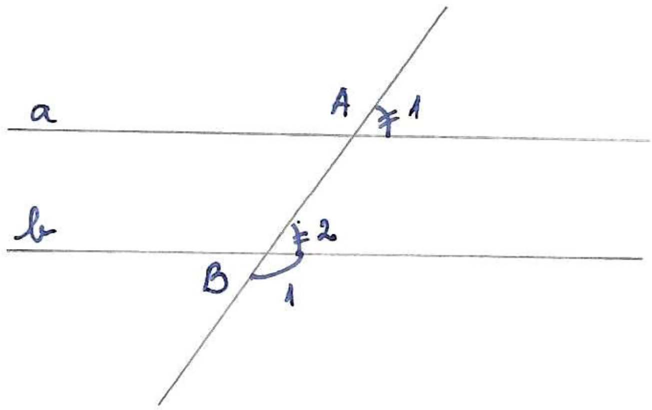
$\sphericalangle A_1 \equiv \sphericalangle B_1$ (coresp.)

Consecința 3 (C_3) Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.



$$m(\sphericalangle A_1) + m(\sphericalangle B_1) = 180^\circ$$

Consecința 4 (C_4) Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare atunci dreptele sunt paralele.



$$m(\sphericalangle A_1) + m(\sphericalangle B_1) = 180^\circ$$

R_1 Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu o secantă care le intersectează unghiuri alterne interne congruente.

R_2 Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu orice secantă care le intersectează unghiuri alterne externe congruente.

R_3 Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu o secantă care le intersectează unghiuri corespondente congruente.

R_4 Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu o secantă care le intersectează unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.

R_5 Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu o secantă care le intersectează unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare.