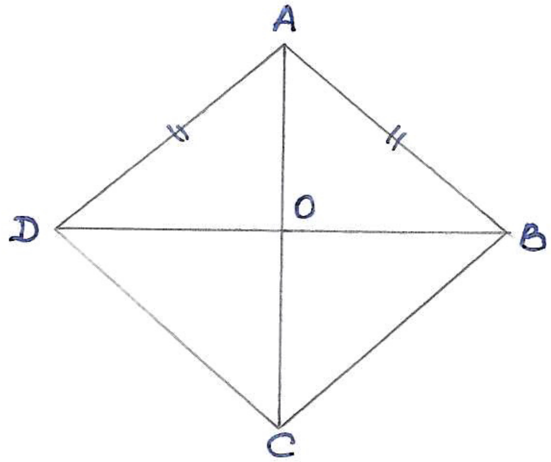
ROMBUL

Def. Rombul este paralelogramul cu două laturi consecutive congruente.



ABCD – paralelogram

$(AB) \equiv (AD)$

$\Rightarrow$ ABCD – romb

P1 ABCD – romb $\Rightarrow$ $AB \parallel CD$
$AD \parallel BC$

P2 ABCD – romb $\Rightarrow$ $(AD) \equiv (BC)$
$(AB) \equiv (CD)$
$(AB) \equiv (AD)$
$\Rightarrow (AD) \equiv (BC) \equiv (AB) \equiv (CD)$

P3 ABCD – romb $\Rightarrow$ $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$
$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$

P4 ABCD – romb $\Rightarrow m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) =$
$= m(\sphericalangle C) + m(\sphericalangle D) = m(\sphericalangle D) + m(\sphericalangle A) =$
$= 180^\circ$

P5 ABCD – romb $\Rightarrow$ $(AO) \equiv (OC)$
$(BO) \equiv (OD)$

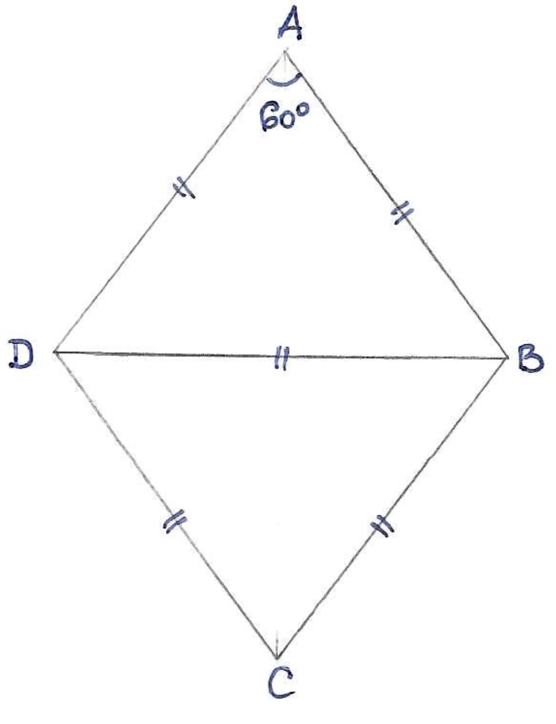
P_6 ABCD - romb
$AC \cap BD = \{O\}$ $\Bigg| \Rightarrow$ $\Delta ABD : (AB) \equiv (AD) \Rightarrow \Delta ABD$ isoscel
$(BO) \equiv (DO) \Rightarrow AO$ mediană

$\Rightarrow AO \perp BD \Rightarrow AC \perp BD$

Rombul este un patrulater ortodiagonal

P_7 ABCD - romb $\Rightarrow$ AC - bisect. $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$
BD - bisect. $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle D$

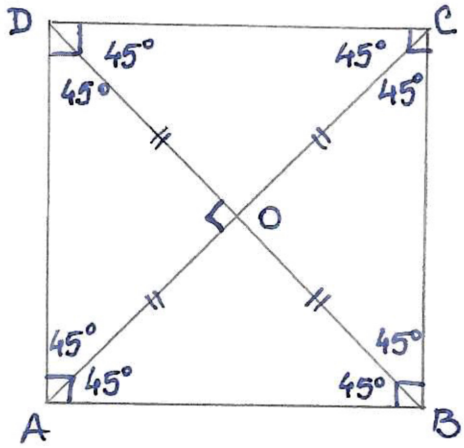
<u>Observație</u> ABCD - romb
$m(\sphericalangle A) = 60°$ $\Bigg| \Rightarrow \Delta ABD$, ΔCBD echilaterale



PĂTRATUL

Def. 1 Pătratul este dreptunghiul cu două laturi consecutive congruente.

Def. 2 Pătratul este rombul cu un unghi drept.



P1 ABCD - pătrat

$\Rightarrow AB \parallel CD$

$AD \parallel BC$

$(AB) \equiv (BC) \equiv (CD) \equiv (DA)$

P2 ABCD - pătrat

$\Rightarrow m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle D) = 90°$

P3 ABCD - pătrat

$\Rightarrow$ 1. $(AC) \equiv (BD)$

2. $(AO) \equiv (OB) \equiv (OC) \equiv (OD)$, $\{O\} = AC \cap BD$

3. $AC \perp BD$

4. AC - bisect. $\sphericalangle A$; $\sphericalangle C$

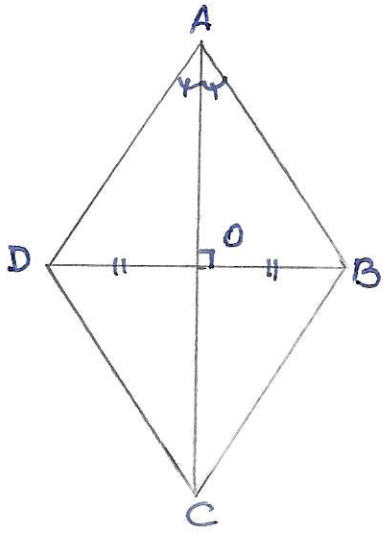
BD - bisect. $\sphericalangle B$; $\sphericalangle D$

P4 ABCD - pătrat

$\Rightarrow \triangle OAB \equiv \triangle OBC \equiv \triangle OCD \equiv \triangle ODA$ dreptunghice isoscele

Observație $AC \perp BD \Rightarrow$ ABCD - patrulater ortodiagonal

R1 Un paralelogram cu diagonalele perpendiculare este un romb.

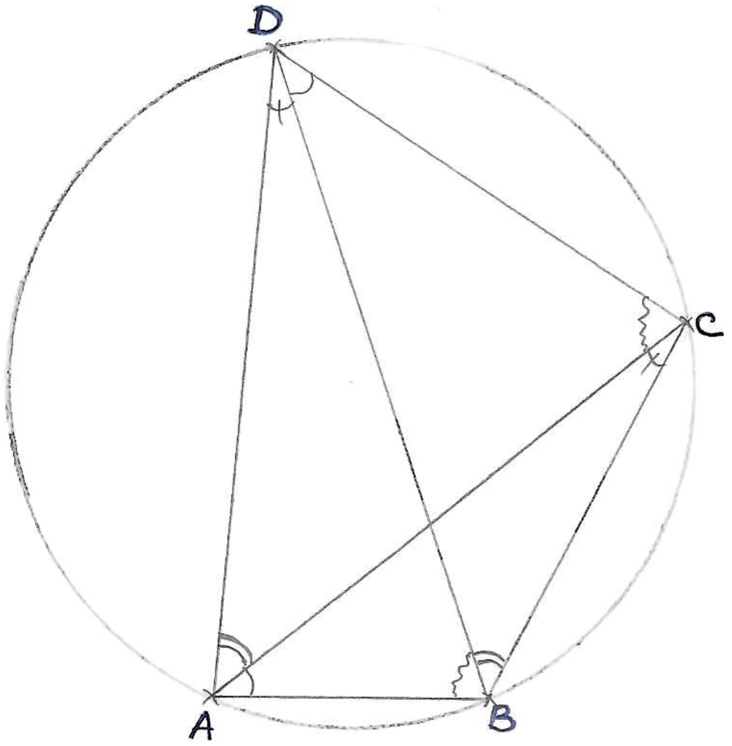


$AC \perp BD$

R2 Dacă într-un paralelogram o diagonală este bisectoare pentru unghiul paralelogramului atunci el este romb.

PATRULATERUL ÎNSCRIPTIBIL

Def. Patrulaterul inscriptibil este patrulaterul ale cărui vârfuri sunt puncte conciclice.



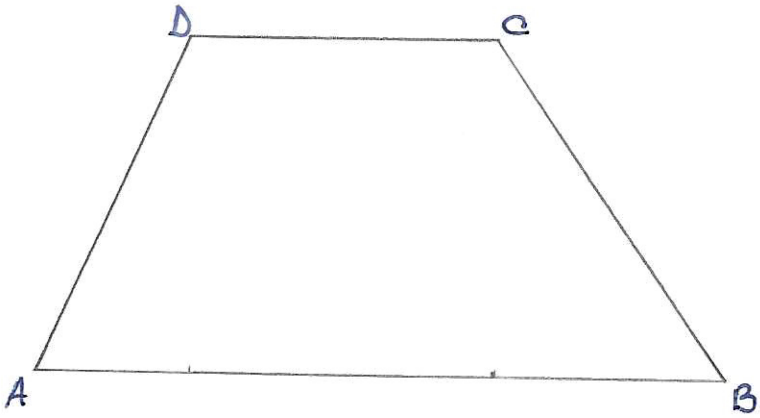
(P1) ABCD - inscriptibil $\Leftrightarrow$ $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C) = 180°$
$m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle D) = 180°$

(P2) Într-un patrulater inscriptibil, unghiurile formate de diagonale cu laturile opuse sunt congruente.

TRAPEZUL

Def. Trapezul este patrulaterul convex cu două laturi paralele și două laturi neparalele.

Observație Într-un trapez, laturile paralele $\boxed{\text{NU}}$ sunt congruente.



$AB \parallel CD$

$AB > CD$

$[AB]$ - baza mare

$[CD]$ - baza mică

$[AD]$; $[BC]$ - laturi neparalele

P_1 ABCD - trapez : $AB \parallel CD$

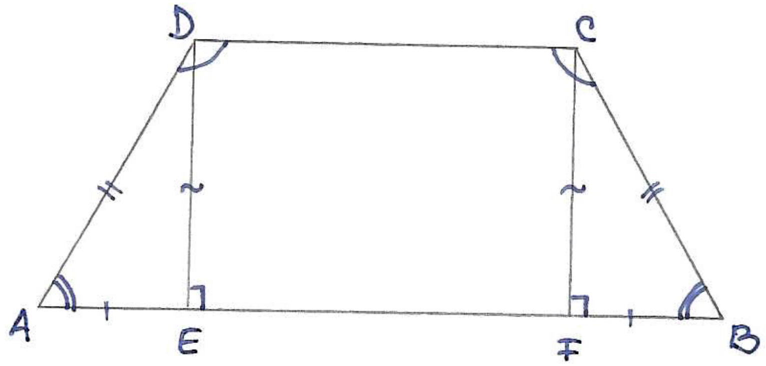
$m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle D) = 180^\circ$

$m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ$

→ unghiuri interne de aceeași parte a secantei

TRAPEZUL ISOSCEL

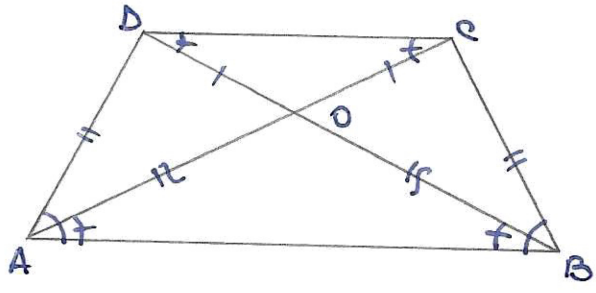
Def.: Un trapez se numește isoscel dacă are laturile neparalelele congruente.



P1 Într-un trapez isoscel, unghiurile alăturate fiecărei baze sunt congruente.

ABCD : $AB \parallel CD$, $[AD] \equiv [BC]$ $\Rightarrow$ $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$, $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle C$

P2 Într-un trapez isoscel, diagonalele sunt congruente.



ABCD – trapez : $AB \parallel CD$, $[AD] \equiv [BC]$ $\Rightarrow [AC] \equiv [BD]$

P3 Într-un trapez isoscel, triunghiurile formate de diagonale cu bazele sunt triunghiuri isoscele, necongruente, asemenea.

ABCD – trapez isoscel
Fie $\{O\} = AC \cap BD$ $\Rightarrow$ ΔOAB – isoscel, $[OA] \equiv [OB]$; ΔODC – isoscel, $[OD] \equiv [OC]$

$\Delta OAB \sim \Delta ODC$

P4 Într-un trapez isoscel, diagonalele formează cu laturile neparalele două triunghiuri congruente.

ABCD - trapez isoscel: $\{O\} = AC \cap BD$

$\left.\begin{array}{l}\Delta AOD \\ \Delta BOC\end{array}\right\{\begin{array}{l}[AD] \equiv [BC] \\ [AO] \equiv [OB] \\ [CO] \equiv [OD]\end{array} \overset{L.L.L}{\Longrightarrow} \Delta AOD \equiv \Delta BOC$

<u>Obs.</u> Trapezul isoscel este un patrulater inscriptibil.

$$m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ$$

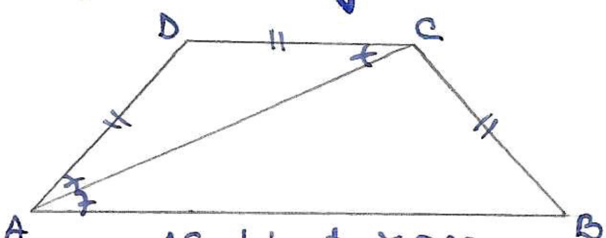
R1 Dacă într-un trapez, unghiurile alăturate unei baze sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

$\left.\begin{array}{l}ABCD \text{ - trapez} \\ AB \parallel CD \\ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle B\end{array}\right| \Rightarrow ABCD$ - trapez isoscel

R2 Dacă într-un trapez diagonalele sunt congruente, atunci trapezul este isoscel.

$\left.\begin{array}{l}ABCD \text{ - trapez} \\ AB \parallel CD \\ [AC] \equiv [BD]\end{array}\right| \Rightarrow ABCD$ - trapez isoscel

P Într-un trapez isoscel, baza mică este congruentă cu laturile neparalele $\Leftrightarrow$ diagonala este bisectoare pentru unghiul alăturat bazei mari.



AC - bisect. $\sphericalangle DAB$

ABCD - trapez: $AB \parallel CD$

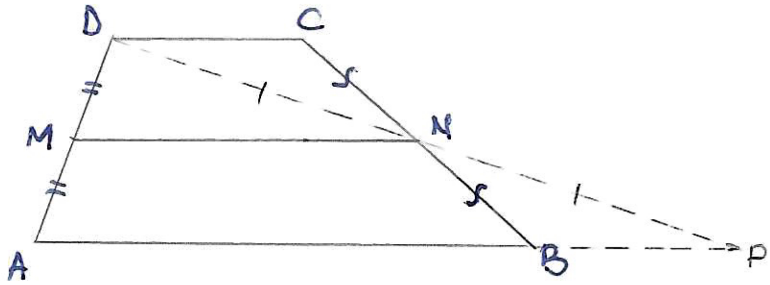
$[AD] \equiv [BC] \equiv [CD]$

ΔDAC - isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle DAC) = m(\sphericalangle DCA)$

$\left.\begin{array}{l}AB \parallel DC \\ AC \text{ - secantă}\end{array}\right| \Rightarrow \sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle CAB$ (a.i) $\Rightarrow$

LINIA MIJLOCIE ÎN TRAPEZ

Def. Linia mijlocie a unui trapez este segmentul determinat de mijloacele laturilor neparalelele ale trapezului.



Teoremă Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu bazele și egală cu semisuma lor.

I: ABCD - trapez

$AB \parallel CD$

M - mijl. $[AD]$

N - mijl. $[BC]$

C: a) $MN \parallel AB \parallel CD$

b) $MN = \frac{AB+CD}{2}$

Dem. b) $MN = \frac{AP}{2} = \frac{AB+BP}{2} =$ $\boxed{MN = \frac{AB+DC}{2}}$

Dem. a) Fie $DN \cap AB = \{P\}$

$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DC \\ BC\text{-secantă} \end{array}\right| \Rightarrow \sphericalangle DCN \equiv \sphericalangle PBN$ (a.i)

$\begin{array}{l} \triangle NCD \\ \triangle NBP \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sphericalangle CND \equiv \sphericalangle BNP \text{ (op. la vf.)} \\ [NC] \equiv [NB] \\ \sphericalangle DCN \equiv \sphericalangle PBN \end{array} \right. \xRightarrow{U.L.U} \triangle NCD \equiv \triangle NBP \Rightarrow$

$[DN] \equiv [NP]$

$[BP] \equiv [CD]$

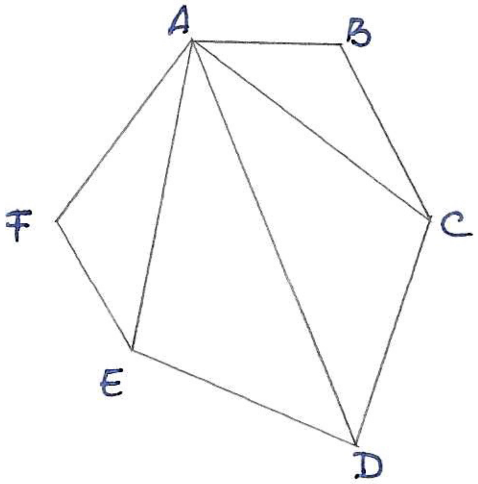
În $\triangle DAP$: $\left.\begin{array}{l} [DM] \equiv [MA] \\ [DN] \equiv [NP] \end{array}\right| \Rightarrow MN$ l.m. $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} MN \parallel AP \\ B \in (AP) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{MN \parallel AB \parallel CD}$

ARII

Aria unui poligon este un număr real pozitiv unic asociat poligonului cu proprietățile:

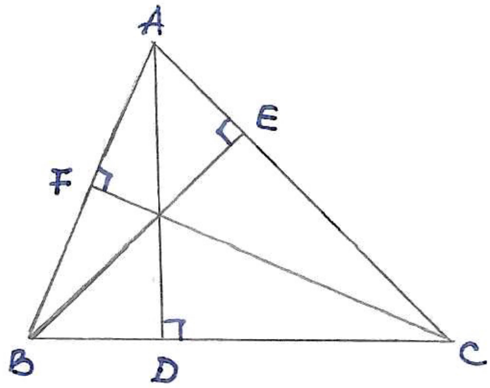
- la poligoane congruente corespund arii egale
- dacă un poligon e format din mai multe poligoane adiacente, atunci aria lui este egală cu suma ariilor poligoanelor care-l formează.
- unitatea de măsură pentru arie este $\boxed{m^2}$.

Def.: Două poligoane care au arii egale se numesc poligoane echivalente.



$$A_{ABCDEF} = A_{ABC} + A_{ACD} + A_{ADE} + A_{AE}$$

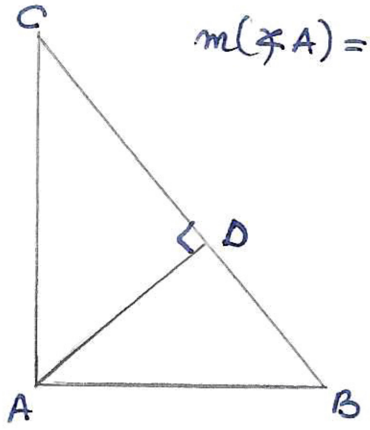
Aria triunghiului



$$A_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$BC \cdot AD = AC \cdot BE = AB \cdot CF$

Aria triunghiului dreptunghic

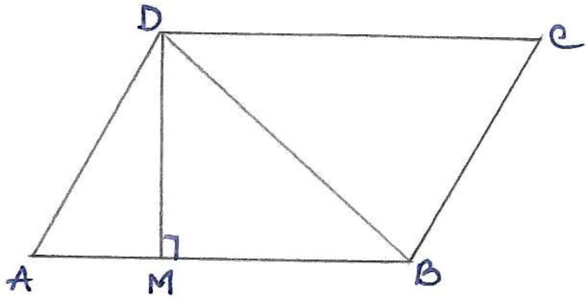


$m(\measuredangle A) = 90^\circ$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$

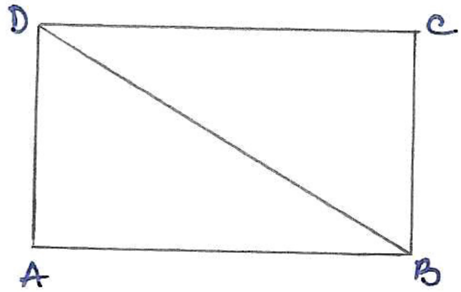
$$h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip.}$$

Aria paralelogramului



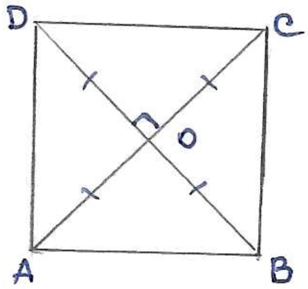
$$\mathcal{A}_{ABCD} = b \cdot h$$

Aria dreptunghiului



$$\mathcal{A}_{ABCD} = L \cdot l$$

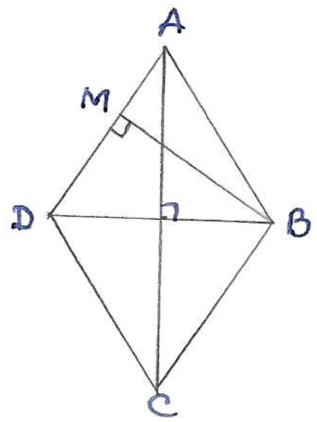
Aria pătratului



$$\mathcal{A}_{ABCD} = l^2$$

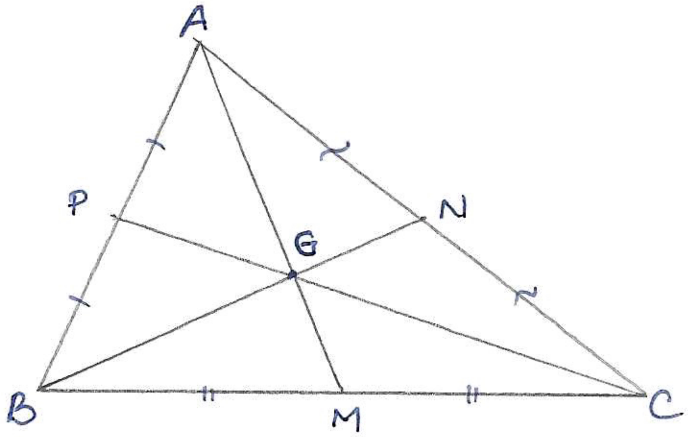
$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC^2}{2}$$

Aria rombului



$$\mathcal{A}_{ABCD} = b \cdot h$$

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

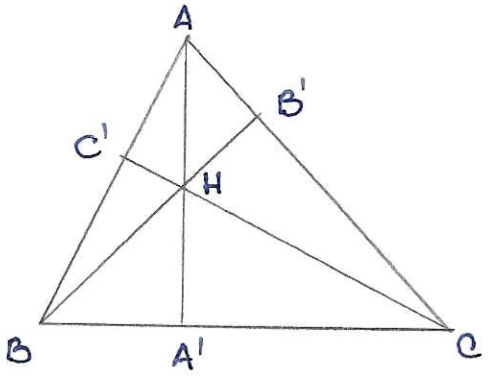


Observație

ΔABC , G - centrul de greutate

$\Rightarrow \mathcal{A}_{AGB} = \mathcal{A}_{AGC} = \mathcal{A}_{BGC} = \dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{3}$

ARIA TRIUNGHIULUI



$AB = c$

$BC = a$

$AC = b$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AA' \cdot BC}{2} = \frac{BB' \cdot AC}{2} = \frac{CC' \cdot AB}{2}$$

$$\sin B = \frac{AA'}{AB} \Rightarrow AA' = AB \cdot \sin B$$

$$\sin C = \frac{BB'}{BC} \Rightarrow BB' = BC \cdot \sin C$$

$$\sin A = \frac{CC'}{AC} \Rightarrow CC' = AC \cdot \sin A$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{BC \cdot AC \cdot \sin C}{2} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin A}{2}$$

- Formula lui Heron

$$p = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{(semiperimetru)}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

- $\triangle ABC$ echilateral

$AB = a$ $\qquad \mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

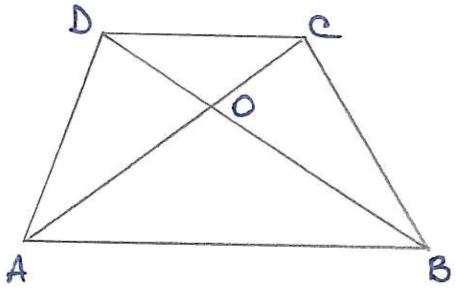
- $\triangle ABC$ dreptunghic : $m(\measuredangle A) = 90°$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$

ARIA PĂTRATULUI

AB = a $\qquad A_{ABCD} = a^2$

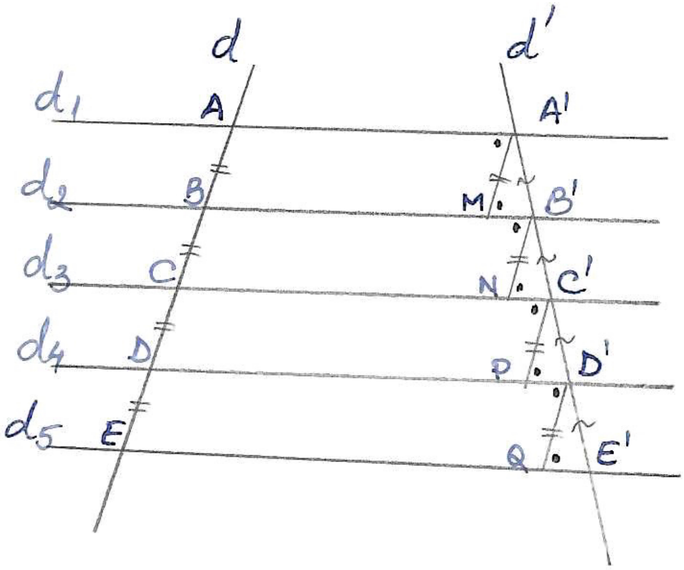
ARIA TRAPEZULUI



$$A_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot h}{2}$$

$$A_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin \sphericalangle AOB}{2}$$

Teorema paralelelor echidistante



$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4 \parallel d_5$

$[AB] \equiv [BC] \equiv [CD] \equiv [DE]$

$\Rightarrow [A'B'] \equiv [B'C'] \equiv [C'D'] \equiv [D'E']$

Dacă mai multe drepte paralele determină pe o secantă care le intersectează segmente congruente, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente congruente.

Segmente proporționale

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;;\quad a, b, c, d \in R^*$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \;;\quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \;;\quad \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \;;\quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \;;$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \;;\quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \;;\quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d} \;;\quad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \;,\; m \neq 0 \;,\; b \neq 0 \;,\; d \neq 0 \;,\; a \neq 0 \;,\; c \neq 0$$

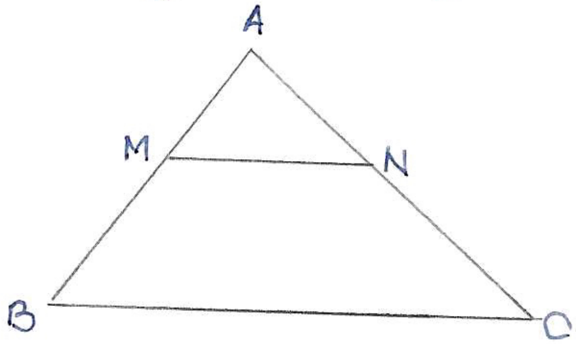
$$\frac{a \cdot m}{b} = \frac{c \cdot m}{d} \;;\quad \frac{a}{b \cdot m} = \frac{c}{d \cdot m} \;;\quad \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{c}{d} \;;\quad \frac{a}{b} = \frac{c \cdot m}{d \cdot m}$$

$$\frac{a : m}{b} = \frac{c : m}{d} \;;\quad \frac{a}{b : m} = \frac{c}{d : m} \;;\quad \frac{a : m}{b : m} = \frac{c}{d} \;;\quad \frac{a}{b} = \frac{c : m}{d : m}$$

Teorema lui Thales

T O paralelă construită la o latură a unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente respectiv proporționale.

I



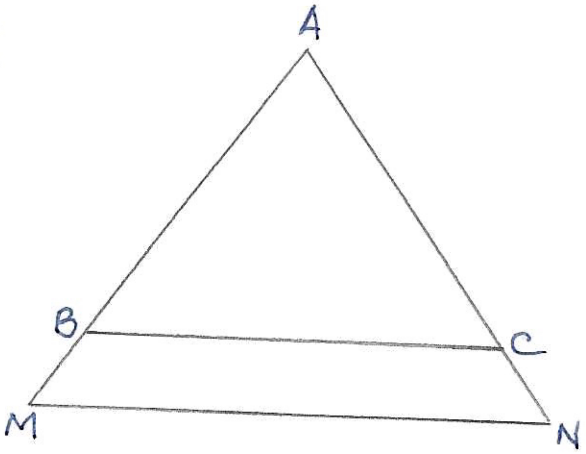
ΔABC
$MN \parallel BC$
$M \in AB$
$N \in AC$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

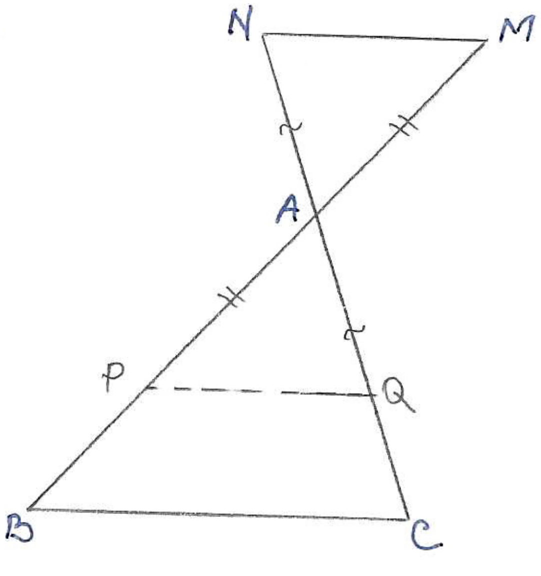
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{BM}{AB} = \frac{CN}{AC}$$

II

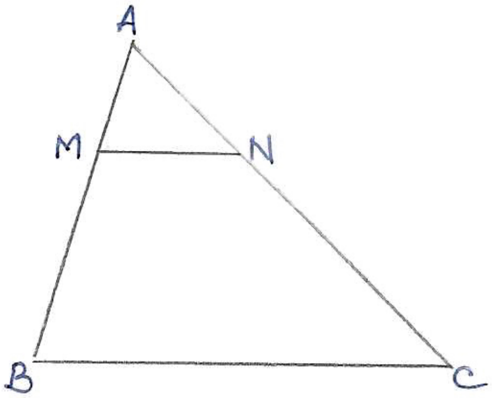


III



Reciproca teoremei lui Thales

R.T Dacă pe două dintre laturile unui triunghi se consideră două puncte care împart laturile în segmente respectiv proporționale, atunci dreapta determinată de cele două puncte este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului.



ΔABC

$M \in (AB)$

$N \in (AC)$

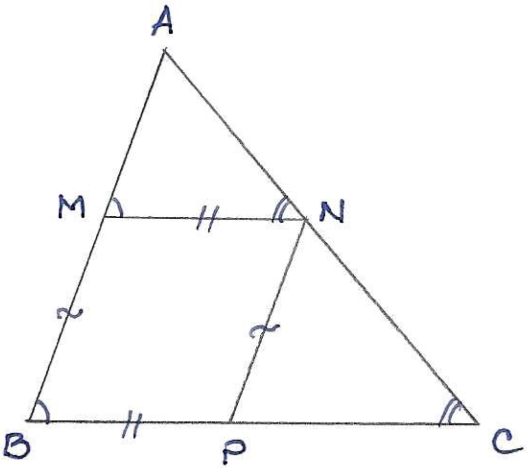
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$\Rightarrow MN \parallel BC$

Teorema fundamentală a asemănării

(T) O paralelă construită la o latură a unui triunghi formează cu celelalte două laturi un triunghi asemenea cu cel dat.

I



$\triangle ABC$

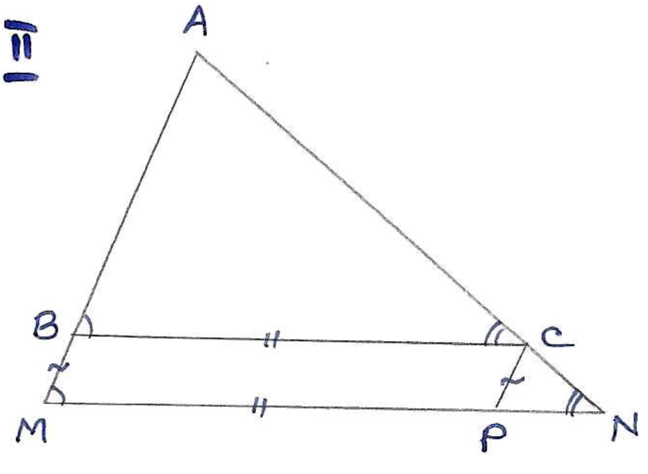
$MN \parallel BC$

$M \in AB$

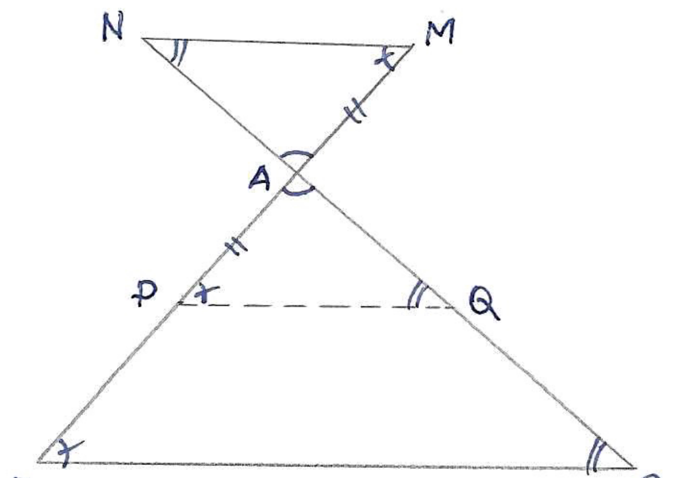
$N \in AC$

$\Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$

II

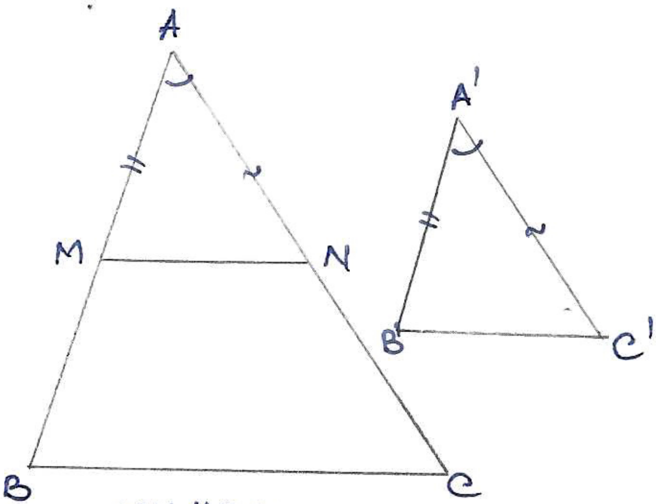


III



Criterii de asemănare a triunghiurilor

1. Cazul (L.U.L.)



MN // BC

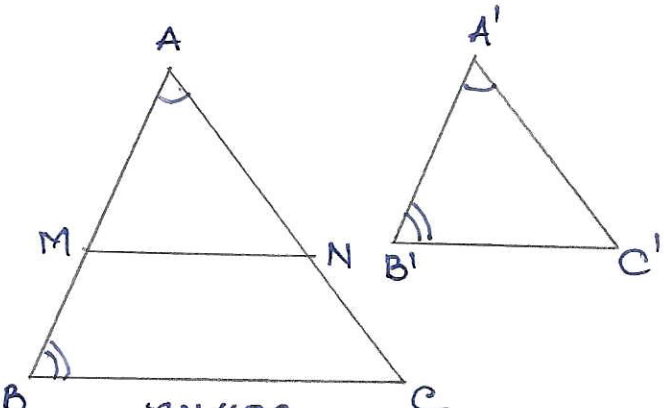
Două triunghiuri sunt asemenea dacă au două laturi respectiv proporționale și unghiul format de ele congruent.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle A')$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

2. Cazul (U.U.)



MN // BC

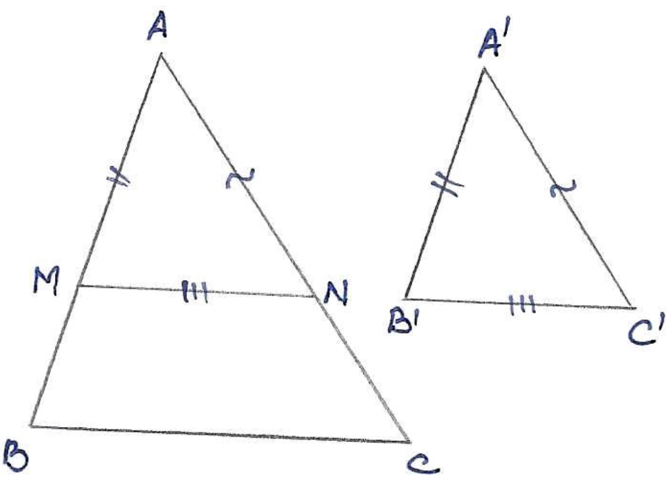
Două triunghiuri care au două perechi de unghiuri respectiv congruente sunt asemenea.

$$m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle A')$$

$$m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle B')$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

3. Cazul (L.L.L.)



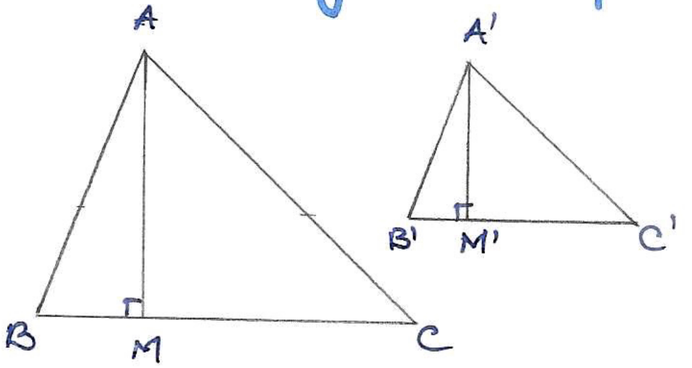
Două triunghiuri care au laturile respectiv proporționale sunt asemenea.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Proprietățile triunghiurilor asemenea

P1 În două triunghiuri asemenea, raportul înălțimilor construite pe laturi omoloage este egal cu raportul de asemănare.



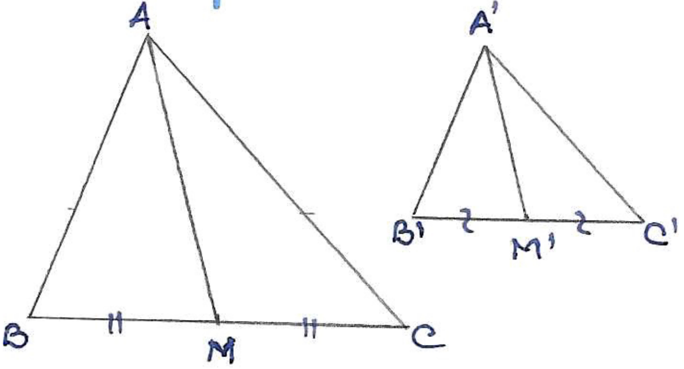
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$AM \perp BC$, $M \in (BC)$

$A'M' \perp B'C'$, $M' \in (B'C')$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{A'M'} = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

P2 În două triunghiuri asemenea, raportul medianelor construite pe laturi omoloage este egal cu raportul de asemănare.



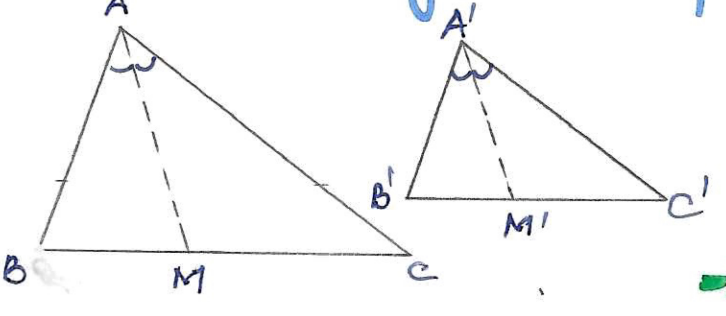
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

(AM) - mediană în ΔABC

$(A'M')$ - mediană în $\Delta A'B'C'$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{A'M'} = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

P3 Dacă două triunghiuri sunt asemenea, raportul bisectoarelor unghiurilor congruente este egal cu raportul de asemănare



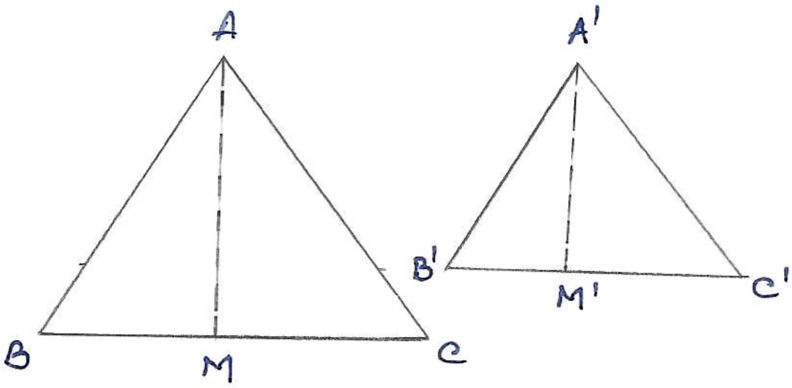
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$

(AM) - bisectoarea $\measuredangle BAC$

$(A'M')$ - bisectoarea $\measuredangle B'A'C'$

$\Rightarrow \dfrac{AM}{A'M'} = \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'}$

P4 Raportul ariilor triunghiurilor asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare



$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

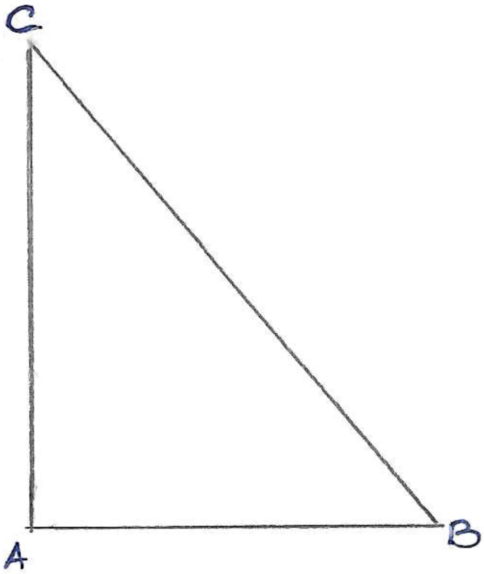
$AM \perp BC$

$A'M' \perp B'C'$

$$\Rightarrow \frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}} = \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2$$

$$\frac{A_{ABC}}{A_{A'B'C'}} = \frac{\frac{BC \cdot AM}{2}}{\frac{B'C' \cdot A'M'}{2}} = \frac{BC \cdot AM}{B'C' \cdot A'M'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AM}{A'M'} \overset{P_1}{=} \left(\frac{BC}{B'C'}\right)^2$$

ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE



$\sin\alpha = \dfrac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}$

Obs: $0° < \alpha < 90° \Rightarrow \sin\alpha < 1$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}$

Obs: $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$

$\cos\alpha = \sin\beta$

$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha),\ 0° < \alpha < 90°$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}}$

$\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$

$0° < \alpha < 90° \rightarrow$ Obs: $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{ctg}\,\alpha}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

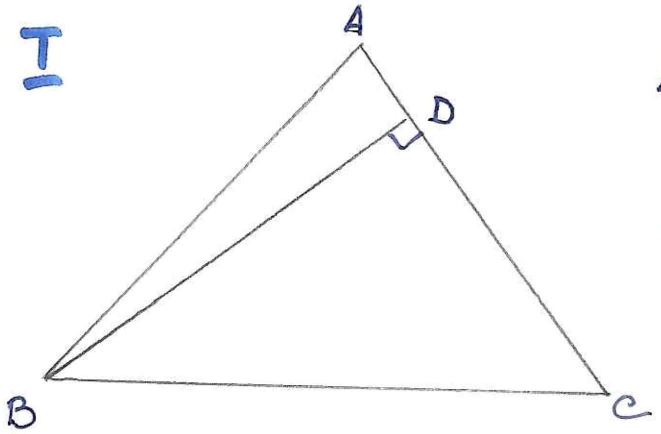
$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Rapoarte trigonometrice

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nu există	0	
ctg	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nu există	

Teorema cosinusului

I



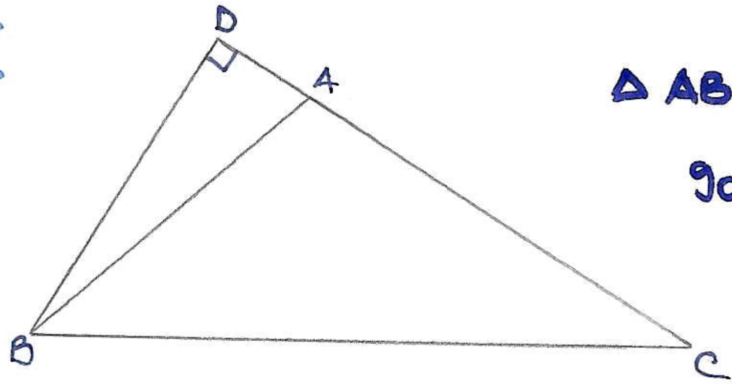
ΔABC - triunghi ascuțit unghic

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \sphericalangle A$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \sphericalangle C$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \sphericalangle B$$

II



ΔABC - triunghi obtuzunghic

$90^\circ < m(\sphericalangle A) < 180^\circ$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \underline{+} 2AB \cdot AC \cdot \cos(180^\circ - \sphericalangle BAC)$$

Obs: Dacă aplicăm T. cosinusului într-un triunghi obtuzunghic pentru latura opusă $\sphericalangle$ obtuz, atunci ultimul termen din formulă are semnul „+".

Obs: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

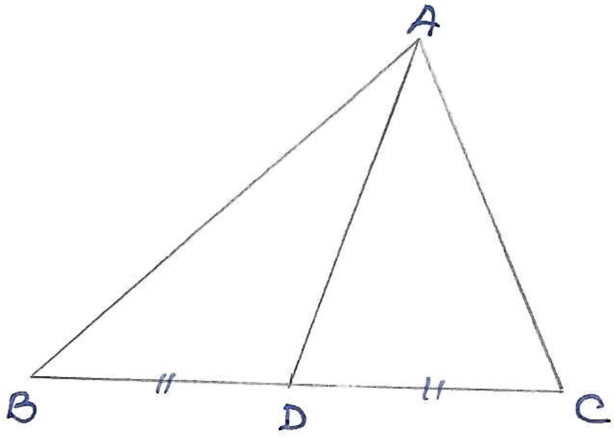
$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ $\qquad$ $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$

$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Teorema medianei



$$AD^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$$