POZIȚIILE RELATIVE A DOUĂ DREPTE ÎN SPAȚIU

d_1 , d_2

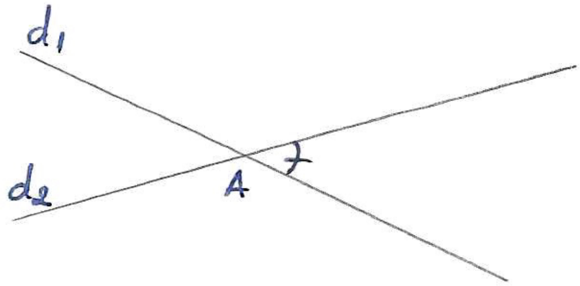
1. $d_1 \neq d_2$ — paralele: $d_1 \parallel d_2$; concurente: $d_1 \cap d_2 = \{A\}$ $\Rightarrow$ d_1, d_2 - coplanare

2. $d_1 = d_2$

Def.: Două drepte se numesc necoplanare dacă intersecția lor este vidă și $d_1 \nparallel d_2$, $d_1 \neq d_2$

$d_1 \cap d_2 = \phi$

MĂSURA UNGHIULUI DINTRE DOUĂ DREPTE ÎN SPAȚIU



$d_1 \neq d_2$

$d_1, d_2 \subset \alpha$

Dacă $d_1 \cap d_2 = \{A\}$

$\Rightarrow m(\widehat{d_1, d_2}) = m(\hat{A})$, $0 < m(\hat{A}) < 90^\circ$

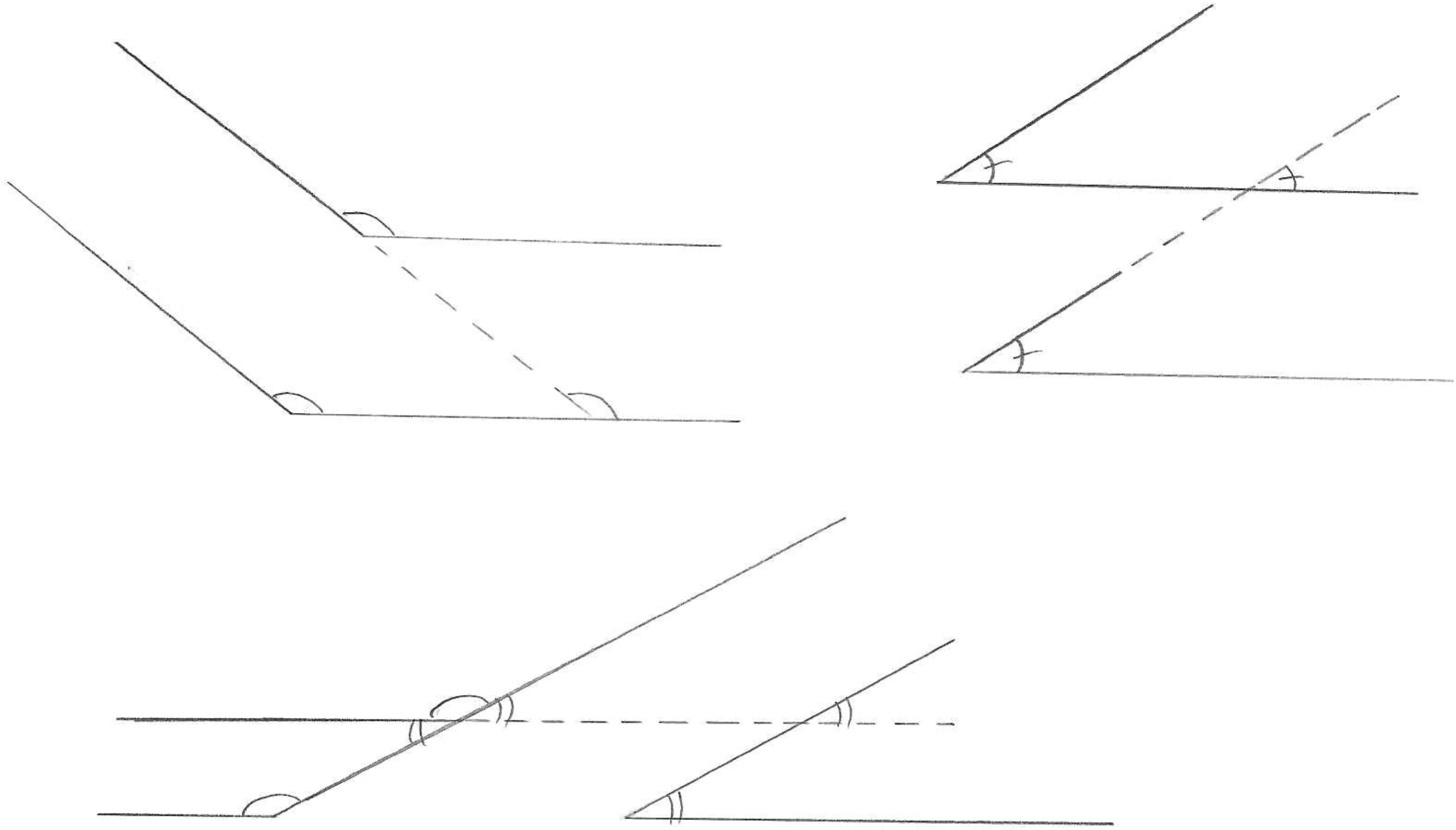
Dacă $d_1 \perp d_2$

$\Rightarrow m(\widehat{d_1, d_2}) = 90^\circ$

Dacă $d_1 \parallel d_2$

$\Rightarrow m(\widehat{d_1, d_2}) = 0^\circ$

TEOREMA UNGHIURILOR CU LATURILE PARALELE



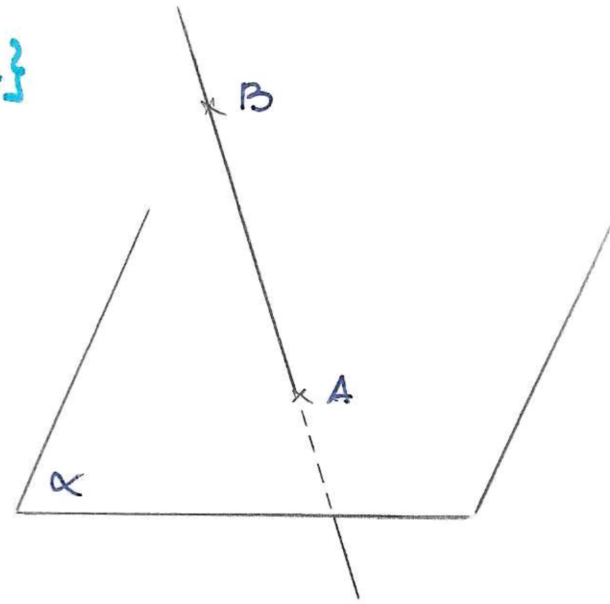
Dacă două unghiuri au laturile respectiv paralele, atunci ele sunt congruente dacă sunt amândouă ascuțite sau obtuze și sunt suplementare, dacă unul e ascuțit și altul obtuz.

POZIȚIILE RELATIVE ALE UNEI DREPTE FAȚĂ DE UN PLAN

1. Dacă $A \neq B$ și $A, B \in \alpha \overset{P_4}{\Rightarrow} AB \subset \alpha$

2. Dacă $\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \notin \alpha \end{array}\right| \Rightarrow AB \cap \alpha = \{A\}$

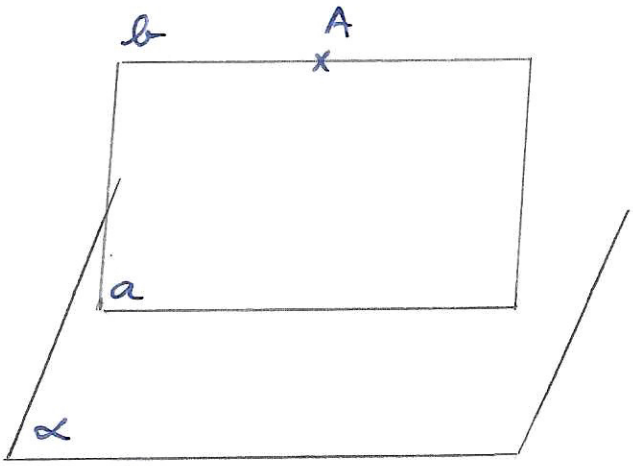
AB „înțeapă" planul



3. $d \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow d \parallel \alpha$

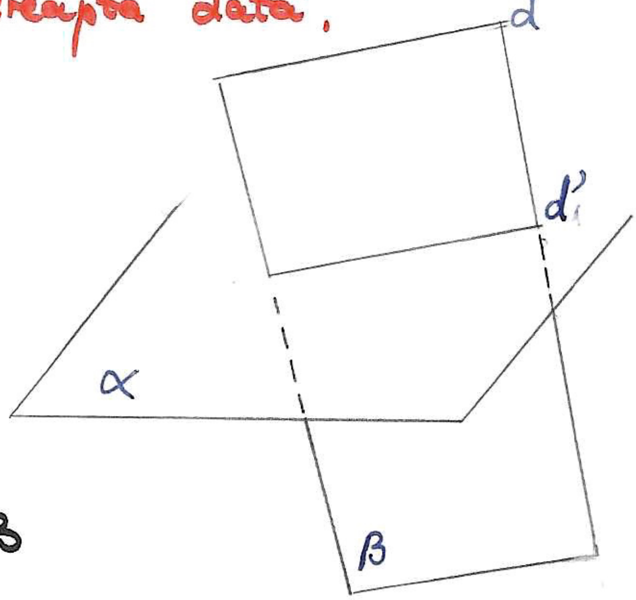
Ⓣ (de paralelism a unei drepte cu un plan)

O dreaptă exterioară planului e paralelă cu acesta dacă e paralelă cu o dreaptă inclusă în plan.



TEOREME DE PARALELISM

T1 Dacă o dreaptă e paralelă cu un plan și inclusă în alt plan care îl intersectează pe primul după o dreaptă, atunci dreapta de intersecție a planelor este paralelă cu dreapta dată.



i: $d \parallel \alpha$

$d \subset \beta$

$\beta \cap \alpha = d'$

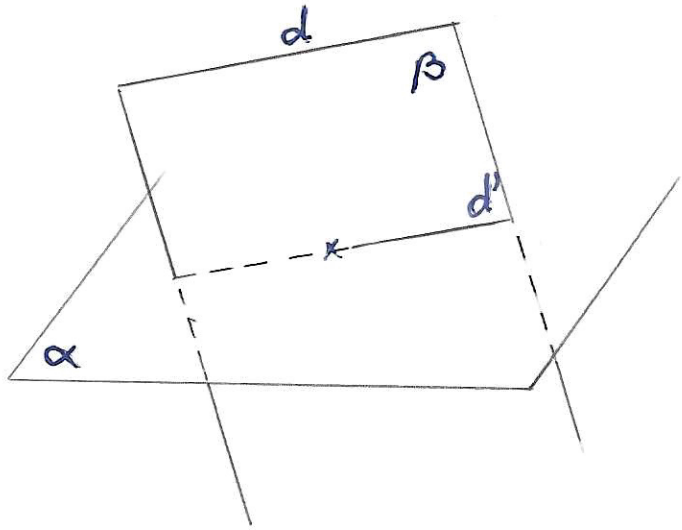
---

c: $d \parallel d'$

$d \subset \beta$

$\beta \cap \alpha = d' \Rightarrow d' \subset \beta$

T2 Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan și printr-un punct al planului se construiește o paralelă la dreapta dată, atunci aceasta este inclusă în plan



i: $d \parallel \alpha$

$A \in \alpha$

$d' \parallel d$, $A \in d'$

---

c: $d' \subset \alpha$

T3 În spațiu, două drepte paralele cu a treia sunt paralele între ele.

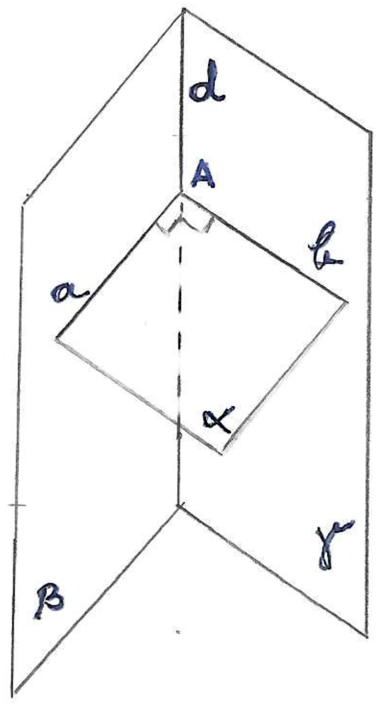
DREAPTĂ PERPENDICULARĂ PE PLAN

Def. O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe toate dreptele din plan.

T Dacă o dreaptă este perpendiculară pe două drepte concurente din acel plan, atunci ea este perpendiculară pe tot planul.

I: $d \perp a$
$d \perp b$
$a, b \subset \alpha$
$a \cap b = \{A\}$

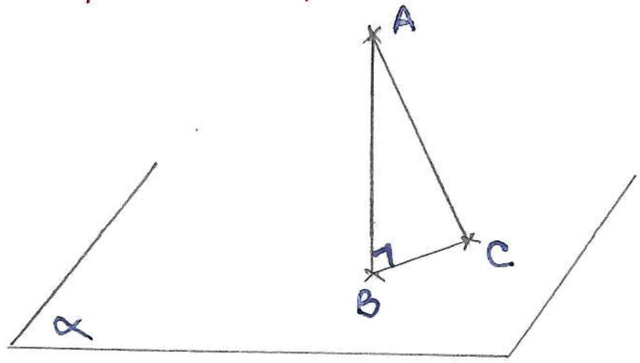
C: $d \perp \alpha$



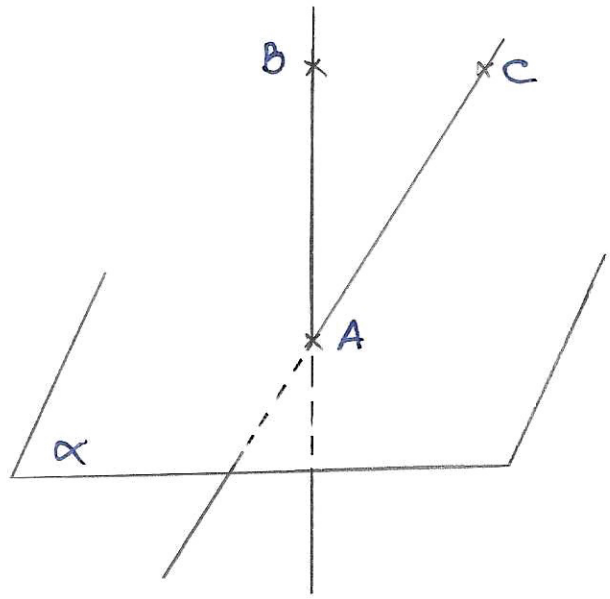
T₁ Dintr-un punct exterior unui plan se poate construi o singură perpendiculară pe acel plan.

I: $A \notin \alpha$

C: $\exists !\ AB \perp \alpha,\ B \in \alpha$



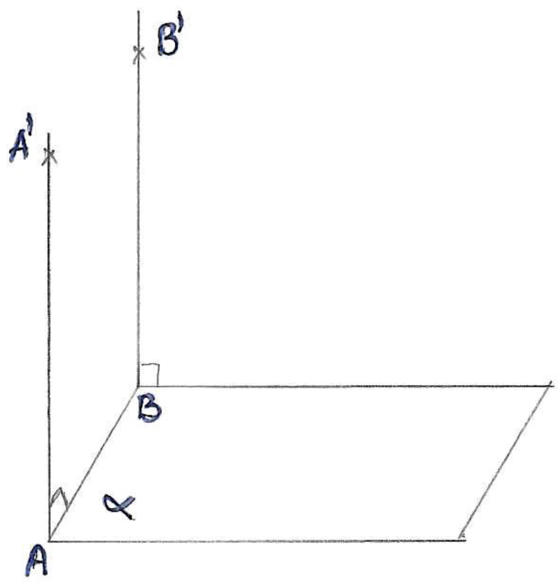
T2 Într-un punct al unui plan se poate construi o unică perpendiculară pe acel plan.



i: $A \in \alpha$

c: $\exists!\ AB \perp \alpha$

T3 Două drepte perpendiculare pe același plan sunt paralele între ele.



Dacă $AA' \perp \alpha$

$BB' \perp \alpha$

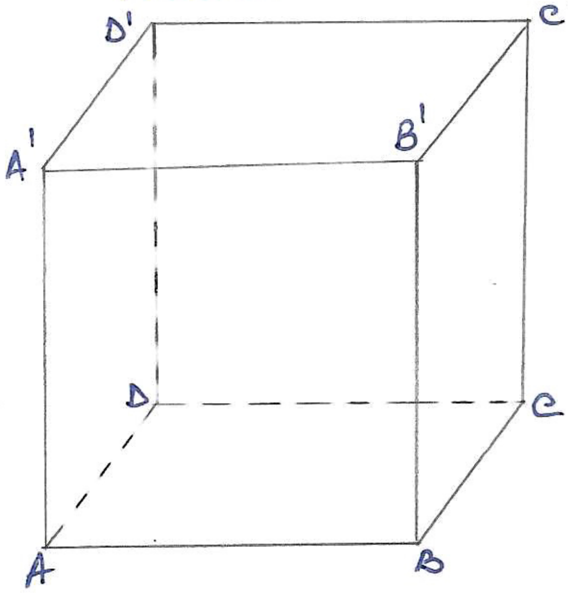
$\Rightarrow AA' \parallel BB'$

Def.: O prismă se numește dreaptă dacă muchia laterală este perpendiculară pe planul bazei.

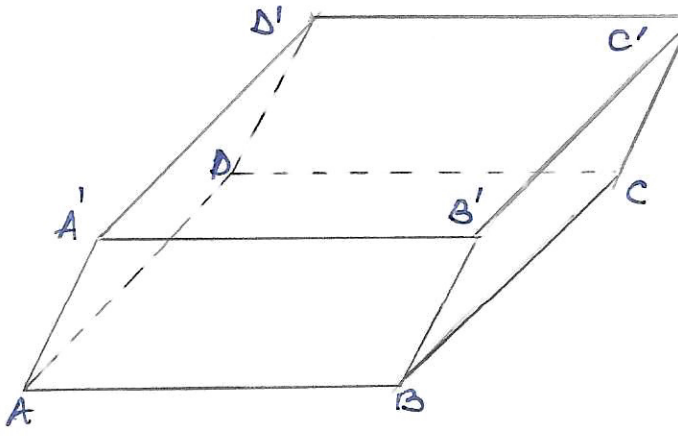
Toate prismele regulate sunt prisme drepte.

Prisma oblică este prisma în care muchia laterală e oblică față de planul bazei (fețele laterale sunt paralelograme; în particular, pot fi romburi).

PRISMA DREAPTĂ

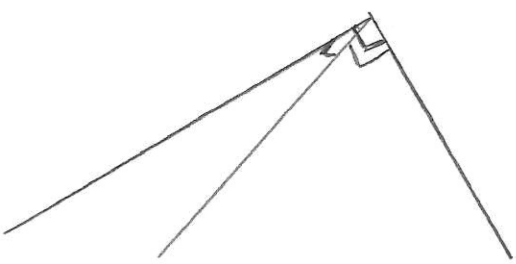


PRISMA OBLICĂ



TRIEDRU TRIDREPTUNGHIC

(COLȚUL CAMEREI)

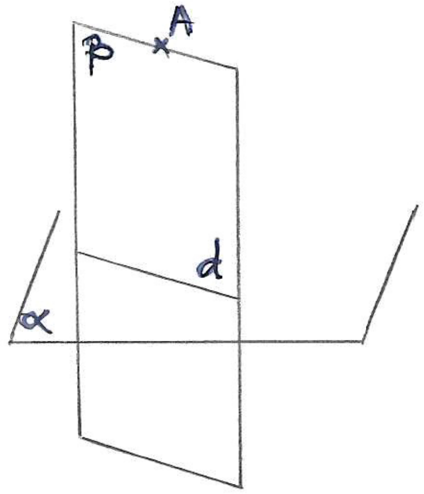


POZIȚIILE RELATIVE ALE PLANELOR ÎN SPAȚIU

Lemă Dacă două drepte sunt incluse în două plane distincte care au comună o dreaptă, atunci dreapta de intersecție a planelor este paralelă cu dreptele date.

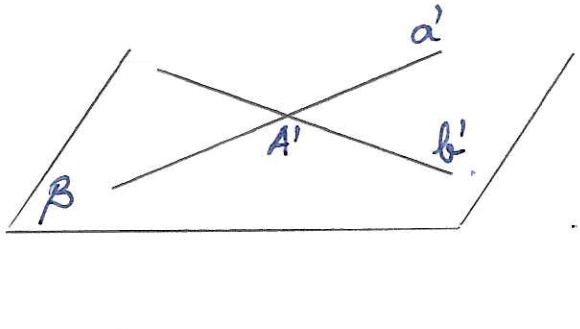
$\alpha \neq \beta$

$\alpha \cap \beta = d$



Teorema de paralelism a planelor

Dacă două plane distincte conțin două perechi de drepte concurente, respectiv paralele, atunci planele sunt paralele.



Fie α, $a, b \subset \alpha$

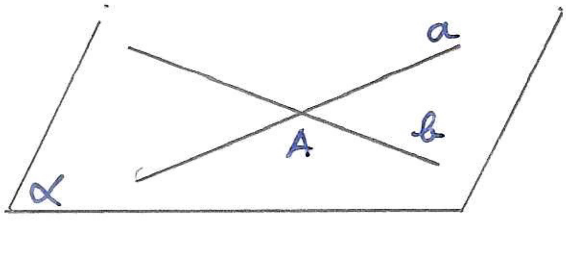
$a \cap b = \{A\}$

$A \in \alpha$

$a' \cap b' = \{A'\}$ a.î.

$a \parallel a'$, $b \parallel b'$

$\Rightarrow (a', b') = \beta$



Teorema fierăstrăului

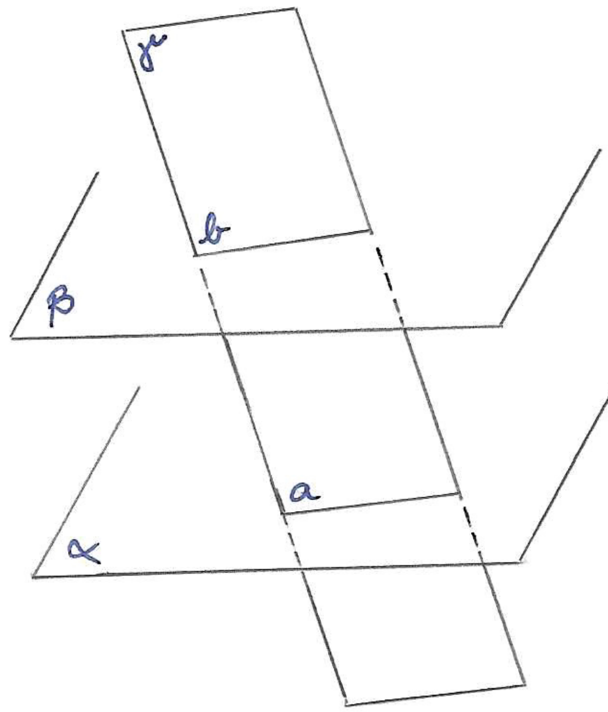
Dacă două plane paralele sunt intersectate de al treilea, atunci dreptele de intersecție sunt paralele între ele.

i: $\alpha \parallel \beta$

$\gamma \cap \alpha = a$

$\gamma \cap \beta = b$

c: $a \parallel b$



(T) Două plane paralele determină pe două drepte paralele pe care le intersectează segmente congruente.

i: $\alpha \parallel \beta$

$a \parallel b$

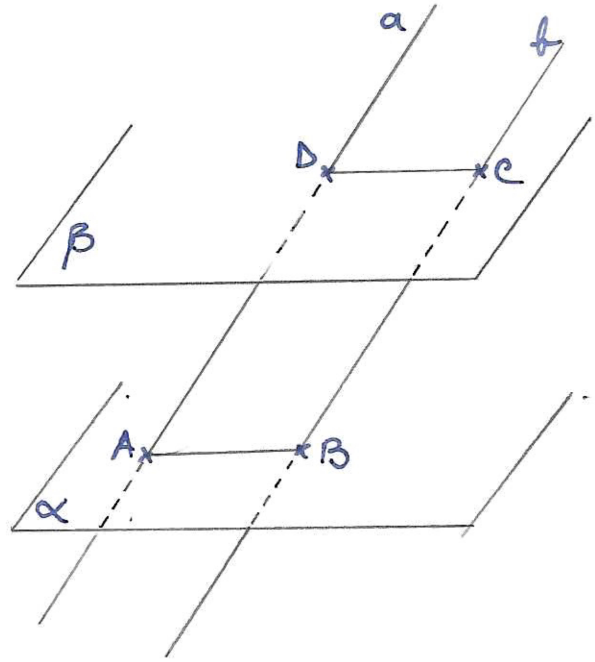
$a \cap \alpha = \{A\}$

$a \cap \beta = \{D\}$

$b \cap \alpha = \{B\}$

$b \cap \beta = \{C\}$

c: $(AD) \equiv (BC)$



Teorema acoperișului

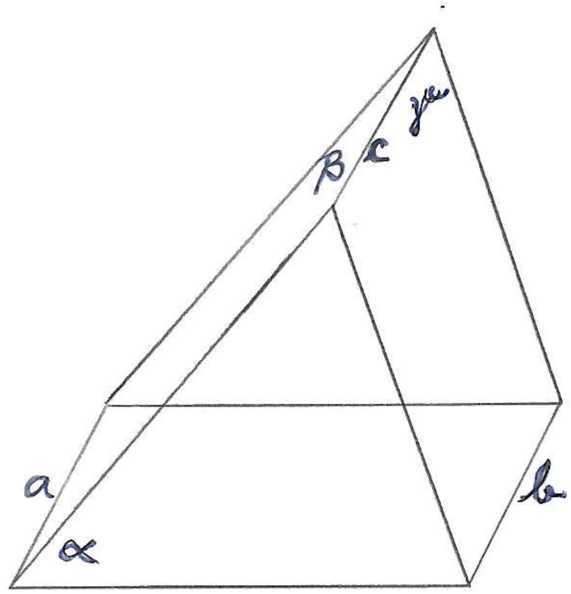
Dacă trei plane diferite se intersectează două câte două după o dreaptă, atunci cele trei drepte de intersecție sunt paralele între ele.

I: $\alpha \cap \beta = a$

$\alpha \cap \gamma = b$

$\beta \cap \gamma = c$

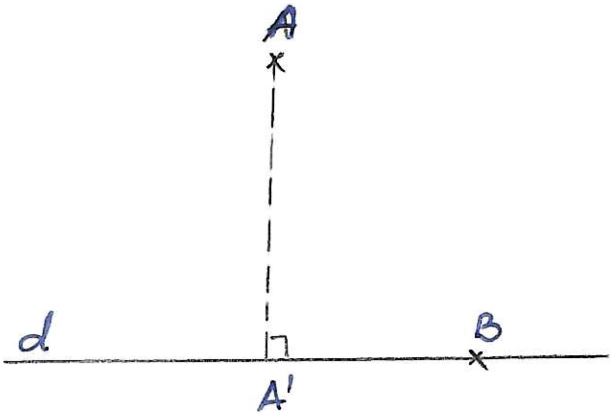
C: $a \parallel b \parallel c$



Teorema lui Thales în spațiu

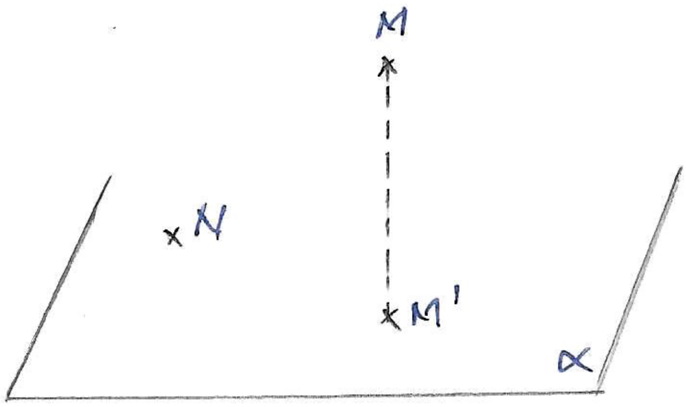
Dacă mai multe plane paralele sunt tăiate de două drepte oarecare, atunci planele determină pe cele două drepte segmente respectiv proporționale

PROIECȚII ORTOGONALE PE PLAN



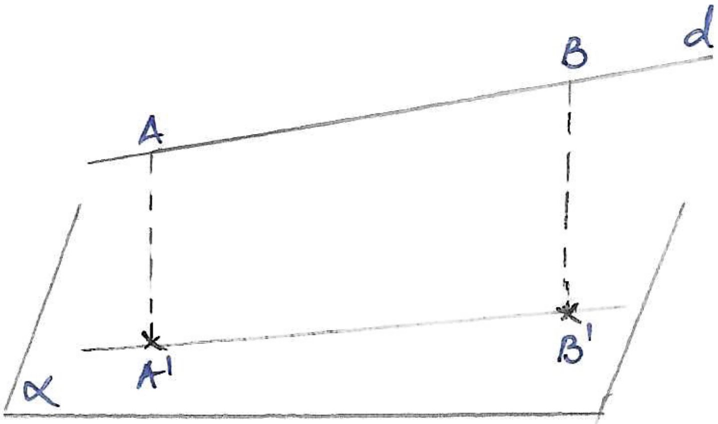
$$\left.\begin{array}{r} A \notin d,\ AA' \perp d \\ A' \in d \end{array}\right| \Rightarrow pr_d\, A = A'$$

$$B \in d \Rightarrow B = pr_d\, B$$



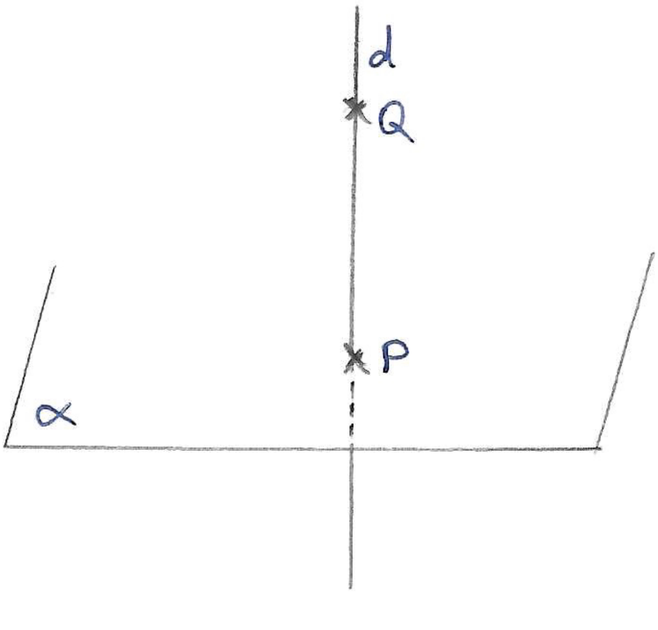
$$\left.\begin{array}{r} M \notin \alpha,\ MM' \perp \alpha \\ M' \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow pr_\alpha\, M = M'$$

$$N \in \alpha \Rightarrow pr_\alpha\, N = N$$



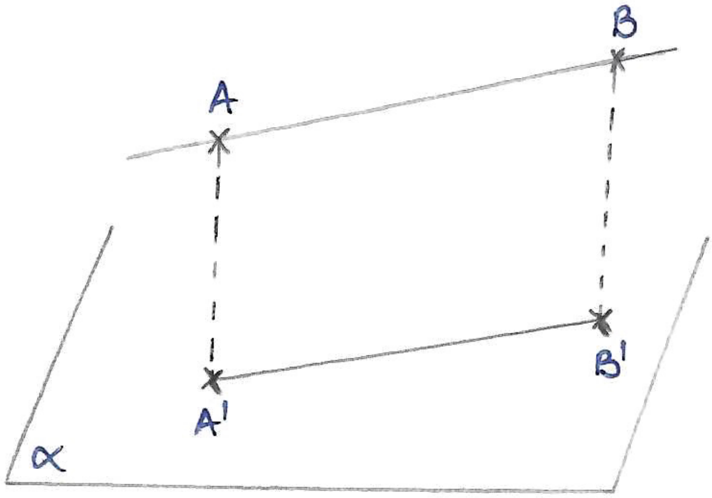
$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } d \not\subset \alpha,\ d \not\perp \alpha \\ A; B \in d,\ A \neq B \\ pr_\alpha\, A = A' \\ pr_\alpha\, B = B' \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pr_\alpha\, d = A'B'$$



$$\left.\begin{array}{r} \text{Dacă } d \perp \alpha \\ d \cap \alpha = \{P\} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pr_\alpha\, d = P$$



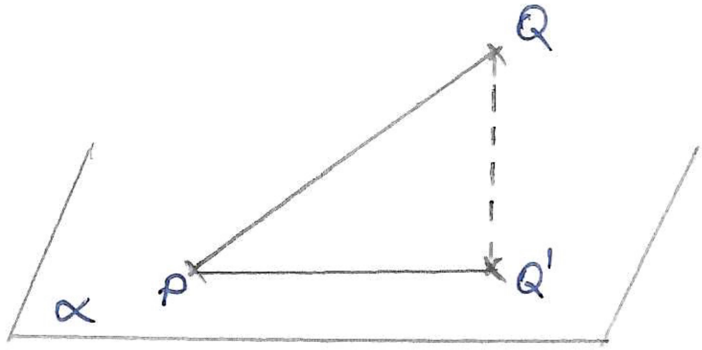
$[AB]$, $AB \not\parallel \alpha$

$A, B \notin \alpha$

$pr_\alpha A = A'$

$pr_\alpha B = B'$

$\Rightarrow pr_\alpha [AB] = [A'B']$



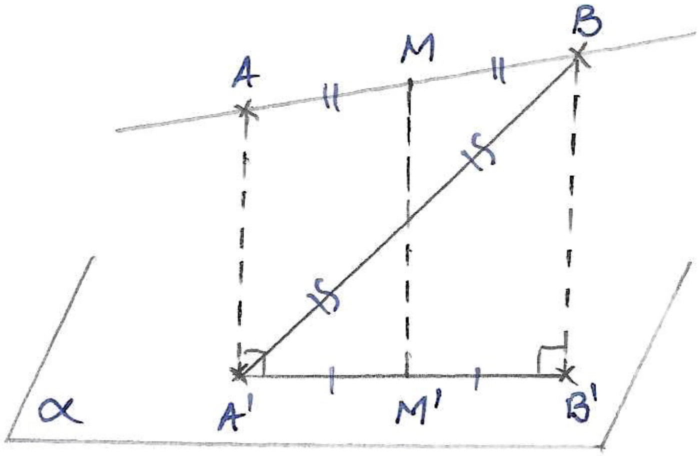
$[PQ]$, $P \in \alpha$

$Q \notin \alpha$

$PQ \not\perp \alpha$

$pr_\alpha Q = Q'$

$\Rightarrow pr_\alpha [PQ] = [PQ']$



$[AB]$, $AB \not\parallel \alpha$

$A, B \notin \alpha$

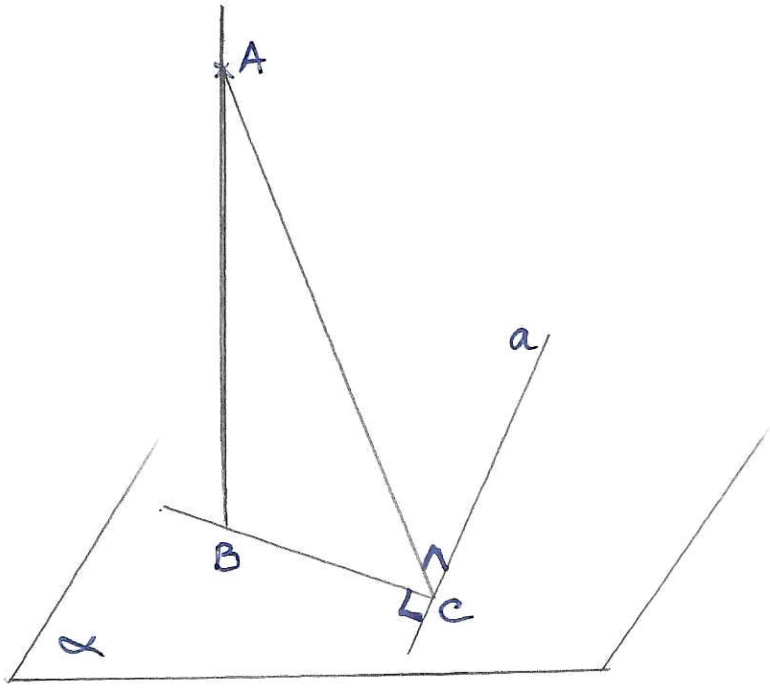
M - mijl. $[AB]$

$pr_\alpha [AB] = [A'B']$

$pr_\alpha M = M'$

$\Rightarrow M'$ - mijl. $[A'B']$

TEOREMA CELOR TREI PERPENDICULARE



i: $A \notin \alpha$

$AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$

$a \in \alpha$, $B \notin a$

$BC \perp a$, $C \in a$

---

c: $AC \perp a$

$d(A, a) = AC$

Dem.

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp \alpha \\ BC \subset \alpha \\ a \in \alpha \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} AB \perp BC \\ AB \perp a \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \perp AB \\ a \perp BC \\ AB, BC \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a \perp (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{array} \Rightarrow a \perp AC$$

$$\Downarrow$$

$$AC \perp a$$

RECIPROCELE
TEOREMEI CELOR TREI PERPENDICULARE

$\boxed{R_1}$ $T_{3\perp}$

i: $M \notin \alpha$

$MA \perp AB$

$AB \subset \alpha$

$AB \perp a$

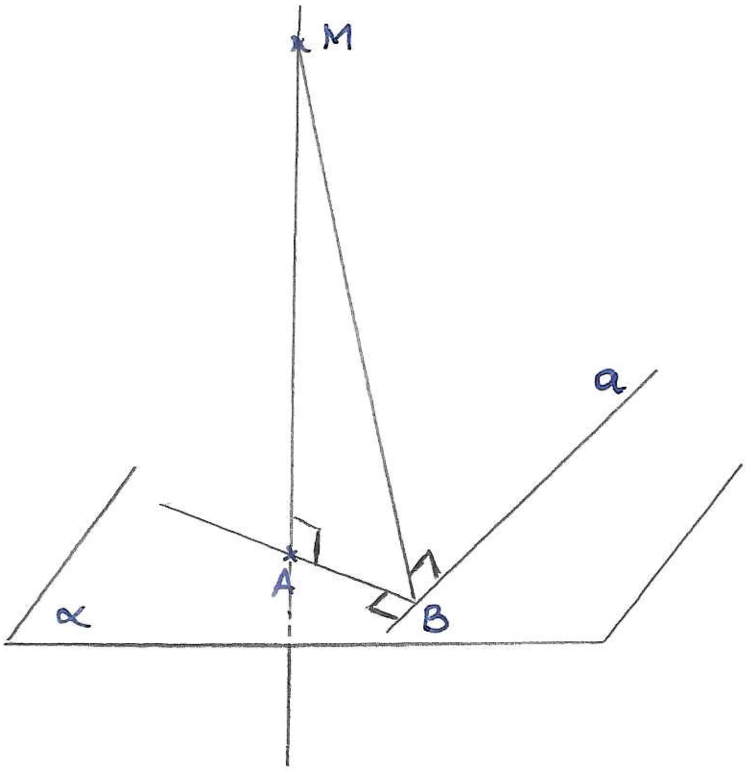
$AB \cap a = \{B\}$

$a \subset \alpha$

$MB \perp a$

---

c: $MA \perp \alpha$



$\boxed{R_2}$ $T_{3\perp}$

i: $M \notin \alpha$

$MA \perp \alpha$, $A \in \alpha$

$b, a \subset \alpha$

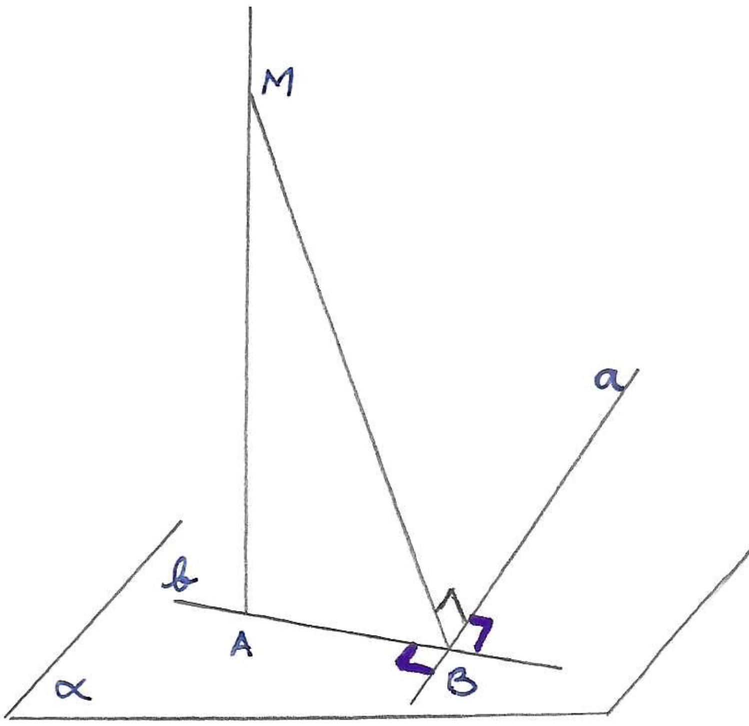
$b \cap a = \{B\}$

$A \in b$

$MB \perp a$

---

c: $a \perp b$



UNGHIUL DINTRE O DREAPTĂ ȘI UN PLAN

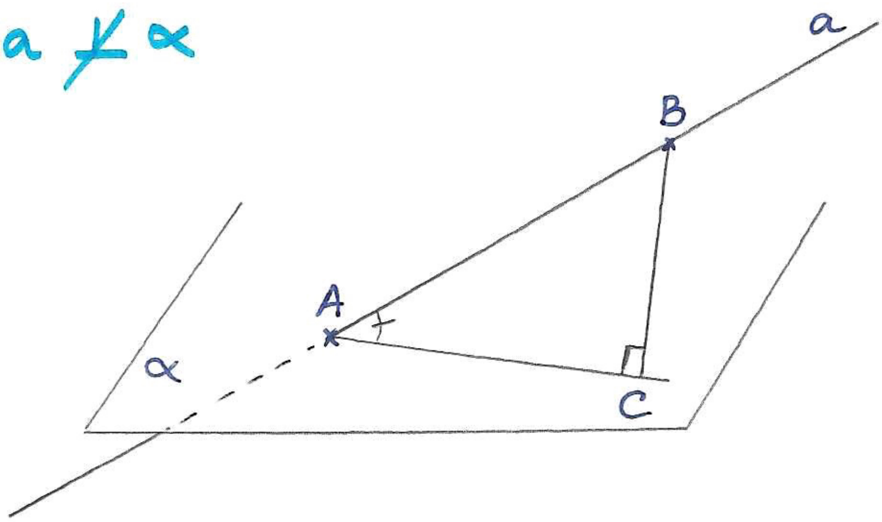
1. $a \subset \alpha \Rightarrow m(\widehat{a, \alpha}) = 0^\circ$

2. $a \parallel \alpha \Rightarrow m(\widehat{a, \alpha}) = 0^\circ$

3. $a \cap \alpha = \{A\}$

   i) $a \perp \alpha \Rightarrow m(\widehat{a, \alpha}) = 90^\circ$

   ii) $a \not\perp \alpha$

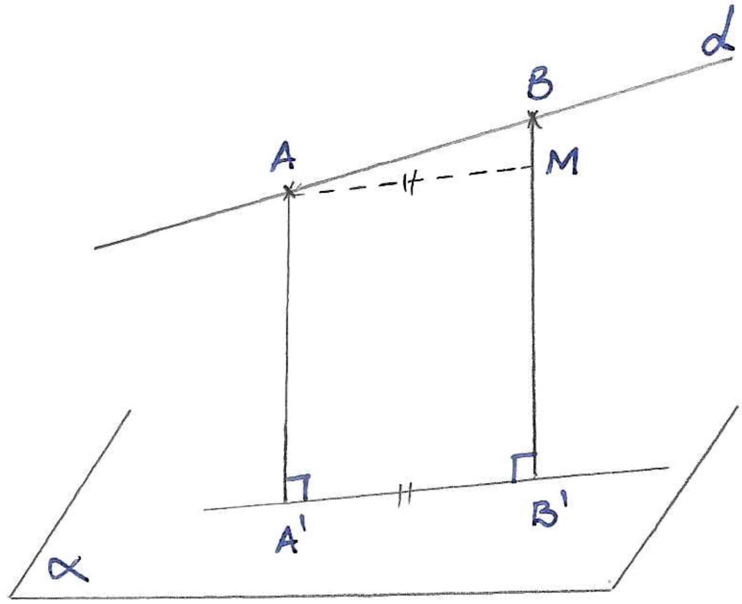


$$\left.\begin{array}{l} A \subset \alpha \Rightarrow pr_\alpha A = A \\ BC \perp \alpha,\ C \in \alpha \Rightarrow pr_\alpha B = C \end{array}\right| \Rightarrow pr_\alpha AB = AC$$

$$m(\widehat{AB, \alpha}) = m(\widehat{AB, AC}) = m(\sphericalangle BAC)$$

Măsura unghiului dintre o dreaptă și un plan este egală cu măsura unghiului dintre dreaptă și proiecția ei pe plan.

(T) Dacă un segment neinclus într-un plan se proiectează pe acesta, atunci lungimea proiecției este egală cu produsul dintre lungimea segmentului proiectat și cosinusul unghiului pe care îl formează dreapta suport a segmentului cu planul.



i: $AB \not\subset \alpha$

$AB \nparallel \alpha$

$AB \not\perp \alpha$

$\left.\begin{array}{l} pr_\alpha A = A' \\ pr_\alpha B = B' \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow pr_\alpha AB = A'B' \Rightarrow m(\widehat{AB, \alpha}) = m(\widehat{AB, A'B'})$

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AA' \perp \alpha \\ BB' \perp \alpha \end{array}\right| \Rightarrow AA' \parallel BB' \\ \left.\begin{array}{l} A'B' \subset \alpha \\ AA' \perp \alpha \end{array}\right| \Rightarrow AA' \perp A'B' \\ \text{Fie } AM \parallel A'B',\ M \in BB' \end{array}\right| \Rightarrow AMB'A' - \text{dreptunghi} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (AM) \equiv (A'B') \\ AM \parallel A'B' \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{AB, A'B'}) = m(\widehat{AB, AM}) = m(\widehat{BAM})$

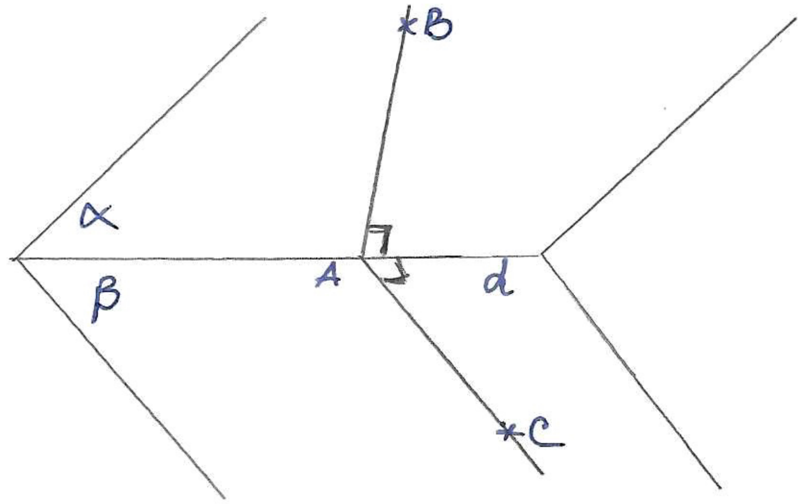
$\triangle AMB: m(\sphericalangle M) = 90^\circ \Rightarrow \cos(\widehat{BAM}) = \frac{AM}{AB} \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = AB \cdot \cos \widehat{BAM}$

$A'B' = AB \cdot \cos(\widehat{AB, \alpha})$

$\cos(\widehat{AB, \alpha}) = \frac{A'B'}{AB}$

DIEDRUL



d - muchia diedrului (frontiera)

$\alpha \cap \beta = d$

Def.: Diedrul reprezintă reuniunea a două semiplane mărginite de o dreaptă comună numită muchia diedrului.

$$\left.\begin{array}{l} A \in d \\ AB \perp d, \quad AB \subset \alpha \\ AC \perp d, \quad AC \subset \beta \end{array}\right| \Rightarrow \sphericalangle BAC \text{ - unghi plan al diedrului}$$

Def.: Dacă două plane sunt secante (neperpendiculare), măsura unghiului dintre cele două plane = măsura celui mai mic diedru format de cele două plane.

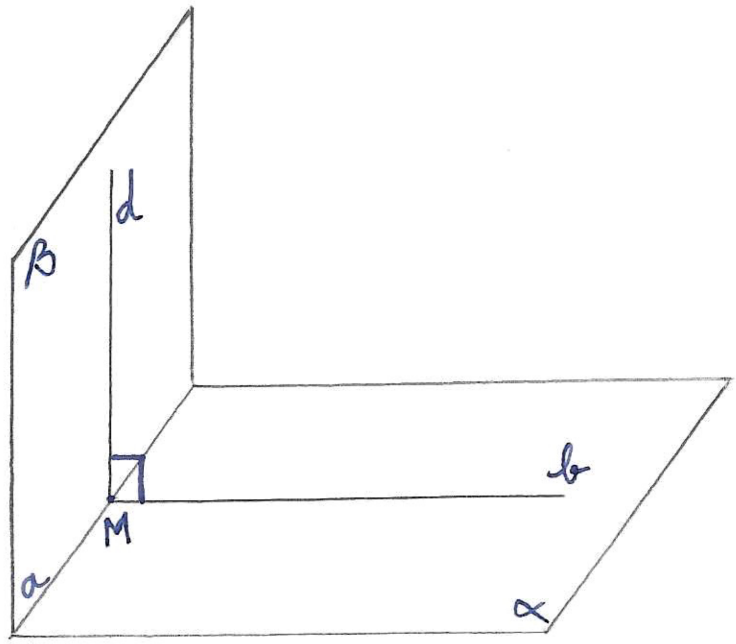
$\alpha \cap \beta = d$

$m(\widehat{\alpha, \beta}) < 90^\circ$

Dacă $m(\widehat{\alpha, \beta}) = 90 \Rightarrow \alpha \perp \beta$

Dacă $\alpha \parallel \beta \Rightarrow m(\widehat{\alpha, \beta}) = 0^\circ$

PLANE PERPENDICULARE



$\alpha \perp \beta$

<u>Obs.</u> $\alpha \perp \beta \Rightarrow \beta \perp \alpha$

<u>Def.</u> Două plane sunt perpendiculare dacă măsura unghiului plan al diedrului este de $90°$.

T_1 Două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe cel de-al doilea plan.

<u>Dem.</u>

$$\left.\begin{array}{l} d \subset \beta,\ d \perp \alpha \\ a \subset \alpha \end{array}\right| \Rightarrow d \perp a$$

$$d, a \subset \beta,\ d \perp a \Rightarrow d \cap a = \{M\}$$

Fie $b \perp a$, $b \cap a = \{M\}$, $b \subset \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} d \perp \alpha \\ b \subset \alpha \end{array}\right| \Rightarrow d \perp b$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = a \\ d \perp a,\ d \subset \beta \\ b \perp a,\ b \subset \alpha \\ d \cap a \cap b = \{M\} \\ d \perp b \end{array}\right| \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

T2 Dacă două plane sunt perpendiculare și dintr-un punct al unui plan se construiește perpendiculara pe dreapta comună, aceasta este perpendiculară pe cel de-al doilea plan.

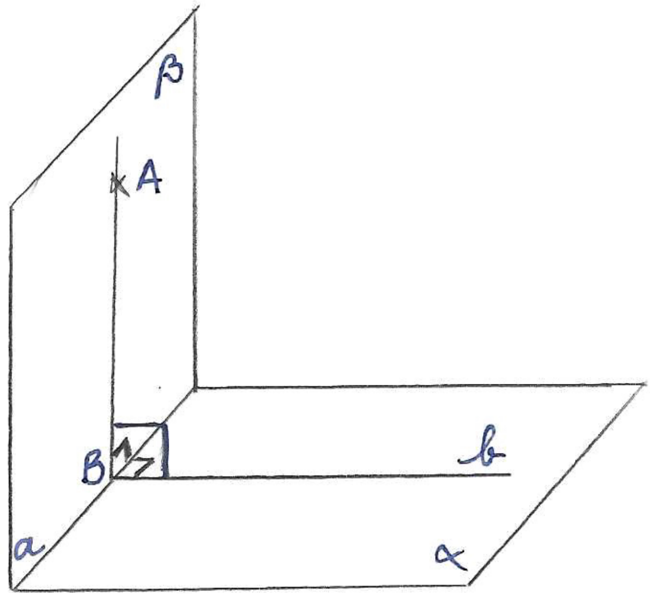
I: $\alpha \perp \beta$

$a = \alpha \cap \beta$

$A \in \beta$

$AB \perp a$, $B \in a$

C: $AB \perp \alpha$



Dem. Fie $b \perp a$, $b \subset \alpha$

$b \cap a = \{B\}$

$AB \perp a$, $AB \subset \beta$

$\alpha \perp \beta$

$\Rightarrow m(\widehat{AB, b}) = 90^\circ$

$AB \perp b$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $AB \perp a$

$AB \perp b$

$a, b \subset \alpha$

$a \cap b = \{B\}$

$\Rightarrow AB \perp \alpha$

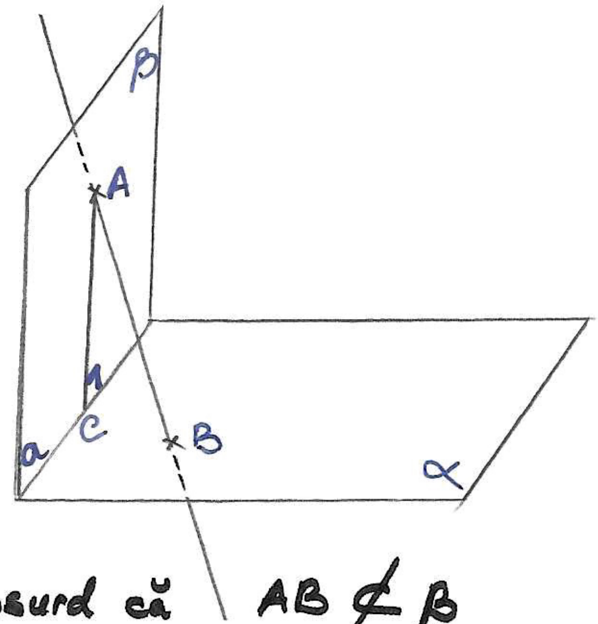
T3 Dacă două plane sunt perpendiculare și dintr-un punct al unui plan construim o perpendiculară pe cel de-al doilea, atunci dreapta este inclusă în primul plan.

I: $\alpha \perp \beta$

$A \in \beta$

$AB \perp \alpha$, $B \in \alpha$

C: $AB \subset \beta$



Dem. Pp. prin reducere la absurd că $AB \not\subset \beta$

Fie $AC \perp a$, $C \in a$

$A, C \in \beta \Rightarrow AC \subset \beta$

$\alpha \perp \beta$

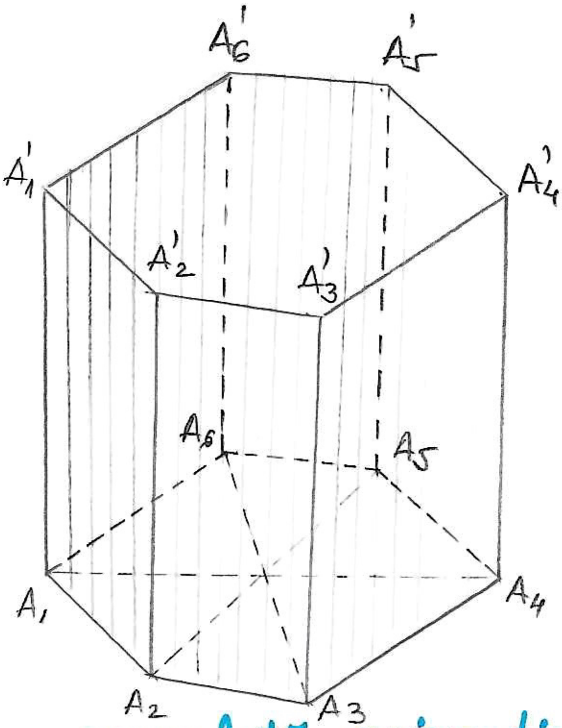
$\xRightarrow{T_2} AC \perp \alpha$

$AB \perp \alpha$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = AB \Rightarrow AB \subset \beta$

PRISMA REGULATĂ DREAPTĂ



suprafață prismatică

$A_1 A_2 \dots A_n$ – poligon regulat

$d \perp (A_1 A_2 \dots A_n)$

$d \cap (A_1 A_2 \dots A_n) = \{A_1\}$

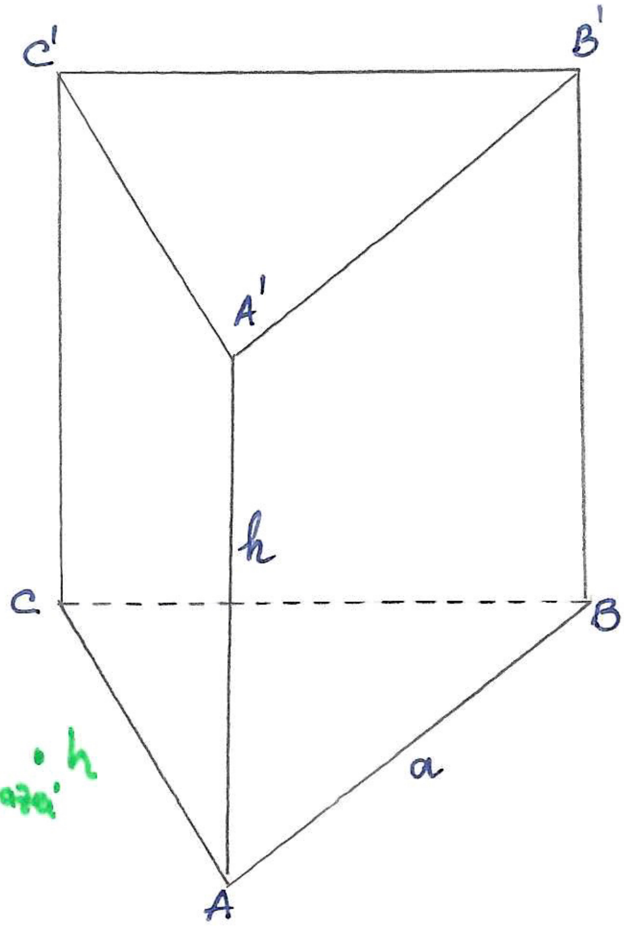
$(A_1' A_2' \dots A_n') \parallel (A_1 A_2 \dots A_n)$

$A_1' A_2' \dots A_n'$ – poligon regulat

$A_1 A_2 \dots A_n \equiv A_1' A_2' \dots A_n'$

$A_1 A_2 \dots A_n'$ – prismă regulată dreaptă

PROPRIETĂȚILE PRISMEI REGULATE DREPTE



$(ABC) \parallel (A'B'C')$

$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (echilaterale)

$(AA') \overset{\parallel}{\equiv} (BB') \overset{\parallel}{\equiv} (CC')$

$AA' \perp (ABC)$

$\Rightarrow ABB'A' \equiv BCC'B' \equiv ACC'A'$ (dreptunghiuri)

$A_l = 3 \cdot A_{ABB'A'} = \underbrace{3 \cdot AB} _{P_b} \cdot BB' = P_{bază} \cdot h$

$A_t = A_l + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

PRISMA PATRULATERĂ REGULATĂ

[AC]; [BD]; [A'C']; [B'D'] -

- diagonalele bazelor

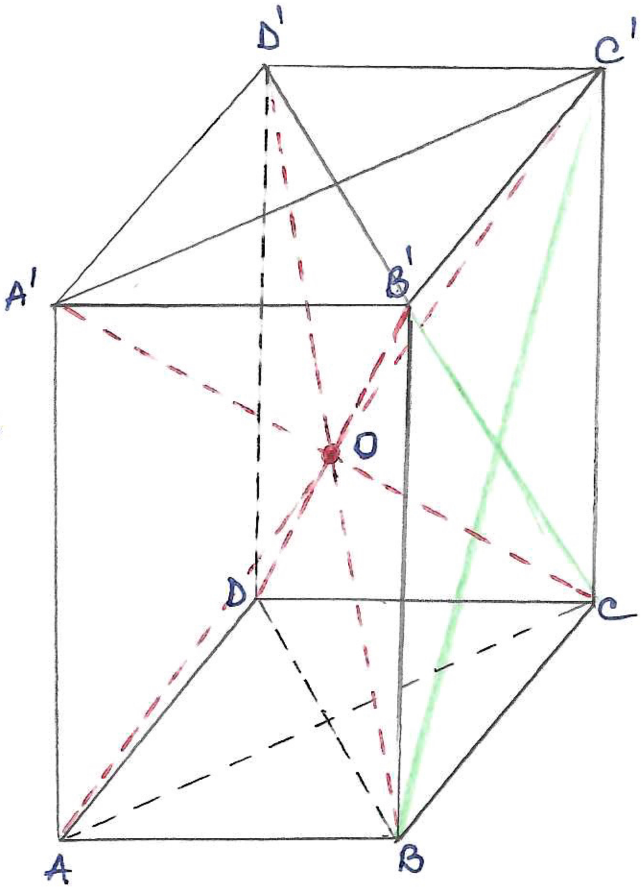
[BC']; [B'C] -

- diagonalele fețelor laterale

[AC']; [B'D]; [BD']; [A'C] -

- diagonalele prismei

ABCD ≡ A'B'C'D' (pătrate)



Def.: Diagonala prismei este segmentul determinat de două vârfuri opuse, aflate în fețe diferite

$A_l = 4 \cdot A_{ABB'A'}$

$A_l = P_b \cdot h$

$A_t = A_l + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

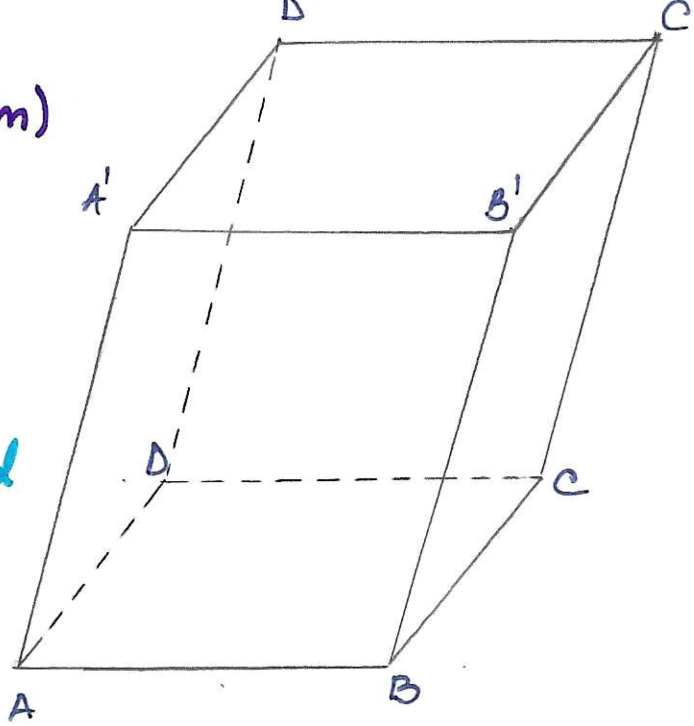
PARALELIPIPEDUL DREPTUNGHIC

$ABCD \equiv A'B'C'D'$ (paralelogram)

$(ABC) \parallel (A'B'C')$

$(AA') \overset{\parallel}{\equiv} (BB') \overset{\parallel}{\equiv} (CC') \overset{\parallel}{\equiv} (DD')$

$\Rightarrow$ $ABCDA'B'C'D'$ - paralelipiped (PRISMĂ OBLICĂ)



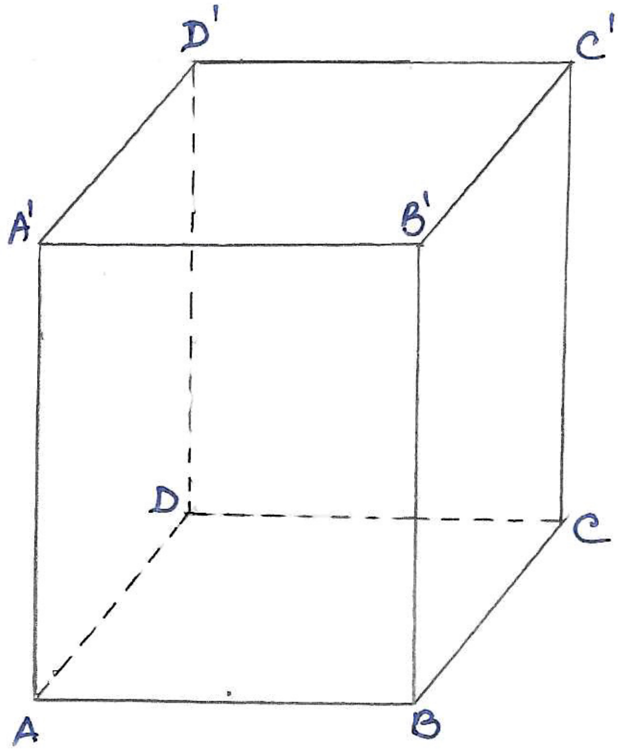
$ABCD \equiv A'B'C'D'$ (paralelogram)

$(ABC) \parallel (A'B'C')$

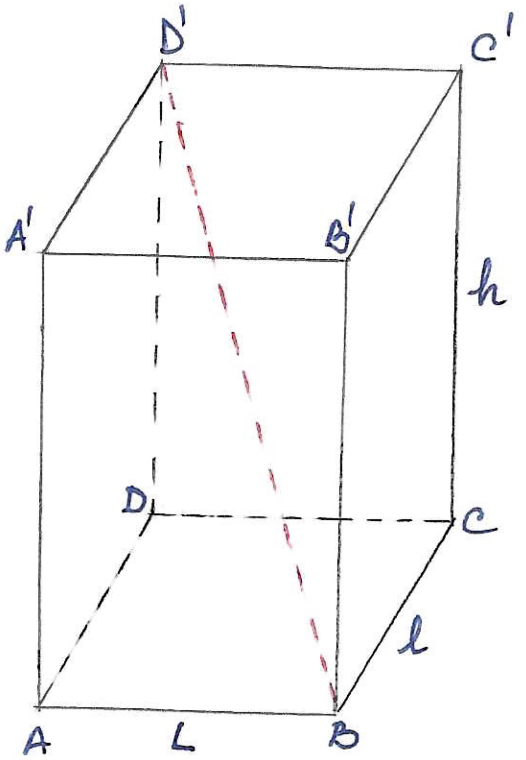
$(AA') \overset{\parallel}{\equiv} (BB') \overset{\parallel}{\equiv} (CC') \overset{\parallel}{\equiv} (DD')$

$AA' \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ $ABCDA'B'C'D'$ - paralelipiped dreptunghic



ABCDA'B'C'D' - paralelipiped dreptunghic
(PRISMĂ DREAPTĂ)



$ABCD \equiv A'B'C'D'$ (dreptunghi)

$(ABC) \parallel (A'B'C')$

$(AA') \overset{\parallel}{\equiv} (BB') \overset{\parallel}{\equiv} (CC') \overset{\parallel}{\equiv} (DD')$

$AA' \perp (ABC)$

$\Rightarrow ABB'A' \equiv DCC'D'$ (dreptunghi)

$BCC'B' \equiv ADD'A'$ (dreptunghi)

$AB = CD = A'B' = C'D' = L$

$BC = AD = B'C' = A'D' = l$

$AA' = BB' = CC' = DD' = h$

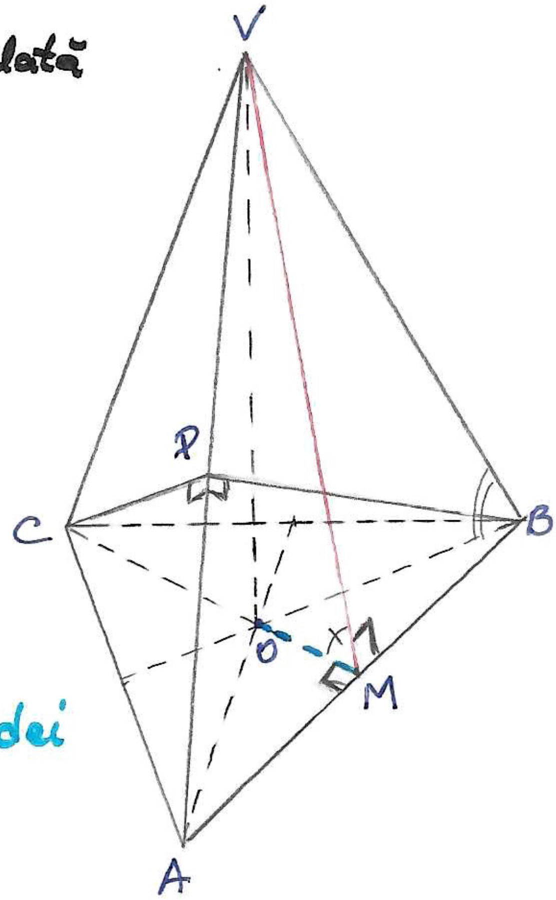
$$A_l = 2\,(L \cdot h + l \cdot h)$$

$$A_t = 2 \cdot (L \cdot h + l \cdot h + L \cdot l)$$

$$V = L \cdot l \cdot h$$

$$BD'^2 = l^2 + L^2 + h^2$$

PIRAMIDA TRIUNGHIULARĂ REGULATĂ



VABC – piramidă triunghiulară regulată

$\triangle ABC$ – echilateral

$VO \perp (ABC)$, O – centrul $\triangle ABC$

$VA = VB = VC$

$\triangle VAB \equiv \triangle VBC \equiv \triangle VAC$

$\triangle VAB$: $\left.\begin{array}{l} VA = VB \\ M\text{- mijl. } (AB) \end{array}\right| \Rightarrow VM \perp AB$

VM – apotema piramidei (a_p)

$\triangle OAB$: $\left.\begin{array}{l} OA = OB = R \\ M\text{- mijl. } (AB) \end{array}\right| \Rightarrow OM \perp AB$

OM – apotema bazei (a_b)

$$A_l = 3 \cdot A_{VAB} = 3 \cdot \frac{AB \cdot VM}{2} \Rightarrow \boxed{A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}}$$

$$A_t = A_l + A_b$$

$$A_b = 3 \cdot A_{AOB} = 3 \cdot \frac{AB \cdot OM}{2} = \boxed{\frac{P_b \cdot a_b}{2}}$$

$$A_t = \frac{P_b \cdot a_p}{2} + \frac{P_b \cdot a_b}{2}$$

$$\boxed{A_t = \frac{P_b\,(a_p + a_b)}{2}} \qquad \boxed{V = \frac{A_b \cdot h}{3}}$$

Obs.

1. $$\left.\begin{array}{l} VO \perp (ABC) \Rightarrow pr_{(ABC)} V = O \\ B \in (ABC) \Rightarrow pr_{(ABC)} B = B \end{array}\right| \Rightarrow pr_{(ABC)} VB = OB$$

$$m(\widehat{VB, (ABC)}) = m(\widehat{VB, OB}) = m(\sphericalangle VBO)$$

2. $$m(\widehat{(VBC), (ABC)}) = m(\sphericalangle VMO)$$

3. $CP \perp VA$, $P \in VA$

$$\begin{array}{l} \Delta APC \\ \Delta APB \end{array} \left\{ \begin{array}{l} AP - \text{lat. comună} \\ (AB) \equiv (AC) \\ \sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PAB \end{array} \right. \overset{L.U.L.}{\Longrightarrow} \Delta APC \equiv \Delta APB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sphericalangle CPA \equiv \sphericalangle BPA \Rightarrow BP \perp VA$$

$$(CP) = (BP)$$

$$m((VAC), (VAB)) = m(\widehat{CPB})$$

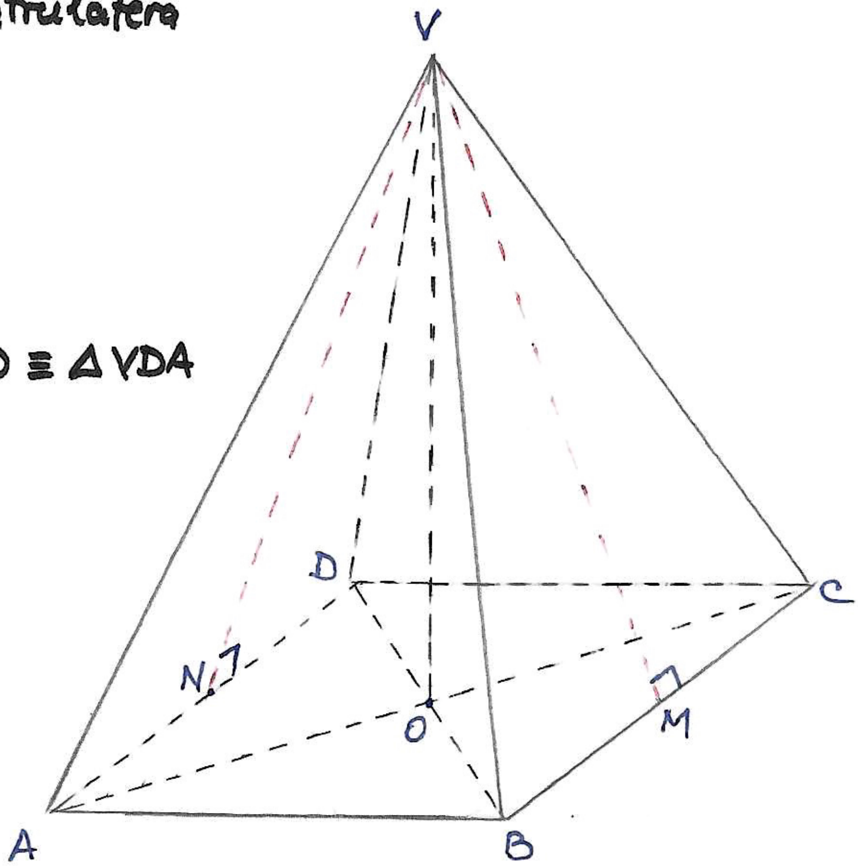
PIRAMIDA PATRULATERĂ REGULATĂ

VABCD - piramidă patrulateră regulată

ABCD - pătrat

$VA \equiv VB \equiv VC \equiv VD$

$\Delta VAB \equiv \Delta VBC \equiv \Delta VCD \equiv \Delta VDA$
(isoscele)



ΔVAC : $\left.\begin{array}{l} VA = VC \\ AO = OC \end{array}\right| \Rightarrow VO \perp AC$

ΔVBD : $\left.\begin{array}{l} VB = VD \\ BO = OD \end{array}\right| \Rightarrow VO \perp BD$

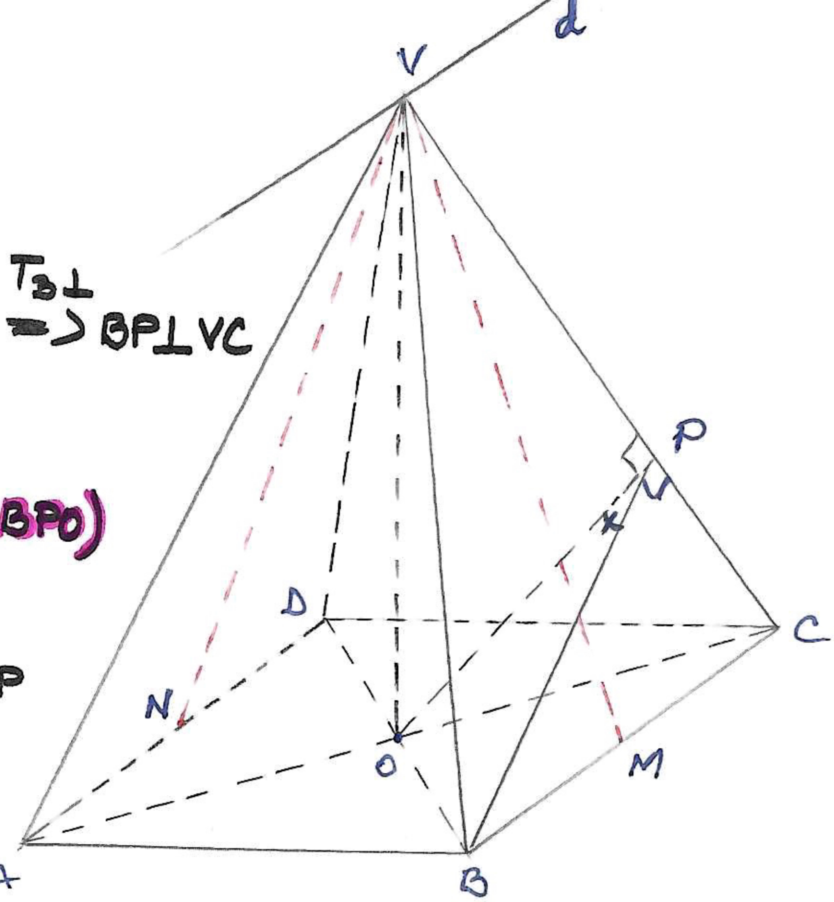
$\Delta VAC \equiv \Delta VBD$ (SECȚIUNI DIAGONALE)

$\left.\begin{array}{l} VO \perp (ABC) \\ VO \subset (VAC) \\ VO \subset (VBD) \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} (VAC) \perp (ABC) \\ (VBD) \perp (ABC) \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} (VAC) \perp (ABC) \\ (VAC) \cap (ABC) = AC \\ BO \perp AC,\ BO \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow BO \perp (VAC)$

① $m(\widehat{(VBC);(VAC)})$

$$\left.\begin{array}{l} BO \perp (VAC) \\ \text{Fie } OP \perp VC,\ P \in VC \\ VC, OP \subset (VAC) \end{array}\right| \xRightarrow{T3\perp} BP \perp VC$$



$m(\widehat{(VBC);(VAC)}) = m(\sphericalangle BPO)$

$$\left.\begin{array}{l} OB \perp (VAC) \\ OP \subset (VAC) \end{array}\right| \Rightarrow OB \perp OP$$

$\Rightarrow \triangle BOP$ dreptunghic

② $m((VBC);(VAD))$

$ABCD$ - pătrat $\Rightarrow AD \parallel BC$

$$\left.\begin{array}{l} AD \subset (VAD) \\ BC \subset (VBC) \end{array}\right| \Rightarrow \underset{(1)}{(VAD) \cap (VBC) = d}, \ d \parallel AD \parallel BC$$

$V \in d$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } VM \perp BC,\ M \in BC \\ BC \parallel d \end{array}\right| \Rightarrow VM \perp d \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fie } VN \perp AD,\ N \in AD \\ AD \parallel d \end{array}\right| \Rightarrow VN \perp d \quad (3)$$

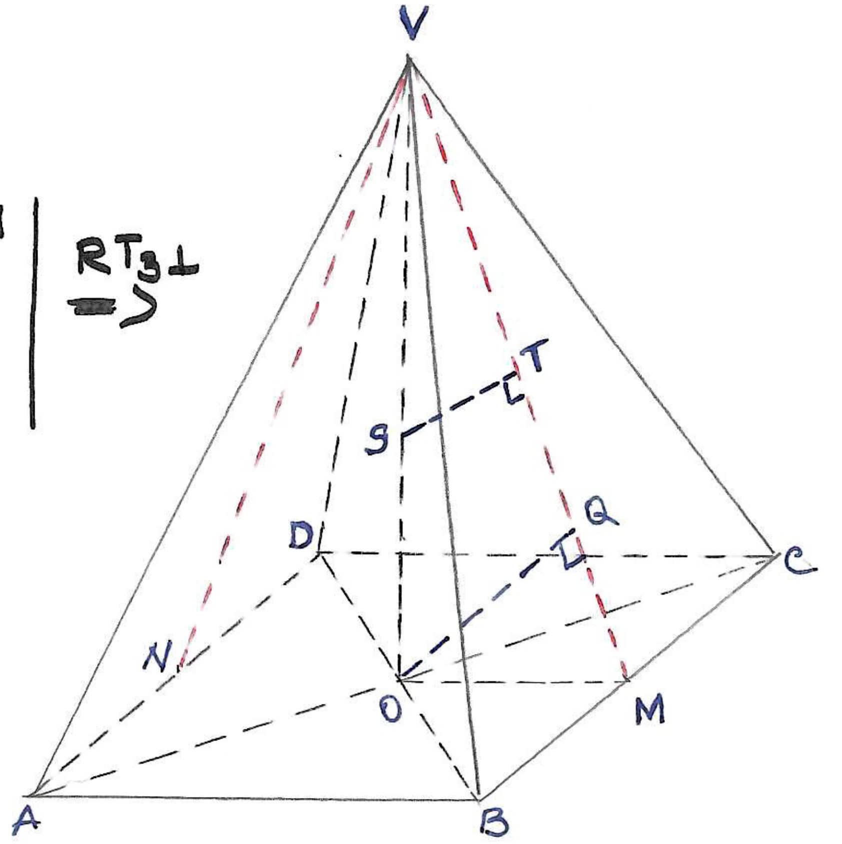
Din (1); (2); (3) $\Rightarrow m(\widehat{(VBC);(VAD)}) = m(\widehat{VM, VN}) =$

$= m(\sphericalangle MVN)$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC:\ OM - \text{l.m.} \Rightarrow OM = \dfrac{AB}{2},\ OM \parallel AB \\ \triangle ADB:\ ON - \text{l.m} \Rightarrow ON = \dfrac{AB}{2},\ ON \parallel AB \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} O \in (MN) \\ MN = AB \end{array}$$

$$A_{VMN} = \frac{MN \cdot VO}{2} = \frac{VN \cdot VM \cdot \sin(\sphericalangle MVN)}{2} \Rightarrow \sin(\sphericalangle MVN) = \frac{MN \cdot VO}{VM^2}$$

③ $d(O,(VBC))$



Fie $OQ \perp VM$, $Q \in VM$
$VM \perp BC$
$M, B, C \subset (VBC)$ $\quad \overset{RT3\perp}{\Longrightarrow}$

$\overset{RT3\perp}{\Longrightarrow}$ $OQ \perp (VBC) \Rightarrow$

$\Rightarrow d(O,(VBC)) = OQ$

Obs. Intr-o piramidă regulată, distanta de la centrul bazei la o față laterală este egală cu lungimea perpendicularei construite din centrul bazei pe apotema feței laterale.

④ Fie $ST \perp VM$, $T \in VM$, $S \in VO$

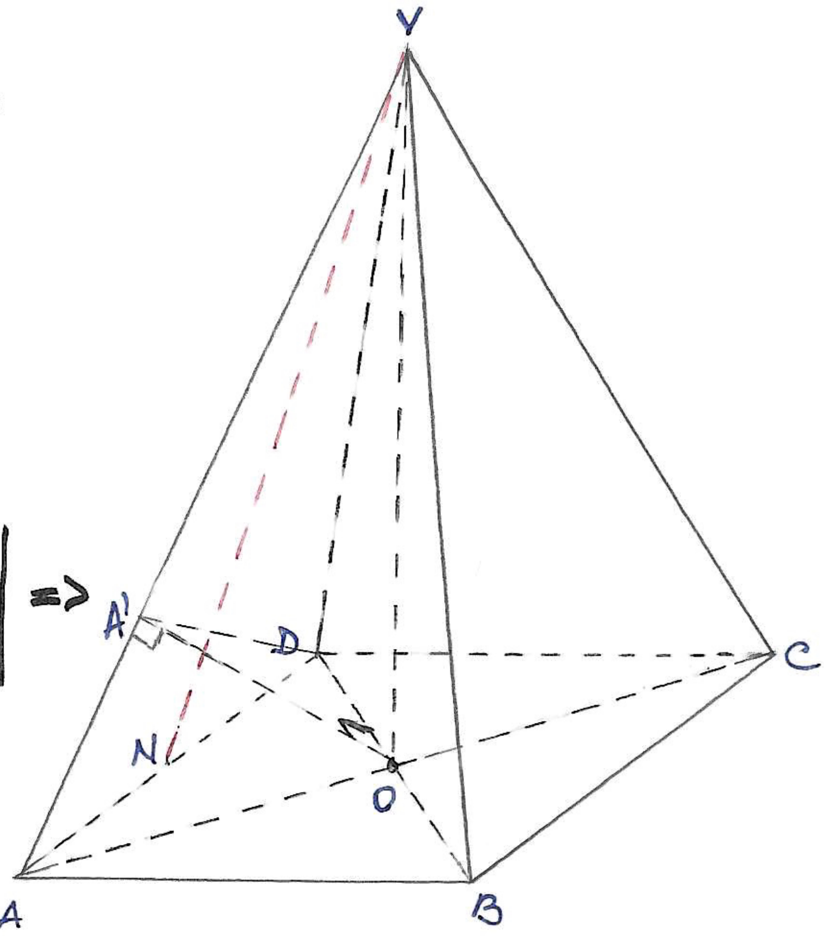
$BC \perp VM$
$BC \perp OM$
$VM, OM \subset (VOM)$ $\Rightarrow$ $BC \perp (VOM)$, $ST \subset (VOM)$ $\Rightarrow$ $ST \perp BC$, $ST \perp VM$, $VM \cap BC = \{M\}$, $VM, BC \subset (VBC)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow ST \perp (VBC)$

$d(S,(VBC)) = ST$

$$\sin(\sphericalangle V) = \frac{ST}{VS} = \frac{OM}{VM} \Rightarrow ST = \frac{VS \cdot OM}{VM}$$

VABCD - piramidă patrulateră regulată



- $m(\widehat{(VAD);(VAC)})$

Soluția I

$$\left.\begin{array}{l} ABCD - \text{pătrat} \Rightarrow DO \perp AC \\ VO \perp (ABC) \\ DO \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow VO \perp DO \\ AC, VO \subset (VAC) \\ AC \cap VO = \{O\} \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow DO \perp (VAC) \Rightarrow pr_{(VAC)} D = O \\ V \in (VAC) \Rightarrow pr_{(VAC)} V = V \\ A \in (VAC) \Rightarrow pr_{(VAC)} A = A \end{array}\right| \Rightarrow pr_{(VAC)} \Delta VAD = \Delta VAO \Rightarrow$$

$$\overset{P_{pr}}{\Longrightarrow} \quad A_{VAO} = A_{VAD} \cdot \cos\alpha$$

$$\alpha = m(\widehat{(VAD);(VAC)})$$

$$A_{VAO} = \frac{VO \cdot AO}{2} = A_{VAD} \cdot \cos\alpha$$

Fie N - mijl (AD) $\Rightarrow$ VN - apotema

$\Delta VNA : m(\sphericalangle M) = 90^\circ \Rightarrow VN^2 = VA^2 - AN^2$

$$A_{VAD} = \frac{AD \cdot VN}{2} \qquad \cos\alpha = \frac{A_{VAO}}{A_{VAD}} \Rightarrow \alpha$$

Soluția II

$(VAD) \cap (VAC) = VA$

$$\left.\begin{array}{l} DO \perp (VAC) \\ OA' \perp VA \\ OA', VA \subset (VAC) \end{array}\right| \overset{T3\perp}{\Rightarrow} DA' \perp VA$$

$$\left.\begin{array}{l} OA' \subset (VAC) \\ DA' \subset (VAD) \\ OA' \perp VA \\ DA' \perp VA \end{array}\right| \Rightarrow m(\widehat{(VAD);(VAC)}) = m(\sphericalangle OA'D)$$

$$\left.\begin{array}{l} DO \perp (VAC) \\ OA' \subset (VAC) \end{array}\right| \Rightarrow DO \perp OA' \Rightarrow \triangle OA'D \text{ - dreptunghic în } O$$

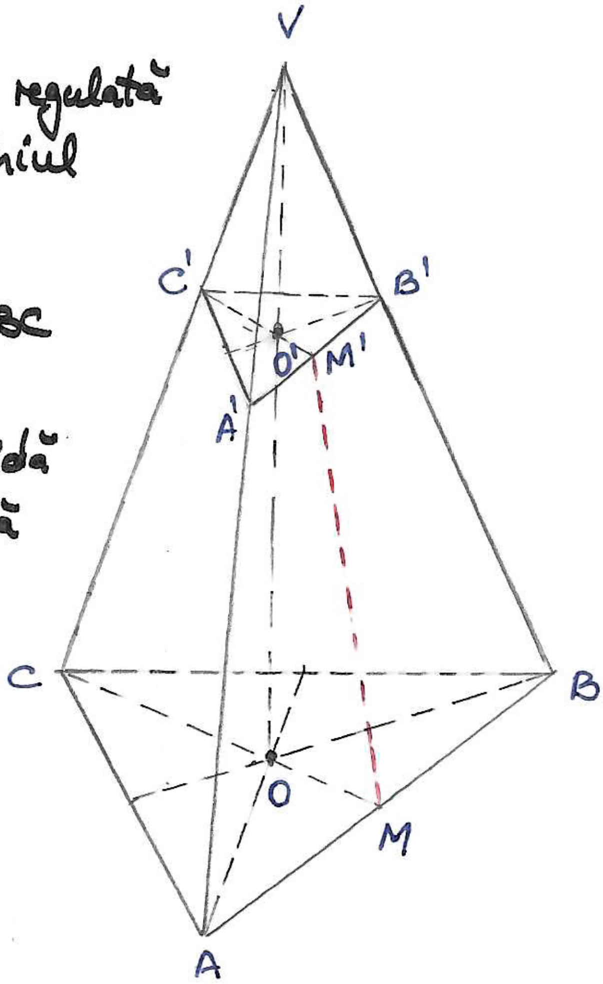
$$\sin(\sphericalangle OA'D) = \frac{DO}{A'D} \Rightarrow m(\sphericalangle OA'D) = m(\widehat{(VAD);(VAC)})$$

DISTANȚA DINTRE DOUĂ DREPTE NECOPLANARE

- găsește planul pe care este perpendiculară una dintre drepte (planul respectiv trebuie să includă și cealaltă dreaptă)

- din punctul de intersecție al dreptei cu planul pe care e perpendiculară se construiește perpendiculara pe a doua dreaptă =>
  => distanța dintre cele două drepte

TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ



VABC - piramida triunghiulară regulată din care provine trunchiul

$VA = VB = VC$

$VO \perp (ABC)$, O - centrul ΔABC

ABCA'B'C' - trunchi de piramidă triunghiulară regulată

ΔABC ; $\Delta A'B'C'$ - echilaterale

$(ABC) \parallel (A'B'C')$

$AA' = BB' = CC'$

Fie M - mijl. AB

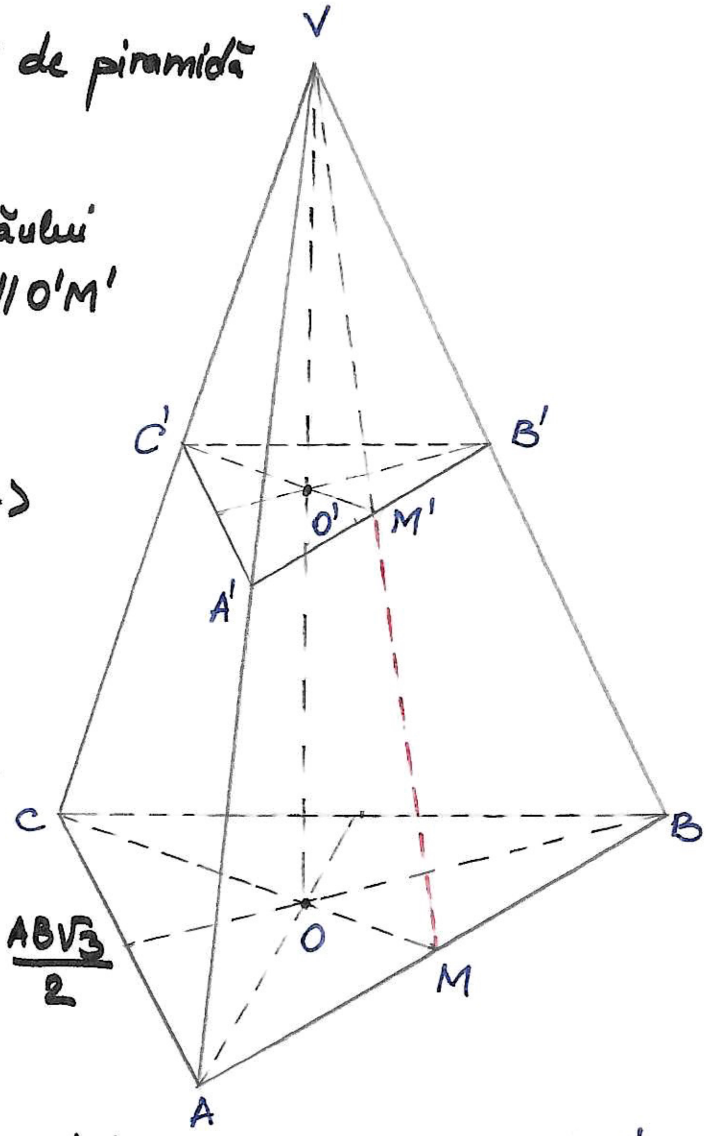
$VM \cap A'B' = \{M'\}$ $\Big| \Rightarrow$ MM' = apotema trunchiului (a_{tr})

$$A_l = \frac{(P_b + P_B)\cdot a_{tr}}{2}$$

$$A_t = A_l + A_b + A_B$$

$$V = \frac{h}{3}\left(A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}\right)$$

OO' - înălțimea trunchiului de piramidă



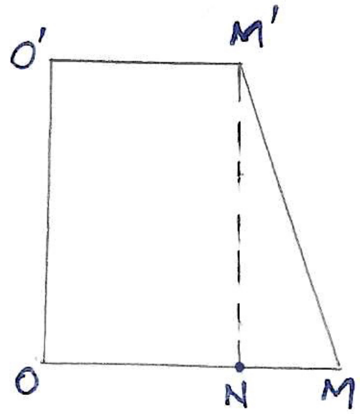
$$\left.\begin{array}{l}(ABC) \parallel (A'B'C') \\ (VOM) \cap (ABC) = OM \\ (VOM) \cap (A'B'C') = O'M'\end{array}\right| \xRightarrow{\text{T. fierăstrăului}} OM \parallel O'M'$$

$$\left.\begin{array}{l}VO \perp (ABC) \\ O' \in VO\end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l}OO' \perp (ABC) \\ OM \subset (ABC)\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}OO' \perp OM \\ OM \parallel O'M'\end{array}\right| \Rightarrow OMM'O' \text{ trapez dreptunghic}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{în } \triangle ABC \text{ - echilateral} \\ O \text{ - centrul de greutate}\end{array}\right| \Rightarrow OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{în } \triangle A'B'C' \text{ - echilateral} \\ O' \text{ - centrul de greutate}\end{array}\right| \Rightarrow O'M' = \frac{1}{3} \cdot \frac{A'B'\sqrt{3}}{2}$$



Fie $M'N \perp OM$, $N \in OM \Rightarrow ONM'O'$ - dreptunghi

$M'N = OO'$

în $\triangle NMM'$ dreptunghic $\xRightarrow{\text{T.P.}} M'N^2 = MM'^2 - NM^2$

VO - înălțimea piramidei din care provine trunchiul

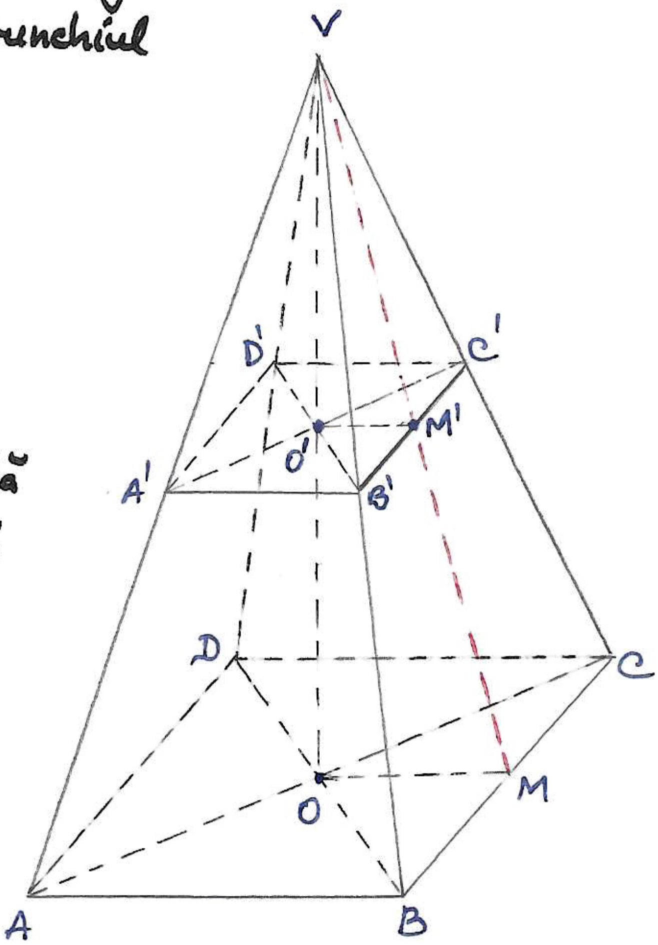
- $\triangle VOM$: $O'M' \parallel OM \overset{T.F.A}{\Longrightarrow} \triangle VO'M' \sim \triangle VOM \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{VM'}{VM}$$

- VABC - piramidă triunghiulară regulată
  $(ABC) \parallel (A'B'C')$ $\Big| \overset{T}{\Longrightarrow} VA'B'C' \sim VABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VO'}{VO} = \frac{VM'}{VM}$$

Fie VABCD - piramida patrulateră regulată din care provine trunchiul



$\Rightarrow$ ABCD - pătrat

$VA = VB = VC = VD$

$VO \perp (ABC)$

$AC \cap BD = \{O\}$

$ABCDA'B'C'D'$ - trunchi de piramidă patrulateră regulată

$(ABC) \parallel (A'B'C')$

$A'B'C'D'$ - pătrat

$AA' = BB' = CC' = DD'$

$O \in (VO)$

$(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow VABCD \sim VA'B'C'D'$

Fie M - mijl. (BC) $\Rightarrow$ VM = apotema piramidei (a_{pir})

$VM \cap B'C' = \{M'\}$

$\Rightarrow$ MM' = apotema trunchiului (a_{tr})

- $(ABC) \parallel (A'B'C')$

$(VOM) \cap (ABC) = OM$

$(VOM) \cap (A'B'C') = O'M'$

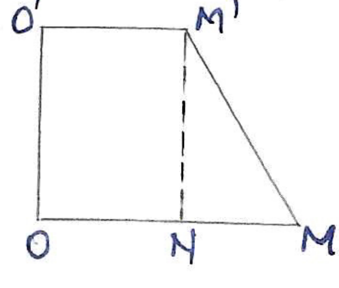
T fierăstrăului $\Rightarrow$ $OM \parallel O'M' \Rightarrow OMM'O'$ - trapez

$OO' \perp (ABC)$

$OM \subset (ABC)$

$\Rightarrow OO' \perp OM$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow OMM'O'$ trapez dreptunghic



$O'M' = \dfrac{A'B'}{2}$

$OM = \dfrac{AB}{2}$

$MM'^2 = M'N^2 + NM^2 = OO'^2 + (OM - O'M')^2$

- $VABC \sim VA'B'C' \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{VO}{VO'} = \dfrac{VM}{VM'}$

$$\frac{A_{l\,VABCD}}{A_{l\,VA'B'C'D'}} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$$

- $d(B, (VDC))$

$$V_{BVDC} = \frac{A_{VDC} \cdot d}{3} = \frac{A_{BCD} \cdot VO}{3}, \quad d = d(B, (VDC))$$

$$\frac{A_l}{4} \cdot d = A_{BCD} \cdot VO \Rightarrow d = 4\,\frac{A_{BCD} \cdot VO}{A_l}$$

- $ACC'A'$ - secțiunea diagonală a trunchiului

$$\left.\begin{array}{l} A'C' \parallel AC \\ AA' \equiv CC' \\ AA' \nparallel CC' \end{array}\right| ACC'A' \text{ - trapez isoscel}$$

$$A_{ACC'A'} = \frac{(AC + A'C') \cdot OO'}{2}$$

- $(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow VA'B'C'D' \sim VABCD \Rightarrow$

$$\frac{V_{VA'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^3 = \left(\frac{VO'}{VO}\right)^3$$