El parcial

Análisis Matemático II

FIUBA

Prefacio

La riqueza de una nación ya no es más el petróleo, ni el campo, ni sus recursos naturales. Éstos pueden sumar, sin duda, pero el mayor activo de una nación son los algoritmos, las ecuaciones y las ideas que viven en las mentes de sus jóvenes. Sirva como demostración de este hecho que Apple, Amazon, Google y Microsoft valen cada una cien veces lo que vale YPF. Y combinadas valen más que toda la República Argentina. (*)

Central para el desarrollo de un país son sus ingenieros. Su rol es tan importante que son contratados cualquiera sea su especialidad y luego se discute qué posición podrían ocupar. Todos estos ingenieros en algún momento debieron estudiar los conceptos de continuidad, de diferenciabilidad, de extremo, etc. No solo por los conceptos en sí, sino también por la lógica perfecta que comienza a formarse en sus mentes a través del estudio de estas cuestiones.

El presente material pretende ayudar a los futuros ingenieros en su preparación para el parcial de Análisis Matemático II. Escritos con el rigor de un Doctor en Matemática, diseñados con los más altos estándares en calidad educativa, y revisados directa o indirectamente por varios profesores de la cátedra, el alumno sentirá en cada minuto de lectura o vista del video que está avanzando en la dirección del gradiente.

2 de abril de 2024.

Análisis Matemático II.

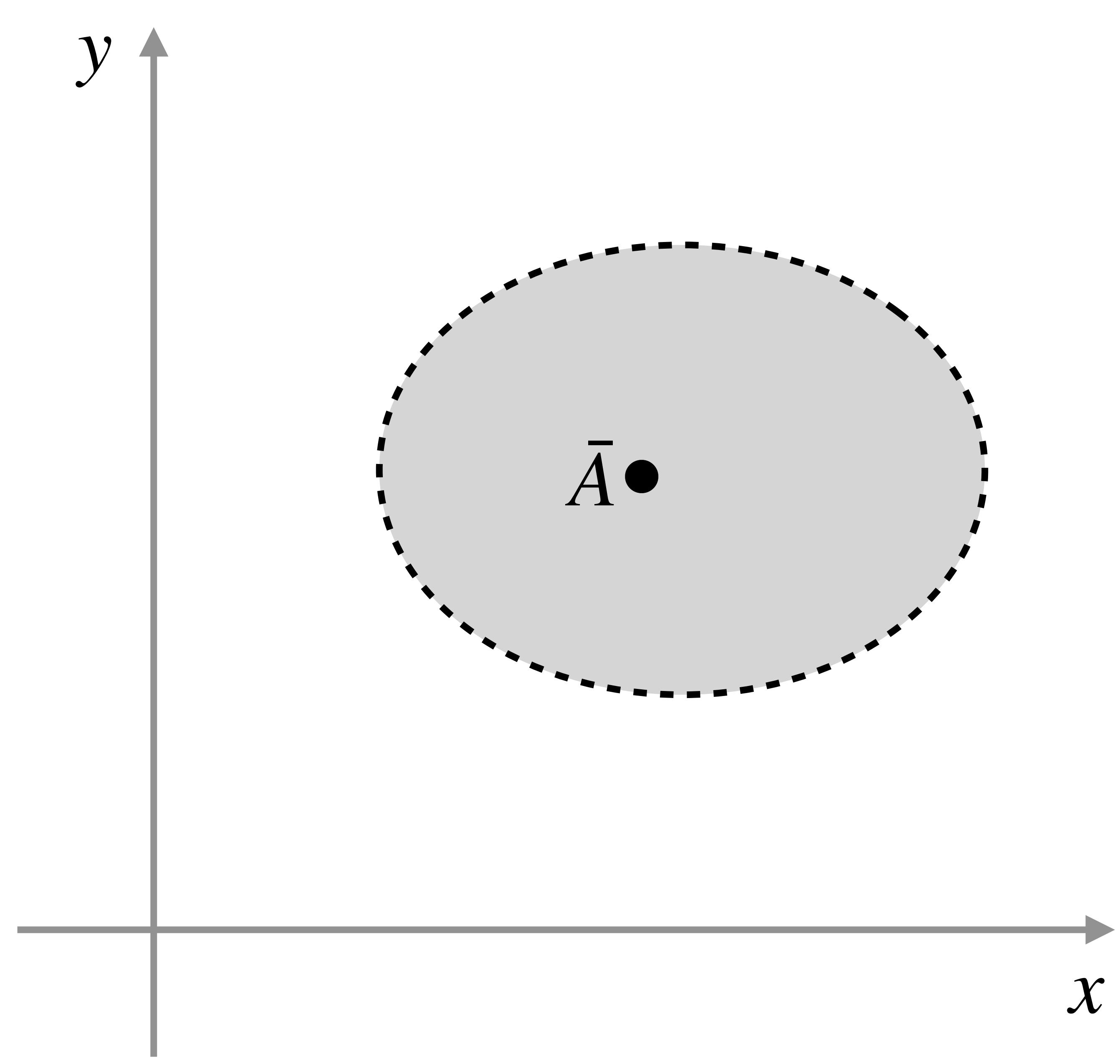
Facultad de Ingeniería - Universidad de Buenos Aires.

(*) Capitalización de mercado al día 22 de marzo de 2024.

Ejercicio 1

Topología

En este ejercicio hallamos el dominio natural de una función $\vec{f}(x, y)$, realizamos una interpretación geométrica del mismo, y repasamos importantes conceptos como los de conjunto abierto, cerrado, compacto, frontera, etc.



Ver .pdf

(pasá a la siguiente página)

Ver video

Un resolución explicada[1]

Tema 1

- **Ejercicio 1.** Sea

$$\vec{f}(x,y) = (\sqrt{8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4}, \ln(y - x - 1))$$

y sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el dominio natural de $\vec{f}$. Grafique D, su interior y su frontera. Indique si D es compacto y describa mediante ecuaciones/inecuaciones el interior de D.

Solución:

El dominio natural D de $\vec{f}$ es la intersección de los dominios naturales de sus componentes $f_1(x,y) = \sqrt{8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4}$ y $f_2(x,y) = \ln(y - x - 1)$.

Si D_1 es el dominio natural de f_1, entonces

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4 \geq 0\right\}.$$

Como

$$8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^2 - 8x + y^2 - 4y + 4 \leq 0,$$

$$4x^2 - 8x = 4(x^2 - 2x + 1 - 1) = 4(x-1)^2 - 4 \quad \wedge \quad y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2,$$

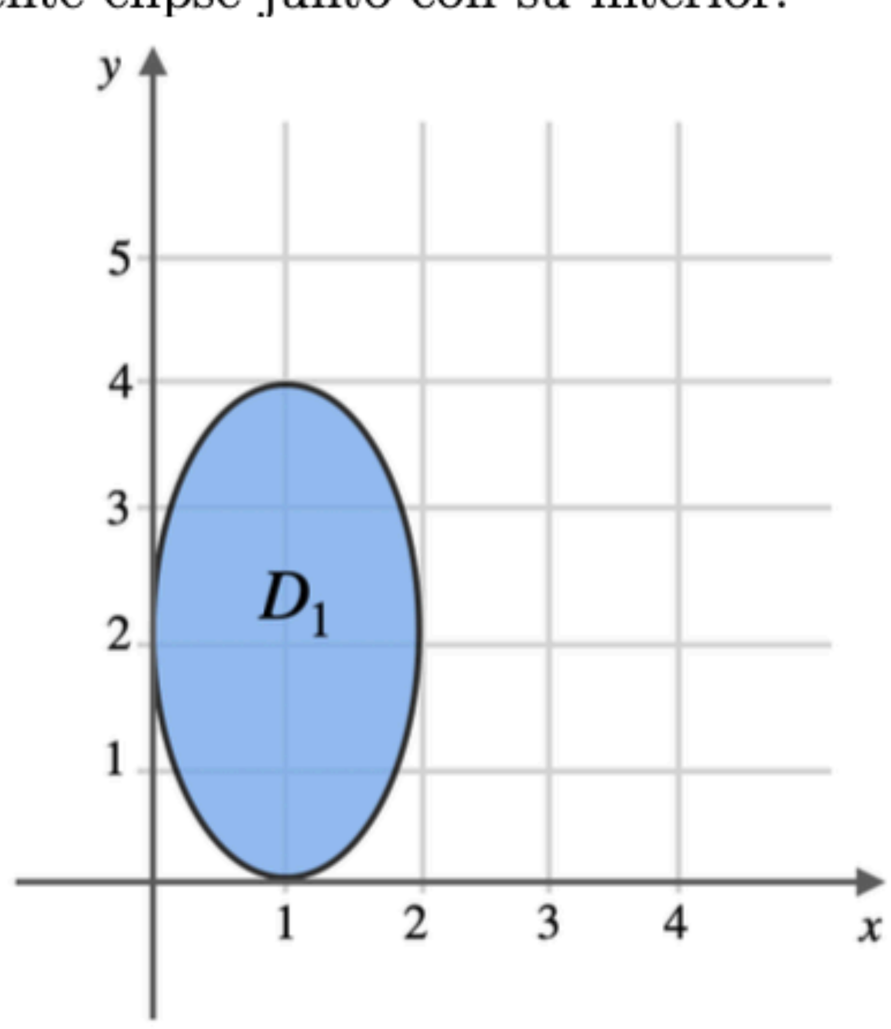
tenemos que

$$8x - 4x^2 + 4y - y^2 - 4 \geq 0 \iff 4(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 4 \iff (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1.$$

Por lo tanto

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1\right\},$$

cuyo gráfico es la siguiente elipse junto con su interior.

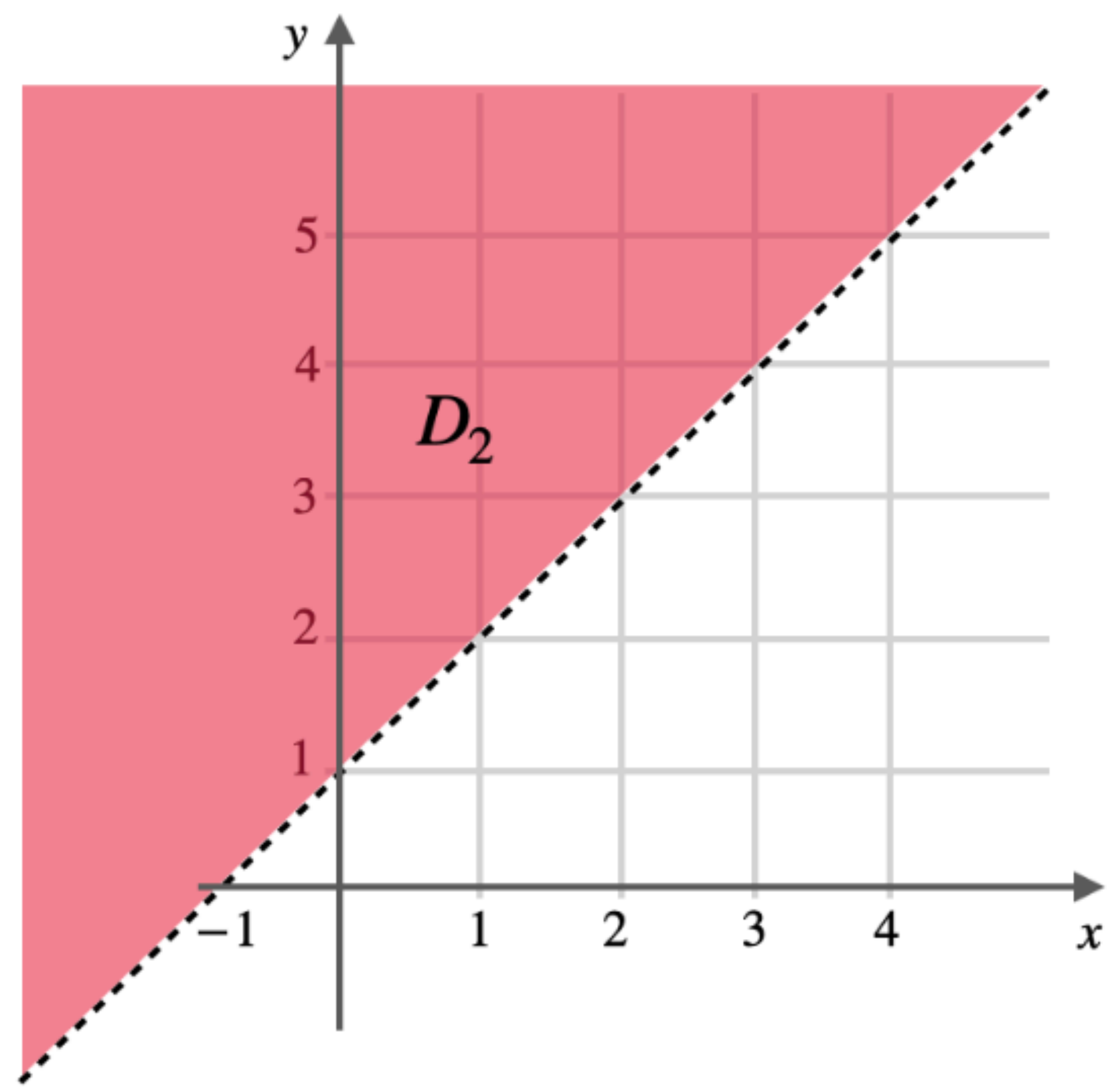


[1] Por J.L. Mancilla Aguilar, con la colaboración en la revisión de Silvia Gigola, Martín Maulhardt y Silvia Seminara

Por otro lado, el dominio natural D_2 de f_2 es el conjunto

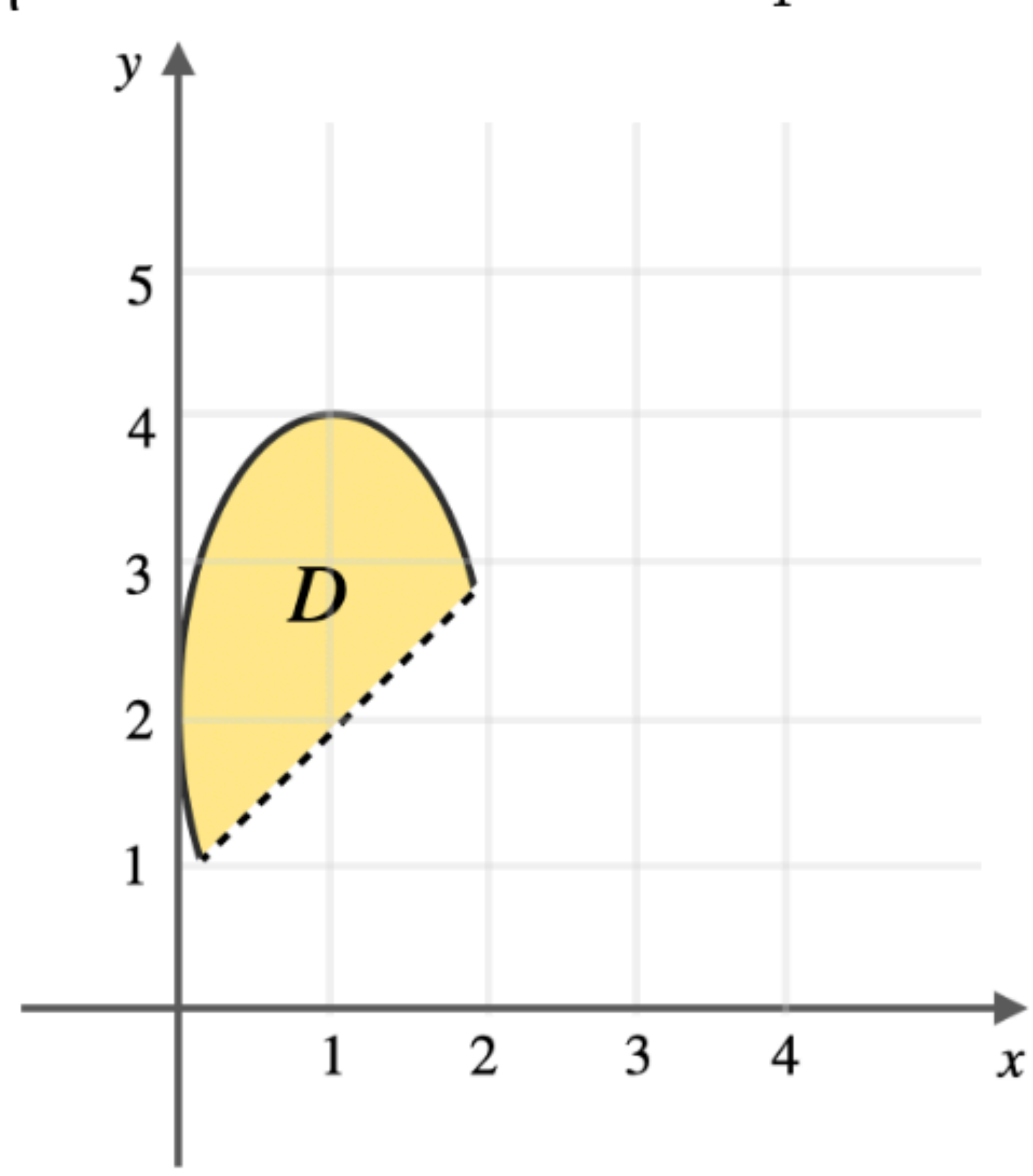
$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y - x - 1 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > x + 1\},$$

que es un semiplano sin su borde cuyo gráfico es

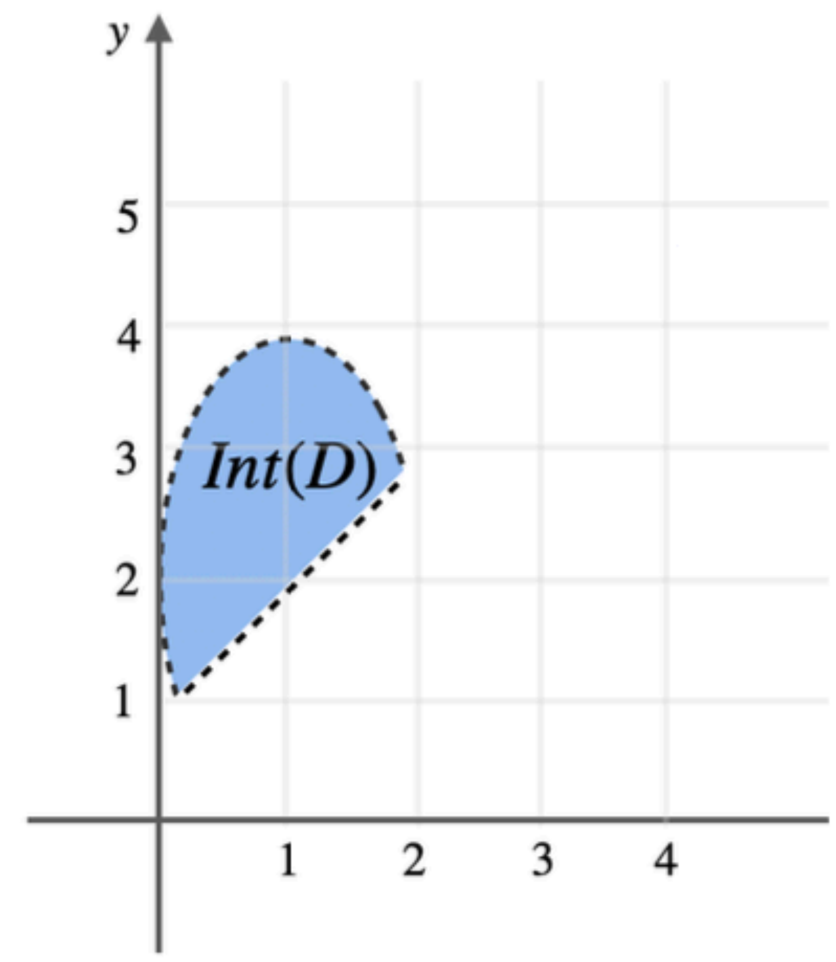


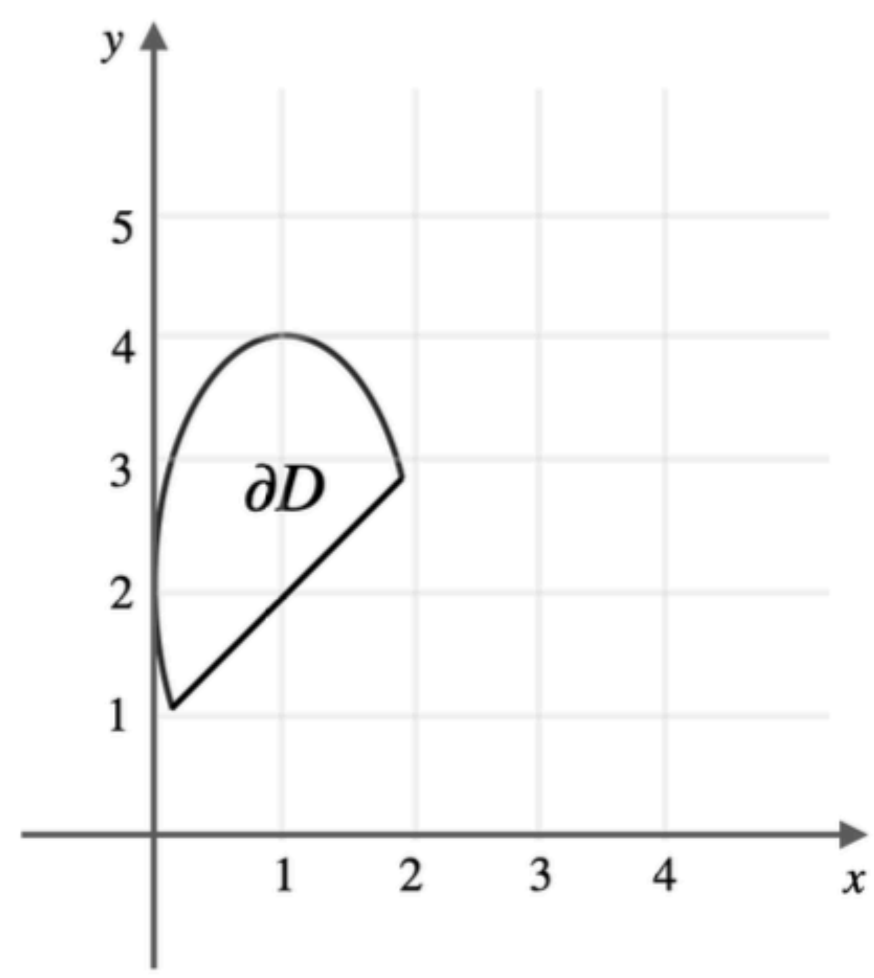
Entonces el dominio natural de $\vec{f}$ es

$$D = D_1 \cap D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} \leq 1 \ \wedge \ y > x + 1\right\}$$



y el interior $\operatorname{int}(D)$ y la frontera ∂D son





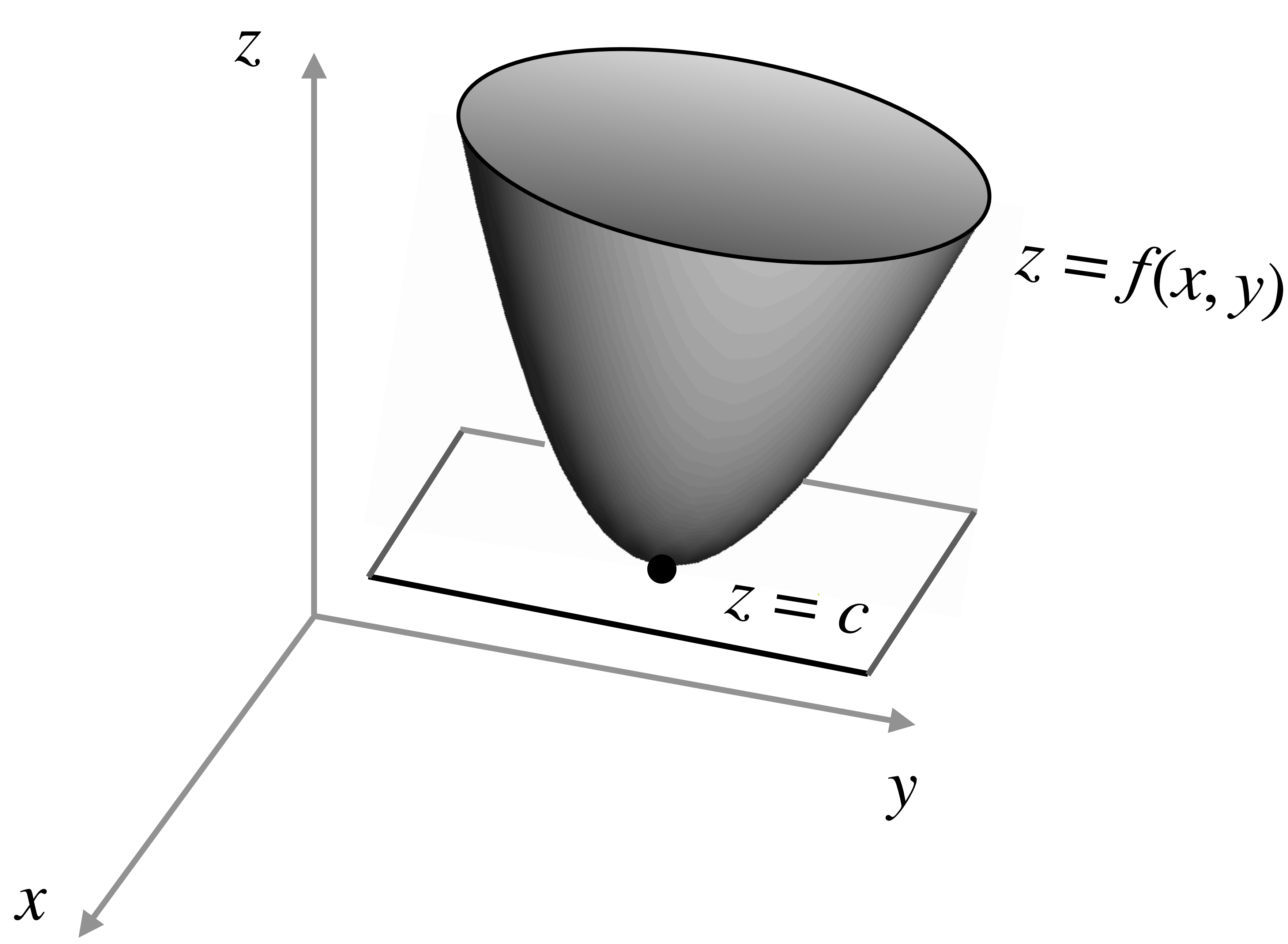
El conjunto D es acotado, pero no cerrado pues no contiene parte de su frontera. Entonces D no es compacto. Finalmente, el interior de D está descripto por las inecuaciones:

$$\text{int}(D): \quad (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} < 1 \ \wedge \ y > x + 1.$$

Ejercicio 2

Extremos

En este ejercicio hallamos los extremos relativos de una función $f(x, y)$ y repasamos el significado geométrico del plano tangente al gráfico de una función, en especial cuando éste es parelelo al plano xy.



$$\nabla f(x, y) = \vec{0}$$

Ver .pdf

Ver video

- **Ejercicio 2.** Sea
$$f(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy+y^2+\frac{y^3}{3}.$$
Halle los puntos (x_0,y_0) para los cuales el plano tangente al gráfico de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ es paralelo al plano xy y determine, en cada uno de ellos, si se produce un extremo relativo. Indique tipo y valor del extremo en caso afirmativo.

Solución:

Como la función f es un polinomio, ésta tiene derivadas parciales de todos los órdenes y son continuas. En particular f es diferenciable en cada punto (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, con lo cual el gráfico de f admite plano tangente en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, siendo

$$z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

una ecuación para ese plano.

Como el plano tangente al gráfico de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ resulta paralelo al plano xy si y solo si admite la ecuación $z=f(x_0,y_0)$, tenemos que los puntos (x_0,y_0) buscados deben cumplir las condiciones $f'_x(x_0,y_0)=0$ y $f'_y(x_0,y_0)=0$.

Teniendo en cuenta que $f'_x(x,y)=x+y$ y que $f'_y(x,y)=x+2y+y^2$, tenemos que

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=0 \\ y+y^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ y=0 \ \vee \ y=-1 \end{cases}$$

Luego los puntos pedidos son:

$$\boxed{P_1=(0,0)} \quad \wedge \quad \boxed{P_2=(1,-1)}.$$

Tanto P_1 como P_2 son puntos críticos de f pues en ellos el gradiente de la función es nulo. Para determinar si se produce o no un extremo relativo en esos puntos utilizamos el criterio de las segundas derivadas, el cual es aplicable en este caso porque f es de clases $\mathcal{C}^2$.

Teniendo en cuenta que $f''_{xx}(x,y)=1$, $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=1$ y $f''_{yy}(x,y)=2+2y$ resulta que

$$f''_{xx}(P_1)=1>0 \quad \wedge \quad \Delta=\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_1) & f''_{xy}(P_1) \\ f''_{yx}(P_1) & f''_{y}(P_1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1>0,$$

con lo cual se produce un mínimo relativo en P_1 cuyo valor es $f(P_1)=0$.

Respecto de P_2,

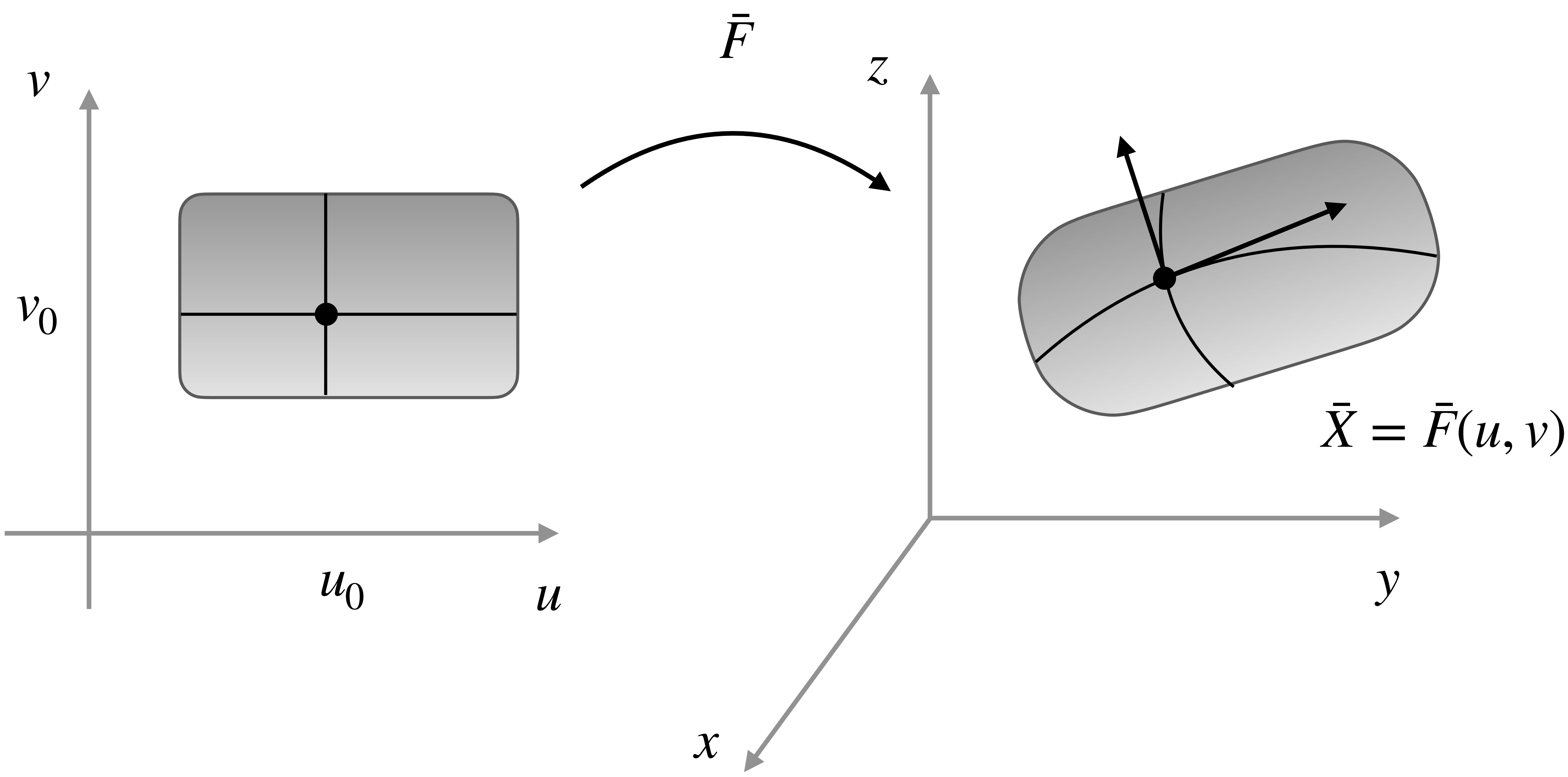
$$f''_{xx}(P_2)=1>0 \quad \wedge \quad \Delta=\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_2) & f''_{xy}(P_2) \\ f''_{yx}(P_2) & f''_{y}(P_2) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1<0,$$

y por lo tanto no se produce extremo relativo en ese punto.

Ejercicio 3

Superficies

En este ejercicio hallamos los puntos de una superficie dada en forma paramétrica en los cuales el plano tangente a la misma es ortogonal a determinada recta.



Ver .pdf

Ver video

- **Ejercicio 3.** Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie descripta por la ecuación vectorial

$$\vec{X} = (u+v, v, uv), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Encuentre todos los $P \in \Sigma$ para los cuales el plano tangente a Σ en P resulta ortogonal a la recta normal a la superficie de nivel 6 de $f(x,y,z) = x^2 + 4y + z^2$ en el punto $(x_0, 1, 1)$, con $x_0 < 0$. Para los puntos P hallados, dé una ecuación cartesiana del plano tangente correpondiente.

Solución:

Como el punto $A = (x_0, 1, 1)$ debe pertenecer a la superficie de nivel 6 de f, $f(x_0, 1, 1) = x_0^2 + 5 = 6$. Luego $x_0^2 = 1$ y por lo tanto $x_0 = 1$ o $x_0 = -1$. Dado que $x_0 < 0$, resulta entonces que $x_0 = -1$ y $A = (-1, 1, 1)$.

La función f es de clase $\mathcal{C}^1$ y

$$\nabla f(A) = (2x, 4, 2z)|_A = (-2, 4, 2) \neq \vec{0}.$$

Por lo tanto la superficie de nivel 6 de f admite plano tangente en A y $\nabla f(A)$ es un vector normal a éste. En consecuencia, si r_0 es la recta normal a dicha superficie de nivel en A, $\vec{v} = (-2, 4, 2)$ es un vector director para ella.

Por otro lado, para que el plano tangente a Σ en un punto $P \in \Sigma$ sea ortogonal a r_0 es necesario y suficiente que un vector director cualquiera de r_0 sea normal a dicho plano. Por ende el vector $\vec{v}$ debe ser normal al plano tangente a Σ en P.

Como $\vec{\phi}(u,v) = (u+v, v, uv)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, es una parametrización de clase $\mathcal{C}^1$ de Σ y el vector

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(u,v) = (-v, v-u, 1) \neq \vec{0},$$

$\vec{n}$ es normal al plano tangente a Σ en el punto $P = \vec{\phi}(u,v)$.

En los puntos P que estamos buscando debe ocurrir que $\vec{n} \parallel \vec{v}$, ya que ambos vectores son normales a un mismo plano. Entonces debe existir un escalar $\alpha \neq 0$ tal que

$$(-v, v-u, 1) = \alpha(-2, 4, 2).$$

Igualando componente a componente y resolviendo las ecuaciones resultan $\alpha = 1/2$, $u = -1$ y $v = 1$. Entonces $\boxed{P = \vec{\phi}(-1,1) = (0,1,-1)}$ es el único punto de Σ donde se cumple lo pedido.

Una ecuación cartesiana para el plano tangente a Σ en el punto P hallado viene dada por la fórmula

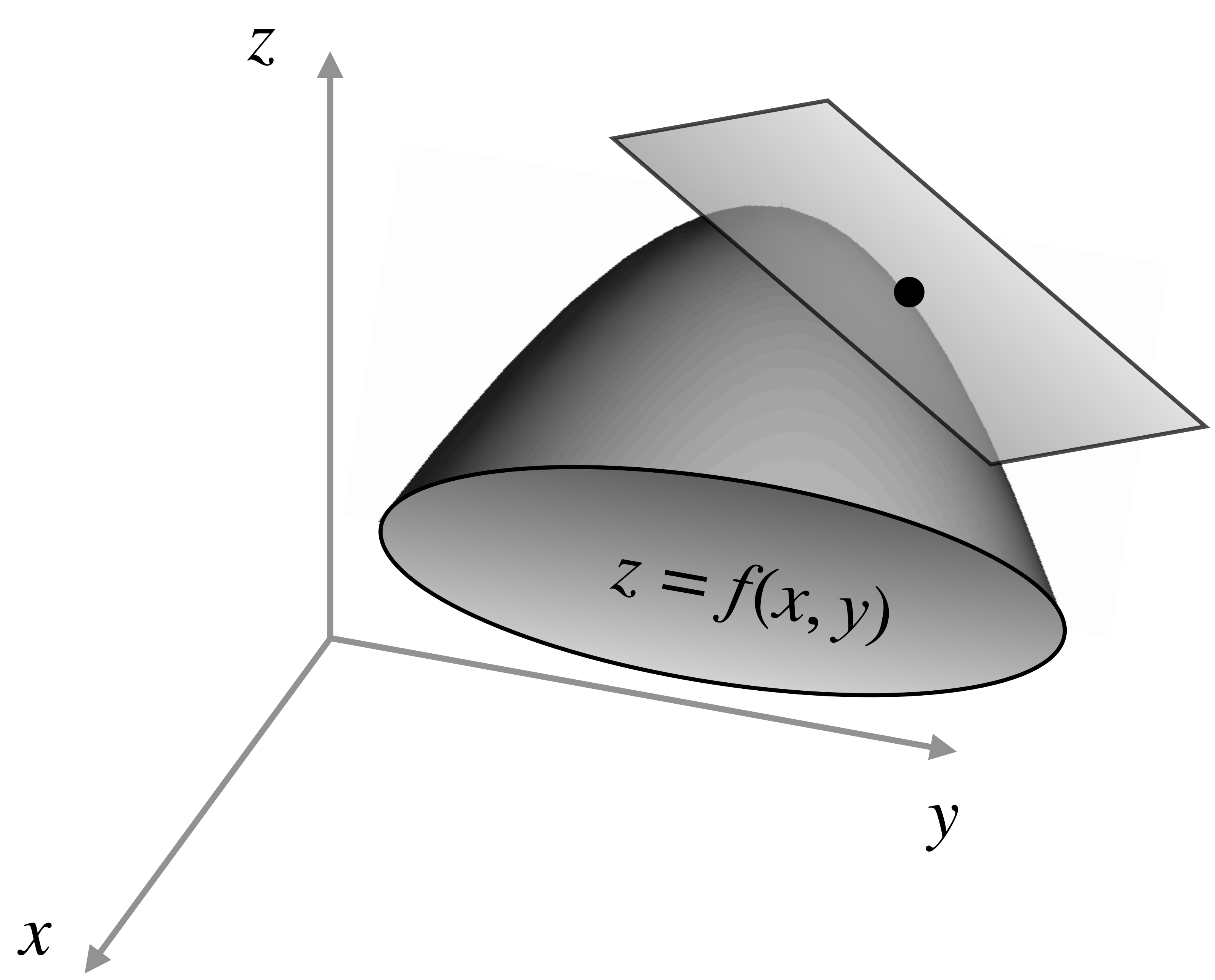
$$\vec{v} \cdot (X - P) = 0$$

ya que $\vec{v}$ es un vector normal a ese plano. Entonces, como $(-2, 4, 2) \cdot (x, y-1, z+1) = 0$ es equivalente a $-2x + 4y - 4 + 2z + 2 = 0$, una posible ecuación cartesiana resulta ser

$$\boxed{-2x + 4y + 2z = 2}$$

Funciones implícitas

En este ejercicio fundamental tenemos una función definida implícitamente y obtenemos un valor aproximado de $f(x_1, y_1)$ utilizando una aproximación lineal.



$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ver .pdf

Ver video

- **Ejercicio 4.** Justifique, mediante el teorema de la función implícita, que existe $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (0, -1)$ la ecuación $e^x z + yz^2 + z^3 = 1$ define una función $z = h(x, y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ que cumple $h(0, -1) = z_0$.

  Calcule mediante una aproximación lineal el valor de $h(0.1, -1.05)$ y halle el versor que hace máxima la derivada direccional de h en el punto $(0, -1)$.

  Solución:

  Definimos $F(x, y, z) = e^x z + yz^2 + z^3 - 1$. Esta función es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$. Dado que queremos justificar que la ecuación $e^x z + yz^2 + z^3 = 1$, que es equivalente a la ecuación $F(x, y, z) = 0$, define una función $z = h(x, y)$ tal que $h(x_0, y_0) = z_0$ para cierto z_0, ese valor z_0 debe cumplir la condición $F(x_0, y_0, z_0) = e^{x_0} z_0 + y_0 z_0^2 + z_0^3 - 1 = 0$.

  Por lo tanto, teniendo en cuenta que $(x_0, y_0) = (0, -1)$, z_0 debe satisfacer la ecuación

$$z_0 - z_0^2 + z_0^3 - 1 = 0. \tag{1}$$

Como

$$z_0 - z_0^2 + z_0^3 - 1 = z_0 - 1 + z_0^3 - z_0^2 = (z_0 - 1) + z_0^2(z_0 - 1) = (z_0 - 1)(z_0^2 + 1),$$

la ecuación (1) tiene una única solución que es $\boxed{z_0 = 1}$.

Tenemos entonces que:

1. F es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^3$;
2. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;
3. $F'_z(x_0, y_0, z_0) = e^{x_0} + 2y_0 z_0 + 3z_0^2 = 2$, con lo cual $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Por lo tanto, en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, -1, 1)$ se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita y podemos garantizar entonces que la ecuación dada define en forma implícita una función $z = h(x, y)$ que es de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno V del punto $(0, -1)$ y que cumple $h(0, -1) = 1$.

Como h es diferenciable en $(0, -1)$, pues las derivadas parciales son continuas allí, admite un aproximación lineal en es punto. Para calcular esa aproximación tenemos primero que hallar las derivadas parciales de h en $(0, -1)$, para ello usamos las fórmulas

$$h'_x(0, -1) = -\frac{F'_x(0, -1, 1)}{F'_z(0, -1, 1)} = -\frac{e^x z|_{(0,-1,1)}}{2} = -\frac{1}{2}$$

y

$$h'_y(0, -1) = -\frac{F'_y(0, -1, 1)}{F'_z(0, -1, 1)} = -\frac{z^2|_{(0,-1,1)}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

La aproximación lineal de h alrededor del punto $(0, -1)$ es entonces

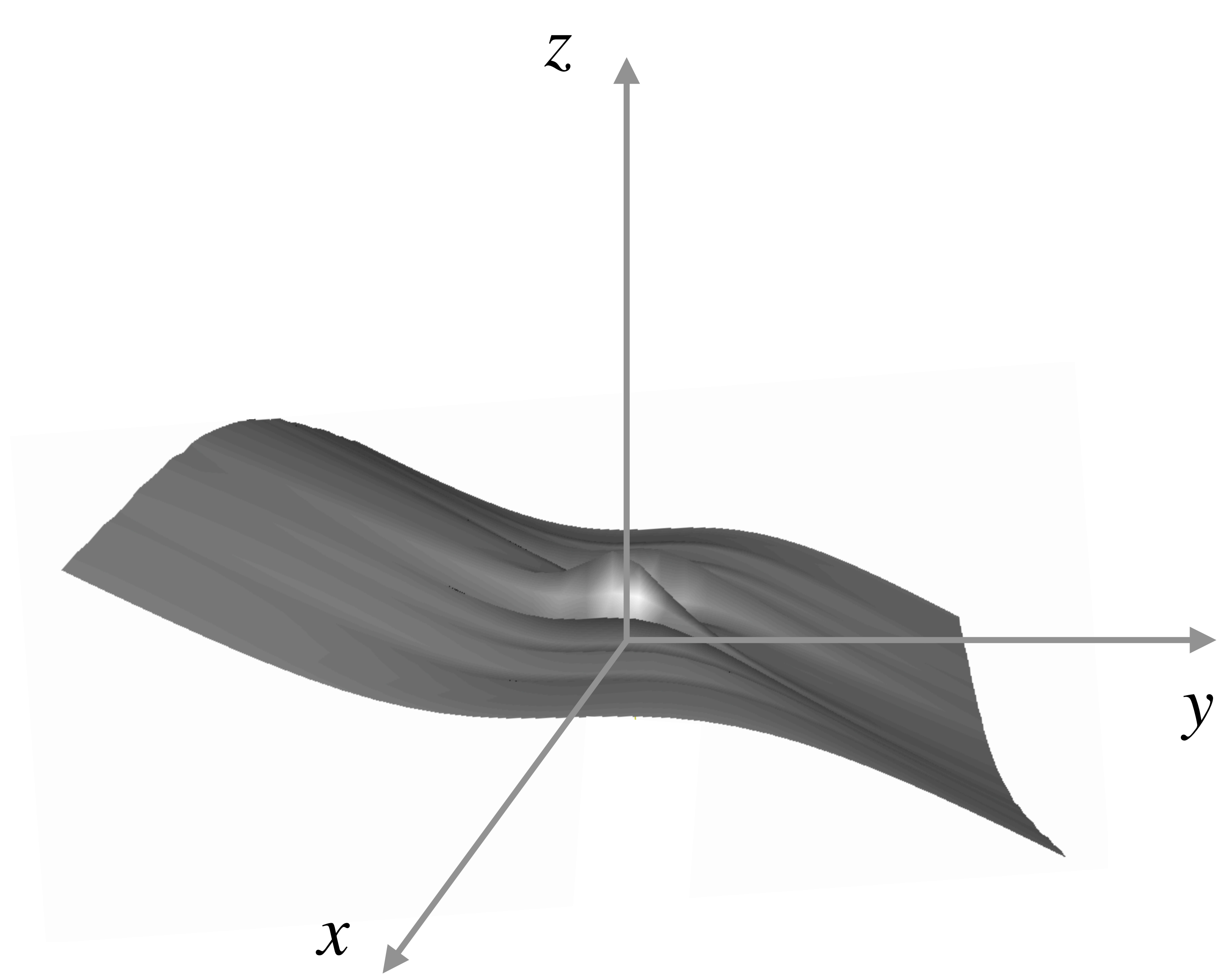
$$L(x, y) = h(0, -1) + h'_x(0, -1)x + h'_y(0, -1)(y + 1) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y + 1}{2},$$

y por lo tanto $\boxed{h(0.1, -1.05) \approx L(0.1, -1.05) = 0.975}$.

Finalmente, como h es diferenciable en $(0, -1)$ todas las derivadas direccionales de h existen en ese punto y alcanzan su valor máximo en el versor $\boxed{\breve{v} = \nabla h(0, -1)/\|\nabla h(0, -1)\| = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})}$.

Derivadas direccionales

En este ejercicio hallamos las derivadas direccionales de una función f en el punto $\bar{A} = (0,0)$. Esto lo debemos hacer por definición y aprovechamos para repasar este importante concepto.



$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3) - y^3}{x^2 + 2y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ver .pdf   Ver video

- **Ejercicio 5.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^3)-y^3}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Pruebe que f admite en el origen derivadas direccionales en todas las direcciones. Calcule $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ y halle los versores $\breve{v}$ para los cuales $f'((0,0),\breve{v}) = 0$.

Solución:

Sea $\breve{v} = (a,b)$ un versor, es decir, $a^2 + b^2 = 1$.

Entonces

$$\begin{aligned} f'((0,0),\breve{v}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\breve{v}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t^3a^3) - t^3b^3}{t^3(a^2+2b^2)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{a^2+2b^2}\left[\frac{\operatorname{sen}(t^3a^3)}{t^3} - b^3\right] \\ &= \frac{a^3-b^3}{a^2+2b^2}, \end{aligned}$$

pues

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t^3a^3)}{t^3} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a^3u)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{a^3\cos(a^3u)}{1} = a^3,$$

donde en la primera igualdad se empleó el cambio de variable $u = t^3$ y en la segunda se aplicó la regla de L'Hopital. Hemos entonces probado la existencia de las derivadas direccionales en el origen.

Respecto de las derivadas parciales de f en $(0,0)$, tenemos que

$$\boxed{f'_x(0,0) = f'((0,0),(1,0)) = 1 \quad \wedge \quad f'_y(0,0) = f'((0,0),(0,1)) = -\frac{1}{2}}.$$

Finalmente, si $\breve{v} = (a,b)$

$$f'((0,0),\breve{v}) = 0 \iff \frac{a^3-b^3}{a^2+2b^2} = 0 \iff a^3 - b^3 = 0.$$

Entonces $a^3 = b^3$ y por lo tanto $a = b$. Como $\breve{v}$ es un versor, $a^2 + b^2 = 2a^2 = 1$, con lo cual $a = 1/\sqrt{2}$ o $a = -1/\sqrt{2}$. En conclusión, hay dos versores para los cuales se anula la derivada direccional y estos son

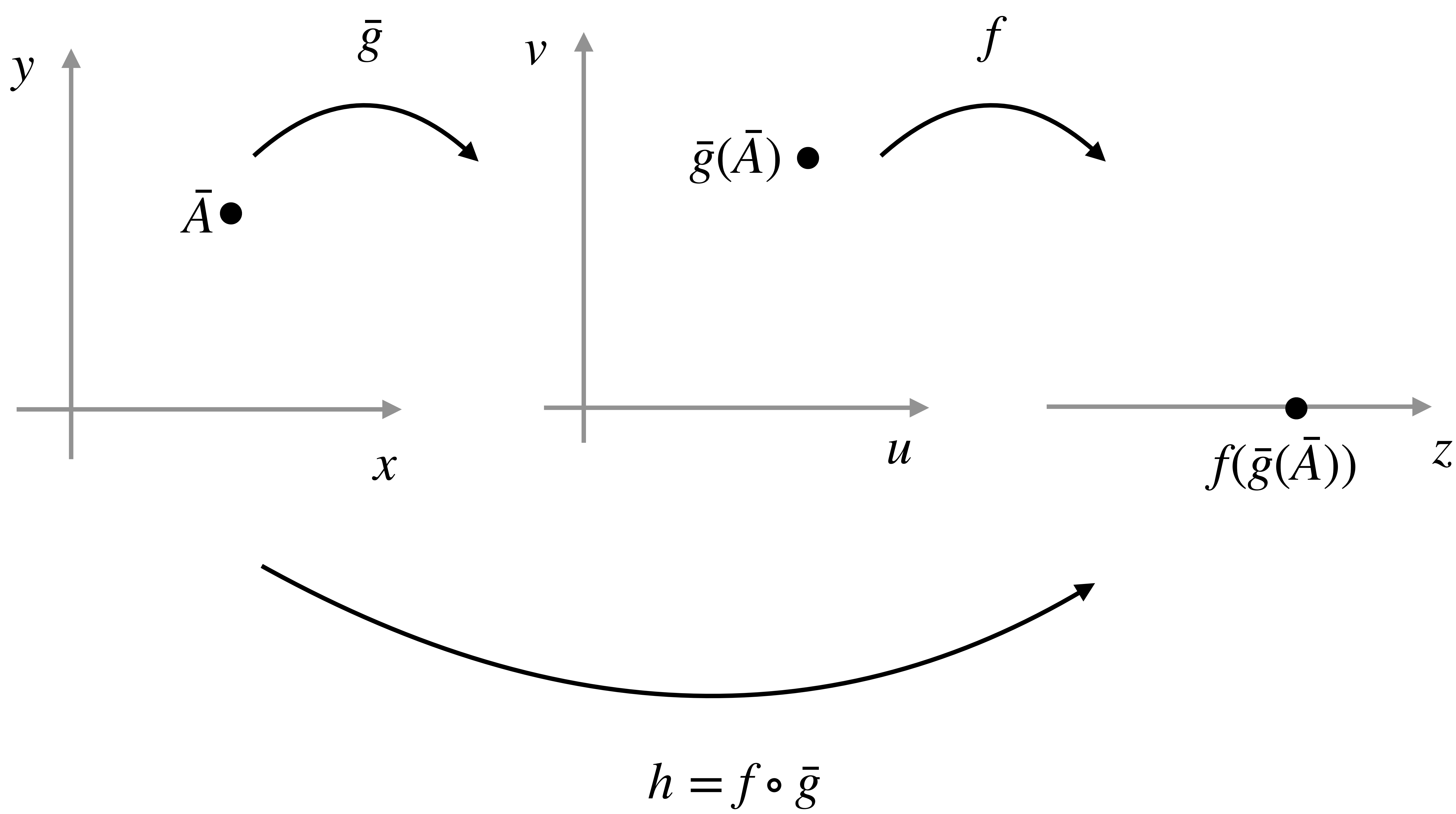
$$\boxed{\breve{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \quad \wedge \quad \breve{v}_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})}.$$

Si bien la pregunta sobre si f es o no diferenciable en $(0,0)$ no es parte del enunciado del problema, es interesante notar que estamos en condiciones de dar una respuesta a la misma. Si f fuese diferenciable en el origen, entonces $\nabla f(0,0) = (1,-1/2)$ y $f'((0,0),\breve{v}) = \nabla f(0,0)\cdot\breve{v} = a - b/2$. En particular, tendríamos que $f'((0,0),\breve{v}_1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$, lo cual es imposible, porque en ese versor la derivada es nula. En consecuencia, la función f no puede ser diferenciable en el origen.

Ejercicio 6

Regla de la cadena

En este ejercicio importantísimo tenemos dos funciones f y $\bar{g}$. Las componemos definiendo una función h y hallamos el plano tangente al gráfico de f en un punto $(\bar{A}, f(\bar{A}))$.



Ver .pdf

Ver video

Ejercicio 1. Sea $h = f \circ \vec{g}$ con f diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y $\vec{g}(x, y) = (xy^2, x^2 - 2y)$. Sabiendo que $h(1, -1) = 2$ y que $\nabla h(1, -1) = (2, -4)$, halle el plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 3, f(1, 3))$.

Solución:

Como f y $\vec{g}$ son funciones diferenciables ($\vec{g}$ lo es porque sus componentes son polinómicas) entonces h también es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Por ser f diferenciable admite plano tangente a su gráfico en el punto $(1, 3, f(1, 3))$ de ecuación

$$z = f(1, 3) + \nabla f(1, 3) \cdot (x - 1, y - 3).$$

Como $h(1, -1) = 2$ y $h = f \circ \vec{g}$ tenemos que $h(1, -1) = f(\vec{g}(1, -1)) = f(1, 3) = 2$.

Aplicado la regla de la cadena (podemos hacerlo porque las funciones son diferenciables), resulta

$$Dh(1, -1) = Df(\vec{g}(1, -1))\ D\vec{g}(1, -1)$$

$$[2\ \ -4] = Df(1, 3)\ \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ 2x & -2 \end{bmatrix}_{(1,-1)}$$

$$[2\ \ -4] = \underbrace{Df(1, 3)}_{[a\ \ b]}\ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Operando, nos queda

$$\begin{cases} 2 &= a + 2b \\ -4 &= (-2)a + (-2)b \end{cases}$$

resultando $a = 2$ y $b = 0$, es decir, $\nabla f(1, 3) = (2, 0)$.

Reemplazando todo lo obtenido tenemos que una ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(1, 3, 2)$ es

$$\boxed{z = 2x}$$

Ejercicio 7

Polinomio de Taylor

En este ejercicio tenemos el polinomio de Taylor de g en un punto $\bar{A}$. De este ejercicio no proporcionamos el video porque creemos que te puede ser útil leerlo por vos mismo ahora que tenés una muestra en los videos anteriores de cómo se lee en matemática. Hacé el esfuerzo que se necesita para leer en matemática. Te aseguramos que esto te ayudará en el examen.

Hacete un café,

pasá la página,

concentrate,

y estudiá el ejercicio.

Ejercicio 3. Sea $f(x,y) = \alpha[e^{x-2} + \cos y] + \beta[xy - \operatorname{sen} y] + g(x,y)$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y g una función de clase $\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ para la cual $P_2(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 13x - 5y$ es su polinomio de Taylor de 2do orden en $A = (2,0)$. Halle los valores de α y β para que f tenga un punto crítico (estacionario) en A y determine, para los valores hallados, si allí se produce un extremo local, indicando el tipo en caso afirmativo.

Solución:

Empezamos por ver qué información sobre g nos brinda P_2. Como P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de g en A, se cumple que:

$$g(A) = P_2(A) = -10 \tag{1}$$

$$g'_x(A) = P'_{2x}(A) = 8x + 2y - 13|_A = 3, \qquad g'_y(A) = P'_{2y}(A) = 2x + 2y - 5|_A = -1 \tag{2}$$

$$g''_{xx}(A) = P''_{2\,xx}(A) = 8, \qquad g''_{xy}(A) = P''_{2\,xy}(A) = 2, \qquad g''_{yy}(A) = P''_{2\,yy}(A) = 2. \tag{3}$$

Note que dado que g es de clase $\mathcal{C}^3$, y en particular de clase $\mathcal{C}^2$, $g''_{yx}(A) = g''_{xy}(A) = 2$ por el teorema de Schwarz.

La función $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ dado que las funciones exponenciales, polinómicas y trigonométricas lo son y g lo es. Por lo tanto f es diferenciable en A y tiene un punto estacionario allí si y solo si $\nabla f(A) = \vec{0}$.

Entonces se debe cumplir que

$$f'_x(A) = [\alpha e^{x-2} + \beta y]_A + g'_x(A) = \alpha + g'_x(A) = 0 \tag{4}$$

$$f'_y(A) = [-\alpha \operatorname{sen} y + \beta(x - \cos y)]_A + g'_y(A) = \beta + g'_y(A) = 0, \tag{5}$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{\alpha = -g'_x(A) = -3} \qquad \wedge \qquad \boxed{\beta = -g'_y(A) = 1}.$$

Pasamos ahora a analizar qué tipo de punto es A para la función f correspondiente a los valores $\alpha = -3$ y $\beta = 1$. Para ello tengamos en cuenta que reemplazando α y β en la definición de f por los valores obtenidos y derivando f respecto de x y de y quedan

$$f'_x(x,y) = -3\,e^{x-2} + y + g'_x(x,y) \qquad \wedge \qquad f'_y(x,y) = 3\operatorname{sen} y + x - \cos y + g'_y(x,y).$$

Entonces, derivando y evaluando en el punto A obtenemos

$$f''_{xx}(A) = -3e^{x-2}|_A + g''_{xx}(A) = 5, \quad f''_{xy}(A) = 1 + g''_{xy}(A) = 3,$$
$$f''_{yy}(A) = [3\cos y + \operatorname{sen} y]_A + g''_{yy}(A) = 5.$$

Como $f''_{xx}(A) = 5 > 0$ y $\begin{vmatrix} f''_{xx}(A) & f''_{xy}(A) \\ f''_{yx}(A) & f''_{yy}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16 > 0$, por el criterio de las segundas derivadas se produce en el punto A un mínimo local estricto, cuyo valor es

$$f(A) = (-3e^{x-2} - 3\cos y + xy - \operatorname{sen} y)_A + g(A) = -16.$$

Cómo encarar un examen

Además de llegar a las 8:30 en vez de a las 9:00 para evitar riesgos, y de traer las hojas sin flecos con nombre, apellido y padrón para maximizar tu tiempo de examen, mirá este video que aumenta tu probabilidad de aprobar con una estrategia básica que no solo servirá para Análisis Matemático II sino también para otras materias.

?

Ver video