Segundo parcial

Análisis Matemático II

FIUBA

Segundo parcial

Contenido del examen

FIUBA

Ejercicio 1.

Integrales dobles. Masa de una placa plana.

Ejercicio 2.

Teorema de Green. Área encerrada por una curva.

Ejercicio 3.

Teorema de Stokes. Circulación de un campo vectorial a lo largo de una curva.

Ejercicio 4.

Integrales triples. Volumen de un cuerpo.

Ejercicio 5.

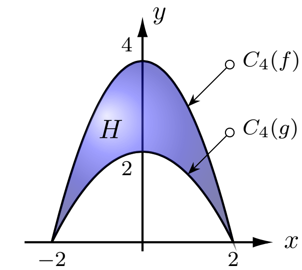
Teorema de Gauss. Flujo a través de una superficie.

1. Sea H la chapa plana limitada por las curvas de nivel 4 de los campos escalares $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=x^2+y$ y $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $g(x,y)=x^2+2y$. Calcular la masa de H si su densidad superficial es en cada punto proporcional a la distancia desde el punto al eje y.

♣ Por definición, es $C_4(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y=4\}, C_4(g)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+2y=4\}$, parábolas que delimitan la región acotada de la figura. La región H es simétrica respecto al eje y y su densidad $\delta(x,y)=k\mid x\mid, k>0$ cumple que $\delta(x,y)=\delta(-x,y)$, de modo que la masa total es el doble de la masa de la región $D=\{(x,y)\in H: x\geq 0\}$ esto es que $\text{masa}(H)=\iint_H \delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2\iint_D \delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$. Solo resta el cálculo:

$$2\iint_D \delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2k\int_0^2\int_{2-x^2/2}^{4-x^2} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2k\int_0^2 (3x^3/2-2x)\,\mathrm{d}x = 2k(3x^4/8.x^2)\mid_0^2 = 4k$$

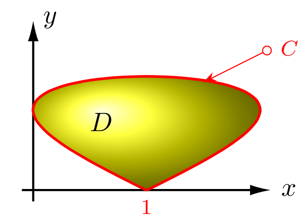
Observación. La masa de$H$ no es el doble de la de D porque el área de H sea el doble de la de D; si en este mismo ejercicio la densidad fuese proporcional a la distancia a la recta de ecuación $x+2=0$, ya no sería $\text{masa}(H)=2\,\text{masa}(D)$.



$\iint_H \delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 4k$

2. Sea D la región plana representada en la figura. Calcular su área, sabiendo que una parametrización de su curva frontera C es $\vec{\sigma}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ tal que $\vec{\sigma}(t)=(1-\text{sen}(2t),\text{sen}(t))$.

♣ Se quiere calcular $\text{área}(D)=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Para aprovechar la información de C, puede elegirse un campo vectorial $\vec{f}=(P,Q)$ que sea C^1 en un abierto que contenga al compacto D y su frontera suave en casi todas partes ∂D^+ recorrida una vez dejando D en su interior, con la condición de que $Q_x(x,y)-P_y(x,y)=1$, pues en tal caso, al aplicarse el teorema de Green queda que $\text{área}(D)=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D(Q_x(x,y)-P_y(x,y))\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$. Una elección posible (no única, desde luego) que cumple lo anteriror es $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x,y)=(0,x)$; por otra parte, la parametrización dada en el enunciado solo pierde inyectividad y regularidad en un punto ($\vec{\sigma}(0)=\vec{\sigma}(\pi)=(1,0)$) y orienta C de modo que $C=\partial D^-$ (opuesto al anterior), así que poniendo todo junto es $\text{área}(D)=-\oint_C\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=-\int_0^\pi(0,1-\text{sen}(2t))\cdot(-2\cos(2t),\cos(t))\,\mathrm{d}t=-\int_0^\pi(\cos(t)-2\,\text{sen}(t)\cos^2(t))\,\mathrm{d}t=-(\text{sen}(t)+2\cos^3(t)/3)\mid_0^\pi=4/3$.

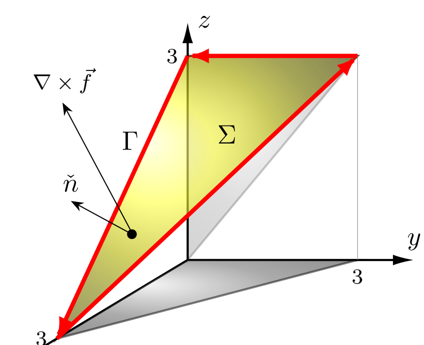


$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$

3. Dada la superficie Σ de ecuación $x+z=3$ con $0\leq y\leq z, x\geq 0$ y el campo vectorial $\vec{f}\in C^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\vec{f}(x,y,z)=(g(x,z),x^2,2yz)$, calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva borde de Σ, e indicar gráficamente la orientación adoptada.

♣ Llamando Γ a la curva borde de Σ, con las orientaciones indicadas en la figura y siendo $\vec{f}\in C^1(\mathbb{R}^3)$, es aplicable el teorema de Stokes (enunciarlo y detallar aquí el cumplimiento de sus hipótesis en este ejercicio), $\oint_\Gamma\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint_\Sigma\nabla\times\vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma$. Una parametrización regular e inyectiva de Σ es $\vec{\sigma}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(y,z)=(3-z,y,z)$, siendo $D=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2: 0\leq z\leq 3, 0\leq y\leq z\}$, con producto vectorial fundamental $\vec{n}(y,z)=\vec{\sigma}_y(y,z)\times\vec{\sigma}_z(y,z)=(1,0,1)$, que orienta la superficie como en la figura. Restan los cálculos: $\iint_\Sigma\nabla\times\vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=\iint_D\nabla\times\vec{f}(3-z,y,z))\cdot\vec{n}(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_D(2z,g_z(3-z,z),6-2z)\cdot(1,0,1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iint_D 6\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Finalmente, la siguiente expresión da la circulación pedida.

$$\oint_\Gamma\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint_\Sigma\nabla\times\vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=\iint_D 6\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^3\int_0^z 6\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^3 6z\,\mathrm{d}z=(3z^2)\mid_0^3=27$$



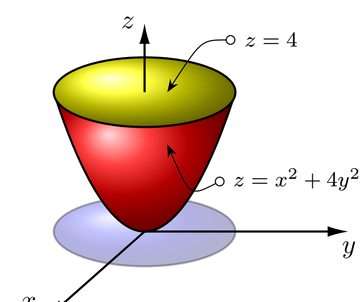
$\oint_\Gamma\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint_\Sigma\nabla\times\vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=27$

4. El campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z)=(2x,8y,-1)$ admite una función potencial $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ que cumple $\Phi(0,0,1)=2$. Calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie cuyos puntos tienen potencial igual a 3 y el plano de ecuación $z=4$.

♣ Es inmediato que $\vec{f}=\nabla\Phi$ para $\Phi(x,y,z)=x^2+4y^2-z+c$, cualquiera sea $c\in\mathbb{R}$ (para un campo $\vec{f}(x,y,z)=(f_1(x),f_2(y),f_3(z))$ una cualquier función potencial es $\Phi(x,y,z)=F_1(x)+F_2(y)+F_3(z)+c$ siendo $F_k'=f_k, k=1,2,3$). Imponiendo la condición $\Phi(0,0,1)=2$ resulta $c=3$, es decir que $\Phi(x,y,z)=x^2+4y^2-z+3$ y entonces $C_3(\Phi)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+4y^2-z+3=3\}$, esto es $C_3(\Phi)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=x^2+4y^2\}$. Se pide el volumen de $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+4y^2\leq z\leq 4\}$; escogiendo las coordenadas $x=2r\cos(\theta), y=r\,\text{sen}(\theta), z$ con jacobiano $J(r,\theta,z)=2r$, solo resta el cálculo:

$$\iiint_M \mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{4r^2}^4 2r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=4\pi\int_0^1(4r-4r^3)\,\mathrm{d}r=4\pi(2r^2-r^4)\mid_0^1=4\pi$$

.

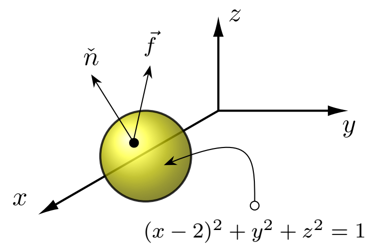


$\text{Vol}(M)=\iiint_M\,\mathrm{d}V=4\pi$

5. El campo vectorial $\vec{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z) = (xg(x), z^2 - 2xy, xy)$ es C^1 en todo punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $x > 0$. Hallar g tal que $g(1) = 3$ y el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $(x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ resulte numéricamente igual al volumen del cuerpo, indicando gráficamente la orientación adoptada para la superficie.

♣ El compacto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ (bola unitaria centrada en $(2,0,0)$) y su frontera suave $\Sigma = \partial(M)^+$ (esfera orientada con normal saliente) se hallan incluidos en el abierto donde el campo vectorial $\vec{f}$ es C^1, de modo que se aplica el teorema de la divergencia $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma = \iiint_M \operatorname{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V$. Si se escoge $g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^+)$ tal que la divergencia de $\vec{f}$ tome el valor 1, se cumplirá que $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma = \iiint_M \mathrm{d}V = \mathrm{Vol}(M)$. De $\operatorname{div}(\vec{f})(x,y,z) = (xg(x))' - 2x = 1$ resulta $(xg(x))' = 1 + 2x$ de donde $xg(x) = x + x^2 + c$, e imponiendo la condición $g(1) = 3$ resulta $c = 3$, de manera que queda la función $g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 1 + x + 1/x$, que efectivamente es $C^1(\mathbb{R}^+)$, y satisface lo pedido (el valor del flujo resultará entonces $4\pi/3$).

$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma = \iiint_M \mathrm{d}V = 4\pi/3$



♠ **Bonus** (para aprender más).

(a) El teorema de la divergencia en su forma cartesiana aparece históricamente asociado a tres nombres: Green (1828, elasticidad), Gauss (1813 atracción) y Ostrogradskii (1826). The first person to state and prove the divergence theorem...was Ostrogradskii. His method of proof was, quite similar to an approach used used by Gauss in his work of 1813... and then in its vector form (1880-1901) by Heaviside and Gibbs. (Stolze, Charles. 1978, A history of the divergence theorem. Historia Mathematica, 437-442). Nota: algunas otras trasliteraciones del nombre de autor son Ostrogradsky, Ostrogradski.

(b) En (3), puede ser un buen ejercicio efectuar una parametrización distinta a la empleada en la resolución, por ejemplo una que transforme el triángulo $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x\}$ en la superficie Σ y resolverlo con ella.

(c) En el ejercicio (5), la función g obtenida podría servir para cumplir el enunciado cualquiera sea el compacto incluido en el recinto establecido, no solamente para la bola. Ahora, para *esa* bola, se pueden hallar otras infinitas funciones g que satisfacen el enunciado; es un buen ejercicio hallar una (distinta a la obtenida).

Segundo parcial

Contenido del examen

FIUBA

Ejercicio 1.

Integrales curvilíneas. Campos de gradientes.

Ejercicio 2.

Integrales de superficie. Parametrización de la superficie.

Ejercicio 3.

Ecuaciones diferenciales. Líneas de campo.

Ejercicio 4.

Teorema de Gauss. Flujo a través de una superficie abierta.

Ejercicio 5.

Integrales triples. Masa de un cuerpo.

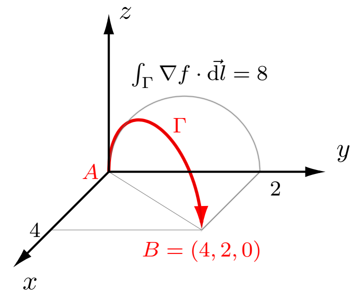
1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ y la curva Γ definida por las ecuaciones $y^2 + z^2 = 2y, x = 2y$. Calcular la circulación del ∇f a lo largo de Γ en sus puntos con coordenada $z \geq 0$, indicando claramente qué puntos se escogen como inicial y final del recorrido.

♣ Una vez graficada y orientada la curva Γ, el ejercicio se reduce a una línea:

$$\int_\Gamma \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{l} = f(B) - f(A) = 8 - 0 = 8$$

La expresión anterior resulta de que, siendo $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de Γ con $A = \vec{\sigma}(a), B = \vec{\sigma}(b)$, considerando la diferenciabilidad de f, la definición de integral curvilínea, la regla de la cadena para la composición $f \circ \vec{\sigma}$ y la regla de Barrow, es:

$$\int_\Gamma \nabla f \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \nabla f(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [f(\vec{\sigma}(t))]'\,\mathrm{d}t = f(\vec{\sigma}(b)) - f(\vec{\sigma}(a)) = f(B) - f(A)$$

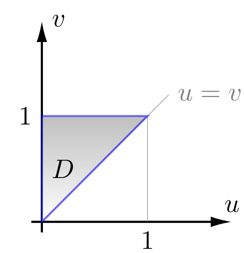


2. En el espacio xyz la superficie Σ tiene ecuación vectorial $(x, y, z) = (v - u, u + v, 2u + v^2)$ con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Calcular el área del trozo de Σ cuyos puntos cumplen con $x + y \leq 2, 0 \leq x \leq y$.

♣ La superficie es $\Sigma = \vec{\sigma}(D)$, siendo $\vec{\sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(u, v) = (v - u, u + v, 2u + v^2)$, con $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq v\}$. El recinto D se obtiene observando que $x + y = 2v \leq 2, y - x = 2u \geq 0, x = v - u \geq 0$, y como $\vec{\sigma}$ es una parametrización regular e inyectiva de Σ, se sabe que $\text{área}(\Sigma) = \iint_\Sigma \mathrm{d}\Sigma = \iint_D \parallel \vec{n}(u, v) \parallel \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, siendo $\vec{n}(u, v) = \vec{\sigma}_u(u, v) \times \vec{\sigma}_v(u, v))$ el producto vectorial fundamental $\vec{n}(u, v) = (-1, 1, 2) \times (1, 1, 2v) = 2(v - 1, v + 1, -1)$ cuya norma es $\parallel \vec{n}(u, v) \parallel = 2\sqrt{2v^2 + 3}$. Resulta finalmente que el área de la superficie Σ es:

$$\iint_D \parallel \vec{n}(u, v) \parallel \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^v 2\sqrt{2v^2 + 3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^1 2v\sqrt{2v^2 + 3}\,\mathrm{d}v = (2v^2+3)^{3/2}/3\,|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{3}$$

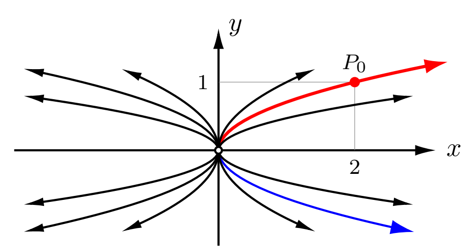
.



$0 \leq v \leq 1, 0 \leq u \leq v$

3. Dado el campo vectorial $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x, y) = (2x, y)$, hallar una ecuación para la línea de campo que pasa por $P_0 = (2, 1)$, graficarla e indicar su orientación en ese punto.

♣ Por definición de línea de campo, puede responderse de inmediato que un vector tangente en P_0 es el vector $\vec{f}(P_0) = (4, 1)$. Una línea de campo para $\vec{f}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ debe satisfacer la ecuación diferencial $q(x, y)\,\mathrm{d}x - p(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$, que en este caso es $y\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y = 0$, la que se satisface para cualquier curva de la familia de parábolas $x = cy^2, c \in \mathbb{R}$. La única curva de esa familia que pasa por P_0 debe satisfacer $2 = c(1)^2$, de donde $c = 2$, estando entonces contenida en la parábola de ecuación $x = 2y^2$ (observar que las líneas de campo no están definidas en $(0, 0)$, de modo que se trata del tramo de la parábola en que $y > 0$, tal como se indica en rojo en la figura, pero no el azul, en que es $y < 0$).

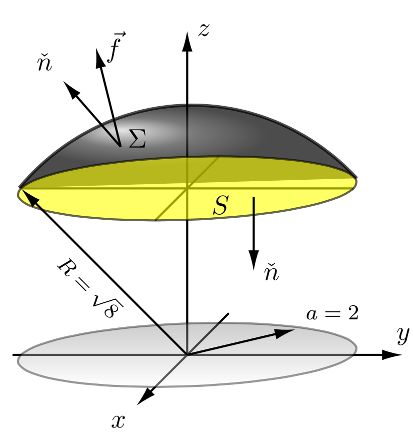


4. Calcular el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie Σ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ con $z \geq 2$, sabiendo que $\vec{f}(x, y, z) = (h(y), h(x), 4z)$ es $C^1(\mathbb{R}^3)$, indicando gráficamente la orientación adoptada para Σ.

♣ Definiendo el compacto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}\}$ de cúpula esférica Σ y base $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2, x^2 + y^2 \leq 4\}$ orientadas como en la figura, resulta que $\Sigma \cup S = \partial M^+$ es suave excepto en $\Sigma \cap S$ que es de área nula, y dada la diferenciabilidad de $\vec{f}$, se aplica el teorema de la divergencia como $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}\Sigma + \iint_S \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_M \mathrm{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V$. El cálculo de $\iint_S \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}S$ es inmediato observando que para cualquier $(x, y, z) \in S$ se tiene que $\vec{f}(x, y, z) \cdot \check{n} = (h(y), h(x), 4(2)) \cdot (0, 0, -1) = -8$, de modo que $\iint_S \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}S = -8 \iint_S \mathrm{d}S = -8\,\text{área}(S) = -8\pi(2)^2 = -32\pi$. Por otra parte, la divergencia del campo es constante (de valor 4) así que utilizando coordenadas cilíndricas queda:

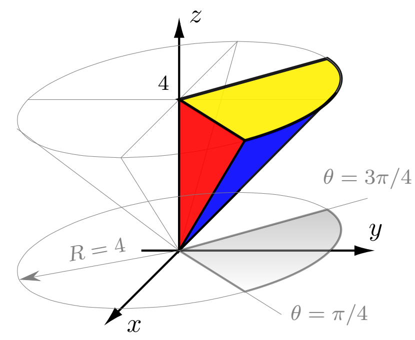
$$\iiint_M \mathrm{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V = 4\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r\,\mathrm{d}r \int_2^{\sqrt{8-r^2}} \mathrm{d}z = 8\pi \int_0^2 (\sqrt{8 - r^2} - 2)r\,\mathrm{d}r$$

y como $\int_0^2 (\sqrt{8 - r^2} - 2)r\,\mathrm{d}r = -[(8 - r^2)^{3/2}/3 + r^2]\,|_0^2 = (8^{3/2} - 4^{3/2})/3 - 4 = (16\sqrt{2} - 8)/3 - 4$ resulta que $\iiint_M \mathrm{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V = 8\pi(16\sqrt{2} - 8)/3 - 32\pi$, y como $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}\Sigma + \iint_S \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_M \mathrm{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V$, queda finalmente el flujo pedido: $\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}\Sigma = 8\pi(16\sqrt{2} - 8)/3$.



$\iint_\Sigma \vec{f} \cdot \check{n}\,\mathrm{d}\Sigma = 8\pi(16\sqrt{2} - 8)/3$

5. El cuerpo H definido por $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4, y \geq | x |$ tiene densidad $\delta(x, y, z) = kz$ con $k > 0$. Calcular la masa de H.



$\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4, 0 \leq r \leq 4, r \leq z \leq 4$

♣ La proyección de H sobre el plano xy es el sector circular de abertura $pi/2$ (grisado en la figura). El cuerpo tiene cuatro caras, una cara cónica (en azul en la figura) y tres caras planas; en la figura son visibles el plano de ecuación $z = 4$ (amarillo) y el plano de ecuación $y = x$ (rojo), en tanto que queda detrás en la perspectiva escogida el plano de ecuación $y = -x$ Se sabe que masa$(H) = \int_H \delta \, \mathrm{d}V$, cálculo para el cual son apropiadas las coordenadas cilíndricas (r, θ, z), tal como lo muestra la siguiente línea.

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^4 \int_r^4 \underbrace{kz}_{\delta} \underbrace{r \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}V} = \frac{k\pi}{4} \int_0^4 (16r^2 - r^3) \, \mathrm{d}r = \frac{k\pi}{4}(8r^2 - r^4/4) \,|_0^4 = 16k\pi$$

♠ **Bonus** (para aprender más).

(a) Si bien la resolución del ejercicio (1) es sencilla, pues no requiere sino determinar los puntos que son conectados por la curva, alternativamente podría practicarse el ejercicio de realizar el cálculo del gradiente de f y parametrizar el segmento AB (¡y no la curva Γ, ya que la circulación no dependerá de la trayectoria!). También es recomendable obtener la ecuación del cilindro proyectante sobre el plano xz y graficarlo, para visualizar la curva Γ como contenida también en ese cilindro.

(b) Una forma alternativa de resolver el ejercicio (2), sumamente engorrosa, consiste en obtener la acuación cartesiana de la superficie para luego calcular su área como la de una porción del gráfico del campo escalar que la define. Sin preocuparse por la eficiencia, es un buen ejercicio hacerlo, adquiriendo cierta sensibilidad para escoger los procedimientos ante casos de la misma clase.

(c) Al resolver la ecuación diferencial del ejercicio (3), $y \, \mathrm{d}x - 2x \, \mathrm{d}y = 0$, es imprescindible, cualquiera sea el método utilizado, que se seleccione *previamente* el cuadrante en el que se busca la solución (en el caso del ejercicio, el primero). Detallar esa resolución e indicar en qué parte de la misma debe necesariamente escogerse un cuadrante. En el mismo ejercicio, al determinar las trayectorias ortogonales a la familia de líneas de campo se obtienen elipses: obtenerlas y darle darle una interpretción física es un buen ejercicio adicional.

(d) En el ejercicio (4), la integral de la divergencia termina siendo proporcional al volumen de la lentejuela M. Se sugiere incluir este problema en una clase más amplia, el cálculo del volumen de la región del espacio interior a la esfera de radio R por encima del plano $z = h$ (con $0 \leq h \leq R$) y resolverlo, para encontrar el valor $\pi(2R^3 - 3R^2h + h^3)/3$.

(e) El ejercicio (5) corresponde al tema 2 de la fecha, cuando el resto corresponde al tema 1 (son completamente equivalentes, desde luego); se sugiere realizar el ejercicio adicional de calcular la posición G del centro de masa de H.

Segundo parcial

Contenido del examen

FIUBA

Ejercicio 1.

Integrales de superficie. Parametrización y área.

Ejercicio 2.

Teorema de Gauss. Flujo a través de una superficie.

Ejercicio 3.

Ecuaciones diferenciales lineales. Circulación.

Ejercicio 4.

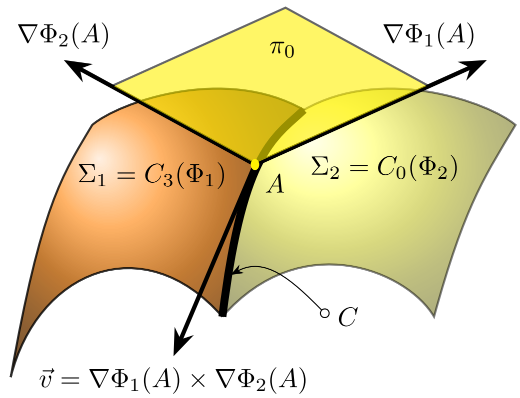
Integrales triples. Volumen de un cuerpo.

Ejercicio 5.

Integrales dobles. Coordenadas polares.

1. Sea π_0 el plano normal a la curva C definida por la intersección de las superficies $\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + ze^{yz-1} = 3\}, \Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + \ln(xy - z) - 2yz = 0\}$ en el punto $A = (2,1,1)$. Calcular el área del trozo de π cuya proyección sobre el plano xz es el rectángulo $D = [1,2] \times [2,4]$.

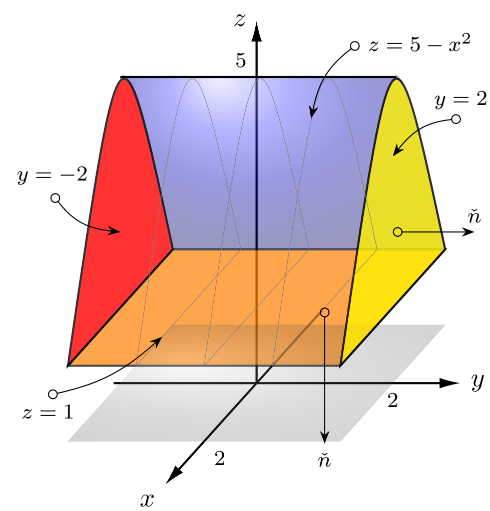
♣ Definiendo $\Phi_1(x,y,z) = x + ze^{yz-1}, \Phi_2(x,y,z) = xy + \ln(xy - z) - 2yz$ (diferenciables en un entorno de A) es $\Sigma_1 = C_3(\Phi_1), \Sigma_2 = C_0(\Phi_2)$, con $\nabla\Phi_1(x,y,z) = (1, z^2e^{yz-1}, (1+yz)e^{yz-1}), \nabla\Phi_2(x,y,z) = (y + y/(xy-z), x + x/(xy-z) - 2z, -1/(xy-z) - 2y)$, que evaluados en A resultan $\nabla\Phi_1(A) = (1,1,2), \nabla\Phi_2(A) = (2,2,-3)$, vectores normales a las respectivas superficies de nivel en ese punto. Como la curva C está contenida en ambas superficies, un vector $\vec{n}$ tangente en A debe ser normal tanto a $\nabla\Phi_1(A)$ como a $\nabla\Phi_2(A)$, de modo que $\vec{v} = \nabla\Phi_1(A) \times \nabla\Phi_2(A) = (-7,7,0)$ es un vector normal al plano π_0, y entonces también es normal al plano el múltiplo $\vec{n} = (1,-1,0)$. El plano tiene ecuación $\vec{n}\cdot(X - A) = 0$, esto es $x - y = 2$, por lo que es inmediata una parametrización regular e inyectiva $\vec{\sigma} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ al que $\vec{\sigma}(x,z) = (x, x-2, z)$, para la que $\vec{\sigma}_x(x,z) \times \vec{\sigma}_z(x,z) = (1,1,0) \times (0,0,1) = \vec{n}$. Llamando S a la región del plano π_0 que proyecta sobre D, se tiene que área$(S) = \iint_S \mathrm{d}S = \iint_D \parallel \vec{\sigma}_x(x,z) \times \vec{\sigma}_z(x,z) \parallel \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \iint_D \parallel \vec{n} \parallel \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ de modo que solo resta este cálculo:



$$\text{área}(S) = \iint_D \parallel \vec{n} \parallel \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \sqrt{2}\,\text{área}(D) = 2\sqrt{2}$$

2. Dado $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z) = (x + \operatorname{sen}(y^2z), y + \cos(x^2+z), 2z)$, calcular el flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie frontera Σ del cuerpo definido por $1 \le z \le 5 - x^2, |\,y\,| \le 2$, indicando gráficamente la orientación adoptada para Σ.

♣ El compacto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le z \le 5 - x^2, |\,y\,| \le 2\}$, una bóveda de planta cuadrada de tres caras planas (amarilla, roja y naranja), con cubierta cilíndrica (azul cuyo frente se ha dejado transparente) y su frontera suave $\Sigma = \partial M^+$ (orientada con normal saliente, como se señala en la figura) en casi todas partes (solo deja de serlo en las parábolas de los tímpanos y las aristas del cuadrado base, todas curvas de área nula) se hallan incluidos en el dominio $(\mathbb{R}^3)$ donde el campo vectorial $\vec{f}$ es C^1 (de hecho es C^∞), de modo que se aplica el teorema de la divergencia $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma = \iiint_M \operatorname{div}(\vec{f})\,\mathrm{d}V$. Como además es $\operatorname{div}(\vec{f})(x,y,z) = 1 + 1 + 2 = 4$, solo resta el cálculo:

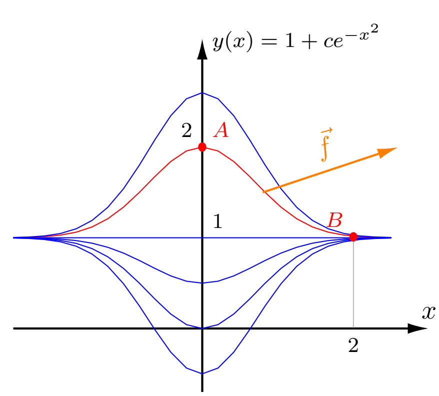


$$\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma = 4\iiint_M \mathrm{d}V = 4\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{1}^{5-x^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 16\int_{-2}^{2}(4 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{512}{3}$$

3. Dado $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{f}(x,y) = (2x, y-1)$. Calcular la circulación de $\vec{f}$ desde $A = (0,2)$ hasta $B = (2, y_1)$ a lo largo de la curva integral de $y' + 2xy = 2x$.

♣ Es inmediato que $\vec{f} = \nabla\Phi$ con $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi(x,y) = x^2 + (y-1)^2/2$ (pues cualquier campo continuo en un simplemente conexo $\vec{f}(x,y) = (f_1(x), f_2(y))$ admite trivialmente una función potencial $\Phi(x,y) = F_1(x) + F_2(y)$ siendo F_1, F_2 sendas primitivas de f_1, f_2). De esta manera, la circulación será sencillamente $\int_\Gamma \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \Phi(B) - \Phi(A)$, cualquiera sea la trayectoria Γ que conecte A con B. Se recuerda que la expresión anterior resulta de que, siendo $\vec{\sigma} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de Γ con $A = \vec{\sigma}(a), B = \vec{\sigma}(b)$, considerando la diferenciabilidad de Φ, la definición de integral curvilínea, la regla de la cadena para la composición $\Phi \circ \vec{\sigma}$ y la regla de Barrow: $\int_\Gamma \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_\Gamma \nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \nabla\Phi(\vec{\sigma}(t))\cdot\vec{\sigma}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b [\Phi(\vec{\sigma}(t))]'\,\mathrm{d}t = \Phi(\vec{\sigma}(b)) - \Phi(\vec{\sigma}(a)) = \Phi(B) - \Phi(A)$. La ecuación diferencial es de variables separables y también lineal de primer orden. Considerada como lineal, admite un factor integrante $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mu(x) = e^{\int(2x)\,\mathrm{d}x} = e^{x^2}$, de modo que equivale ($\mu$ es nunca nula) a $e^{x^2}y'(x) + 2xe^{x^2}y(x) = 2xe^{x^2}$, esto es $[e^{x^2}y(x)]' = 2xe^{x^2}$ de donde $e^{x^2}y(x) = e^{x^2} + c$. La solución general es $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y(x) = 1 + ce^{-x^2}$, quedando con la condición inicial que $y(x) = 1 + e^{-x^2}$, así que $B = (2, 1 + e^{-4})$. Finalmente, el cálculo:

curvas integrales de $y' + 2xy = 2x$

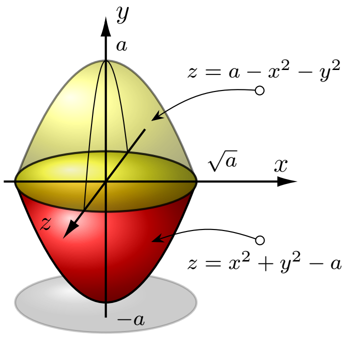


$\int_\Gamma \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{2}(7 + e^{-8})$

$$\int_\Gamma \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \Phi(B) - \Phi(A) = 4 + \frac{1}{2}e^{-8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(7 + e^{-8})$$

4. Sea el cuerpo $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 - a \leq y \leq a - x^2 - z^2\}$ con $a > 0$ constante. Calcular el valor de a para el cual el volumen de H es igual a 9π.

♣ El cuerpo H está comprendido entre dos paraboloides elípticos (amarillo y rojo) enfrentados que se intersecan en la circunferencia centrada en el origen de radio $\sqrt{a}$ ubicada en el plano de ecuación $y = 0$. Utilizando coordenadas cilíndricas (r, θ, y) tales que $x = r\cos(\theta), z = r\,\mathrm{sen}(\theta)$ se quiere hallar $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathrm{Vol}(H) = \iiint_H \mathrm{d}V = 9\pi$.

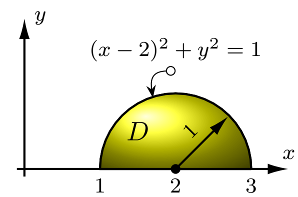


$$\iiint_H \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a}}\int_{r^2-a}^{a-r^2} r\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi\int_0^{\sqrt{a}}(4ar - 4r^3)\,\mathrm{d}r = \pi(2ar^2 - r^4)\,|_0^{\sqrt{a}} = \pi a^2$$

Finalmente, de $\pi a^2 = 9\pi, a \in \mathbb{R}^+$ resulta que $a = 3$ es el único que satisface la condición.

5. Dada la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4x - 3, y \geq 0\}$ y la función $f(x, y) = xy + h(y/x)$ con $h \in C^1(\mathbb{R})$, calcular $\iint_D \parallel \vec{X} \parallel f'(\vec{X}, \check{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, donde $f'(\vec{X}, \check{X})$ con $\vec{X} = (x, y)$ es la derivada direccional de f en $\vec{X}$ según $\check{X}$

♣ El campo escalar es $C^1(D)$, puesto que $\forall(x, y) \in D : y/x \in \mathbb{R}$, y se sabe que $h \in C^1(\mathbb{R})$, de modo que f es diferenciable (todo campo de clase C^1 es diferenciable) y entonces la derivada direccional puede obtenerse mediante el producto escalar $f'(\vec{X}, \check{X}) = \nabla f \cdot \check{X}$, y entonces el integrando es $\parallel \vec{X} \parallel f'(\vec{X}, \check{X}) = \parallel \vec{X} \parallel \nabla f \cdot \vec{X}/ \parallel \vec{X} \parallel = \nabla f \cdot \vec{X}$. Ahora, aplicando la regla de la cadena queda la siguiente expresión:



$$\nabla f(x, y) \cdot (x, y) = (y - \frac{y}{x^2}h'(y/x), x + \frac{1}{x}h'(y/x)) \cdot (x, y) = 2xy$$

Siendo el recinto de integración el semicírculo centrado en $(2, 0)$ de radio 1 ubicado en el primer cuadrante, conviene el sistema de coordenadas (r, θ) con el polo en $(2, 0)$, esto es con $x = 2+r\cos(\theta), y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$. Así queda $\iint_D \parallel \vec{X} \parallel f'(\vec{X}, \check{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D 2xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi}\int_0^1 2(2 + r\cos(\theta))r\,\mathrm{sen}(\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\int_0^1(4r^2\,\mathrm{sen}(\theta) + 2r^3\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}(4\,\mathrm{sen}(\theta)/3 + \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)/2)\,\mathrm{d}\theta$. La última integral es: $\int_0^{\pi}(4\,\mathrm{sen}(\theta)/3 + \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)/2)\,\mathrm{d}\theta = (-4\cos(\theta)/3 + \mathrm{sen}^2(\theta)/4)\,|_0^{\pi} = 8/3$. Queda entonces que la integral pedida es $\iint_D \parallel \vec{X} \parallel f'(\vec{X}, \check{X})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 8/3$.

♠ **Bonus** (para aprender más).

(a) El ejercicio (1) se simplifica mucho recordando de la geometría elemental que si S es una región del plano normal a $\check{n} = (n_x, n_y, n_z)$ entonces el área de sus proyecciones sobre los planos coordenados es $\text{área}(D_{yz}) = |n_x|\,\text{área}(S)$, $\text{área}(D_{xz}) = |n_y|\,\text{área}(S)$, $\text{área}(D_{xy}) = |n_z|\,\text{área}(S)$. Con $\check{n} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ ya resulta $\text{área}(S) = \text{área}(D_{xz})/|n_y| = \sqrt{2}\,\text{área}(D_{xz}) = 2\sqrt{2}$. ¿Cuál es el área de la proyección de S sobre los otros planos coordenados? ¿Cuál es la región D_{xy} y cuál la región D_{yz}?

(b) La locución *en casi todas partes* que se lee en la resolución del ejercicio (2) se abrevia como *c.t.p.*; en inglés como *a.e.*, en francés como *p.p.* (presque partout). If a certain proposition concerning the points of a measure space is true for every point, with the exception at most of a set of points which form a measurable set of measure zero, it is customary to say that the proposition is true for almost every point, or that it is true almost everywhere. The phrase "almost everywhere" is used so frequently that it is convenient to introduce the abbreviation a.e.(Halmos, Paul. 1974. Measure Theory, p. 86. New York: Springer).

(c) El ejercicio (3) contiene una ecuación diferencial lineal de primer orden. En Apostol, Tom. 2001. Calculus, Volumen I, p.379. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Barcelona: Reverté, se encuentra el teorema 8.3: Supongamos que P y Q son continuas en un intervalo abierto I. Elijamos un punto a cualquiera en I y sea b cualquier número real. Existe entonces una función y una sola $y = f(x)$ que satisface el problema de valores iniciales $y' + P(x)y = Q(x)$, con $f(a) = b$ en el intervalo I. Esta función viene dada por $f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)}\int_a^x Q(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$, en donde $A(x) = \int_a^x P(t)\,\mathrm{d}t$. En la resolución se ha seguido la estrategia de prueba de este teorema.

(d) Considerar en el ejercicio (3) la ecuación como de variables separables ($y' = 2x(y-1)$) y detallar cuidadosamente todo lo que deba decirse para hallar la misma familia obtenida en esta resolución considerada como lineal de primer orden.

(e) Cambiando en el ejercicio (4) a $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + |z| - a \leq y \leq a - |x| - |z|\}$ rehacer los cálculos (¡asegurarse de los límites de integración!) para obtener $a = 3\sqrt[3]{\pi/4}$.

(f) En el ejercicio (5) se aprovecha la diferenciabilidad del campo para el cálculo de la derivada direccional, resultado que se encuentra en cualquier texto de cálculo, por ejemplo en Canuto y Tabacco, 2010. Mathematical Analysis II, p. 163, Milano: Springer, se presenta así: Proposition 5. 9. If a function f is differentiable at $\vec{x}$, it admits at $\vec{x}$ directional derivatives along any vector $\vec{v}$, and moreover: $\partial f/\partial\vec{v}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{v}$. Algunos autores parten de una condición más fuerte que la diferenciabilidad (y entonces presentan un resultado más débil), tal como la continuidad de las derivadas parciales; así lo muestra el siguiente: Theorem. Suppose $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is C^1 on an open ball containing the point $\vec{c}$. Then for any unit vector $\vec{u}$, $D_{\vec{u}}f(\vec{c})$ exists and $D_{\vec{u}}f(\vec{c}) = \nabla f(\vec{c})\cdot\vec{u}$ (Sloughter 2018. The Calculus of Functions of Several Variables, p.163. New York: Furman University Press).

Segundo parcial

Contenido del examen

FIUBA

Ejercicio 1.

Teorema de Stokes. Orientación de curvas y superficies.

Ejercicio 2.

Integrales de superficie. Parametrización. Flujo.

Ejercicio 3.

Área de una superficie utilizando producto vectorial.

Ejercicio 4.

Ecuaciones diferenciales. Campos de gradientes.

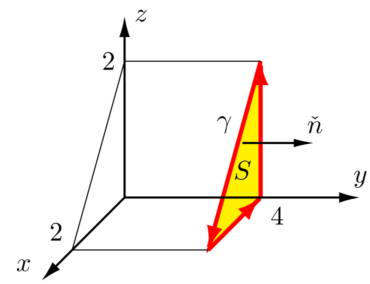
Ejercicio 5.

Ecuaciones diferenciales. Trayectorias ortogonales.

1. Sea $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z)=(yz,xz,\varphi(y,z))$ un campo $C^1(\mathbb{R}^3)$. Calcular la circulación de $\vec{f}$ a lo largo de la curva borde de la superficie de ecuación $y=4$ con $x+z\le 2, x\ge 0, z\ge 0$, indicando en un gráfico la orientación adoptada.

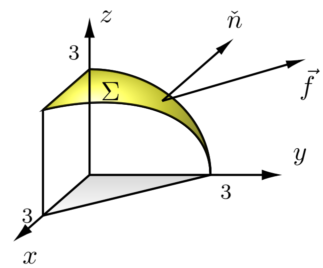
♣ Llamando S a la superficie del enunciado y γ a su curva borde, con las orientaciones indicadas en la figura y siendo $\vec{f}\in C^1(\mathbb{R}^3)$, es aplicable el teorema de Stokes (enunciarlo y detallar aquí el cumplimiento de sus hipótesis), $\oint_\gamma \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\iint_S \nabla\times\vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}S$. Ahora el cálculo: $\nabla\times\vec{f}(x,y,z)=(\varphi_y(y,z)-x,y,0)$ y como $\check{n}=(0,1,0)$ queda que para cualquier $(x,y,z)\in S$ (observar que allí $y=4$) es $\nabla\times\vec{f}(x,y,z)\cdot\check{n}=4$. Finalmente, la siguiente expresión da la circulación pedida.

$$\oint_\gamma \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint_S \nabla\times\vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}S=\iint_S 4\,\mathrm{d}S=4\,\text{área}(S)=8$$



2. Sea $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{f}(x,y,z)=(xz,yz,z^2)$; calcular el flujo del campo $\vec{f}$ a través de la superficie Σ de ecuación $y^2+z^2=9$ con $x+y\le 3$ en el primer octante, indicando en un gráfico la orientación adoptada para Σ.

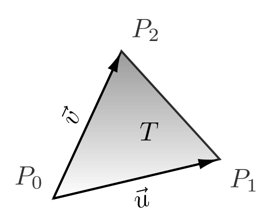
♣ Una parametrización regular e inyectiva de Σ es $\vec{\sigma}:R\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(x,\theta)=(x,3\sin(\theta),3\cos(\theta))$, siendo $R=\{(x,\theta)\in\mathbb{R}^2: 0\le\theta\le\pi/2, 0\le x\le 3-3\sin(\theta)\}$, con producto vectorial fundamental $\vec{n}(x,\theta)=\vec{\sigma}_x(x,\theta)\times\vec{\sigma}_\theta(x,\theta)=(0,3\sin(\theta),3\cos(\theta))$, que orienta la superficie como en la figura. Luego $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=\iint_R \vec{f}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta$, esto es $\int_0^{\pi/2}\int_0^{3-3\sin(\theta)}(3x\cos(\theta),9\sin(\theta)\cos(\theta),9\cos^2(\theta))\cdot(0,3\sin(\theta),3\cos(\theta))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\theta=81\int_0^{\pi/2}(\cos(\theta)(1-\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta=81(\sin(\theta)-\sin^2(\theta)/2)\mid_0^{\pi/2}=81/2$. Observar que el recinto de integración en el cálculo es R , y no $\Sigma=\vec{\sigma}(R)$, situación corriente en integrales de superficie.



Observación. Otra parametrización es $\vec{\sigma}:R\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $\vec{\sigma}(x,y)=(x,y,\sqrt{9-y^2})$, siendo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 3, 0\le y\le 3-x\}$, con producto vectorial fundamental $\vec{n}(x,y)=\vec{\sigma}_x(x,y)\times\vec{\sigma}_y(x,y)=(0,y/\sqrt{9-y^2},1)$ (¡cuidado, no existe en el punto $P_0=(0,3)$!); sin embargo, para todos los puntos de $R-\{P_0\}$ queda $(\vec{f}\cdot\vec{n})(x,y)=y^2+9-y^2=9$, que es integrable en R y entonces $\iint_\Sigma \vec{f}\cdot\check{n}\,\mathrm{d}\Sigma=\iint_R \vec{f}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=9\iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=9\,\text{área}(R)=9(9/2)=81/2$. En esta parametrización el recinto R (un triángulo) es de más sencilla visualización que el correspondiente a la anterior, es inyectiva en R y aunque no es regular en todo R, el integrando $\vec{f}\cdot\vec{n}$ solo tiene una discontinuidad evitable en P_0 (pues $\exists\lim_{P\to P_0}(\vec{f}\cdot\vec{n})(P)=9$), lo que permite el cálculo anterior.

3. La superficie de ecuación $z=x^2+6xy^2-6x+10$ tiene tres puntos donde el plano tangente es paralelo al plano xy. Calcular el área del triángulo que los tiene por vértices.

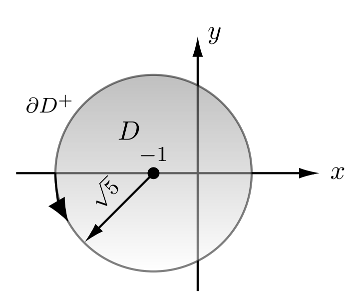
♣ Definiendo el campo escalar $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $f(x,y)=x^2+6xy^2-6x+10$, la superficie del enunciado es, por definición, su gráfica, y como f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, en cada punto el plano tangente es paralelo al plano xy sii $\nabla f(x,y)=(0,0)$, esto es el sistema de dos ecuaciones ecuaciones: $2x+6y^2-6=0, 12xy=0$, que efectivamente tiene tres soluciones $A_0=(0,1), A_1=(0,-1), A_2=(3,0)$, a los que corresponden en la superfice los puntos $P_0=(0,-1,10), P_1=(0,1,10), P_2=(3,0,1)$ (la tercera componente es $z=f(x,y)$). Si se llama T al triángulo que los tiene por vértices y haciendo $\vec{u}=P_1-P_0=(0,2,0), \vec{v}=P_2-P_0=(3,1,-9)$, queda que área$(T)=\frac{1}{2}\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\frac{1}{2}\|(-18,0,-6)\|=3\|(-3,0,-1)\|=3\sqrt{10}$.



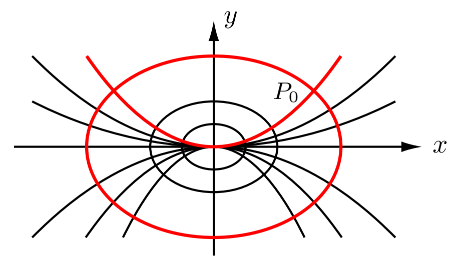
4. Dado $\vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo vectorial $C^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\vec{f}(x,y)=(2yg(x),xg(x))$, hallar una función escalar g tal que $g(1)=3$ y que $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$, siendo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+2x+y^2\le 4\}$.

♣ Como $x^2+2x+y^2=4$ equivale a $(x+1)^2+y^2=5$, la curva ∂D^+ es la circunferencia centrada en $(-1,0)$ de radio $\sqrt{5}$, orientada como lo indica la figura. Siendo $\vec{f}=(P,Q)$ un campo C^1 en el abierto simplemente conexo $\mathbb{R}^2$, una condición suficiente para la anulación de la integral curvilínea $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ es que $P_y(x,y)=2g(x)=g(x)+xg'(x)=Q_x(x,y)$, esto es que la función escalar g (que es $C^1(\mathbb{R})$ por ser $\vec{f}\in C^1(\mathbb{R}^2)$) satisfaga la ecuación diferencial de variables separables $xg'(x)-g(x)=0$ cuya solución general es $g(x)=cx$, debiendo ser $c=3$ para satisfacer la condición inicial $g(1)=3$. De esta manera, la función escalar $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x$ asegura que $\oint_{\partial D^+}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$.

Observación. Para la función g hallada resulta el campo de gradientes $\vec{f}=\nabla\varphi$ siendo una función potencial $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, \varphi(x,y)=3x^2y$. El campo conservativo $\vec{f}$ anula la circulación sobre *cualquier* lazo (no solo sobre ∂D^+). Dicho de otro modo, la resolución se mantendría aun variando D, con la sola condición de que su frontera fuera un lazo, por ejemplo $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|+|y|\le 1\}$.



5. Dada la familia de curvas planas de ecuación $x^2 + cy = 0$, hallar una ecuación para la curva de la familia ortogonal que pasa por el punto $P_0 = (2, 2)$.



♣ Eliminando c entre las dos ecuaciones $x^2 + cy = 0, 2x + cy' = 0$ se obtiene la ecuación diferencial de la familia de parábolas dada: $2y - xy' = 0$; ahora, la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales (considerando la condición de ortogonalidad $yy' = -1$) es $x + 2yy' = 0$, o escrita de otro modo $x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0$, esto es que $\mathrm{d}\,(x^2/2 + y^2) = 0$, de donde resulta que la familia de las trayectorias ortogonales debe satisfacer $x^2/2+y^2 = k$, que para cada $k > 0$ es una elipse centrada en el origen de coordenas con semiejes $a = \sqrt{2k}, b = \sqrt{k}$. En particular, para la que pasa por P_0 es $k = 2^2/2 + 2^2 = 6$, siendo la elipse de ecuación $x^2/12 + y^2/6 = 1$, que interseca ortogonalmente a la parábola de ecuación $x^2 - 2y = 0$ en el punto $P_0 = (2, 2)$.

♠ **Bonus** (para aprender más).

(a) El teorema de Stokes del ejercicio 1: 'Stokes' Theorem (dates from about 1870) and was not proved by Stokes. In fact the original statement is in a letter from Sir William Thomson, later known as Lord Kelvin, to Stokes dated 1850. Stokes set the problem of proving it in an examination set for the top mathematics students at Cambridge in 1854, but we don't know if anyone proved it. Probably not. Kelvin himself proved it. Maxwell proved it in Electricity and Magnetism. Stokes was rather lucky to have his name perpetuated by a theorem he may never have proved' (Alder 2003, *Multivariate Calculus*, Melbourne, 95).

(b) La circulación del ejercicio (1) resultó positiva (de valor 8); dar, de ser posible, una función φ, tal que la circulación sobre el tramo vertical de γ sea negativa (y de valor -8).

(c) Si en el ejercicio (2) el campo fuera $\vec{f}(x, y, z) = (1, 1, 1)$, ¿podría utilizarse la segunda parametrización de la superficie Σ? ¿convendría hacerlo? Esta cuestión evidencia que unas parametrizaciones podrían conducir a integrales múltiples impropias que, de hecho, no están en la naturaleza del problema en sí mismo. Puede leerse del tema en § 87. Integrales múltiples impropias (Rey Pastor, Calleja y Trejo 1968. *Análisis Matemático II*. Buenos Aires: Kapelusz, 466).

(d) El ejercicio (3) puede también hacerse con un procedimiento mucho más engorroso: definir una parametrización regular inyectiva $\vec{\sigma} : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T = \vec{\sigma}(R)$ para calcular luego área$(T) = \iint_T \mathrm{d}T = \iint_R \parallel \vec{\sigma}_x(x, y) \times \vec{\sigma}_y(x, y) \parallel \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Vale la pena hacerlo, para mejor apreciar la sencillez de la geometría vectorial utilizada para resolver el problema en el texto principal (puede leerse una introducción inmediata en el capítulo I del texto: Santaló 1993. *Vectores y tensores con sus aplicaciones*. Buenos Aires: Eudeba).

(e) El ejercicio (4) puede verse como un caso de una clase más amplia de ejercicios en los que debe ajustarse una función para satisfacer un valor de la circulación en la frontera de un compacto, esto es dado $k \in \mathbb{R}$, hallar g tal que$\oint_{\partial D^+} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = k$ (en el ejercicio resuelto era $k = 0$). Mostrar que en tal caso bastaría (Teorema de Green mediante) hallar una g tal que $Q_x(x, y) - P_(x, y) = k/($área$(D)$.

(f) El ejercicio (5) puede verse como un caso particular de uno más general, que consiste en hallar la familia de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas planas de ecuación $x^n + cy = 0$, con $n \in \mathbb{N}$ (en el ejercicio planteado es $n = 2$). Reproduciendo los argumentos de la resolución, obtener la familia de elipses de ecuación $x^2/n + y^2 = k$, siendo en particular, para la que pasa por un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, $k_0 = x_0^2/n + y_0^2$.