

☐

I'm not robot


reCAPTCHA

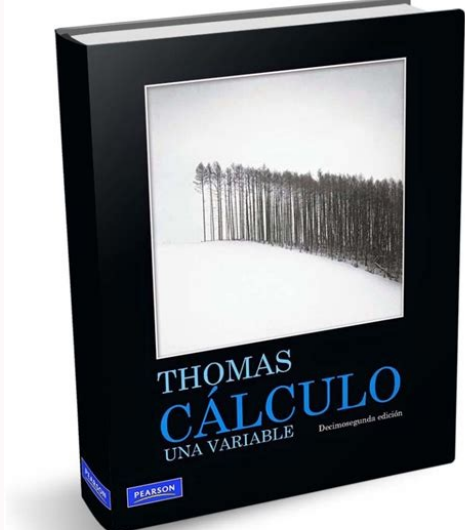
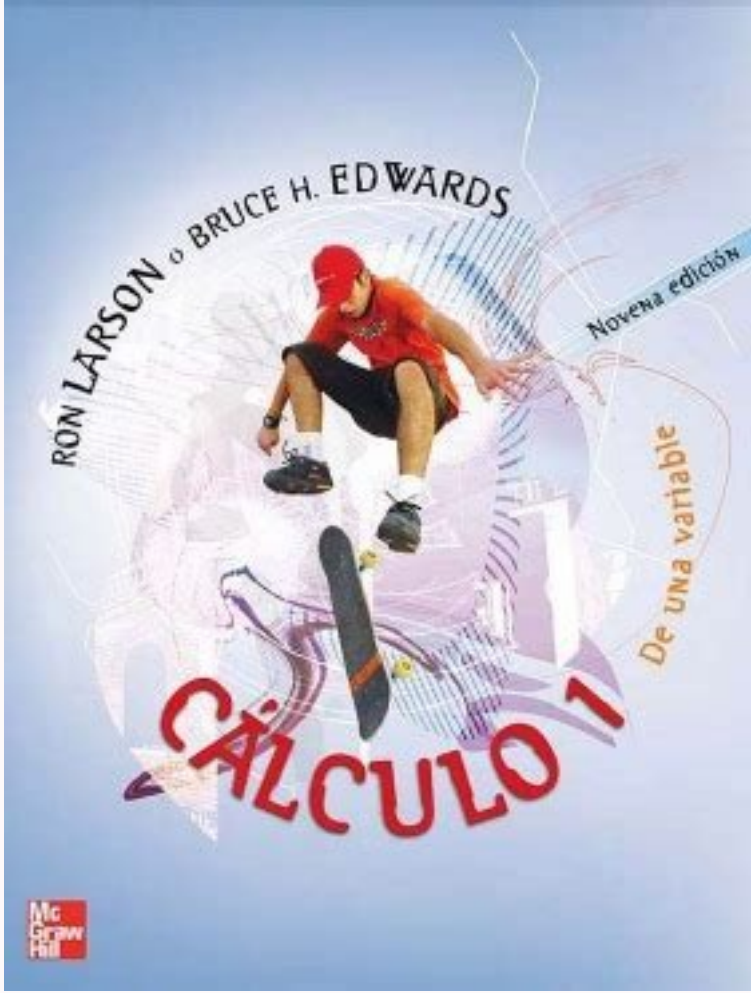
Continue

Solucionario thomas calculo varias variables 12 edicion pdf de las

Este texto está diseñado para el componente Multivariable o de Varias Variables, para uno de tres semestres o cuatro trimestres del curso de cálculo (en las escuelas de matemáticas, ingeniería, y ciencias). El Cálculo no ha cambiado, pero los estudiantes sí lo hacen. Los estudiantes de hoy se han planteado en la inmediatez y el deseo de relevancia, y viven el cálculo con diferentes antecedentes matemáticos. Cálculo de Thoma's, duodécima edición, ayuda a los estudiantes a generalizar y aplicar las ideas clave de cálculo a través de explicaciones claras y precisas, con un diseño limpio, con ejemplos cuidadosamente escogidos, y una serie de ejercicios superiores. Thomas ofrece la combinación adecuada de ejercicios básicos, conceptuales y desafiantes, junto con aplicaciones significativas. Entre las características más significativas de esta revisión, se tienen más ejemplos, más ejercicios de nivel medio, más figuras, y un mejor flujo conceptual. Capítulo 10 Secciones cónicas y coordenadas polares Capítulo 11 Sucesiones y series infinitas Capítulo 12 Los vectores y la geometría del espacio Capítulo 13 Funciones con valores vectoriales y movimiento en el espacio Capítulo 14 Derivadas parciales Capítulo 15 Integrales múltiples Capítulo 16 Integración en Campos Vectoriales.

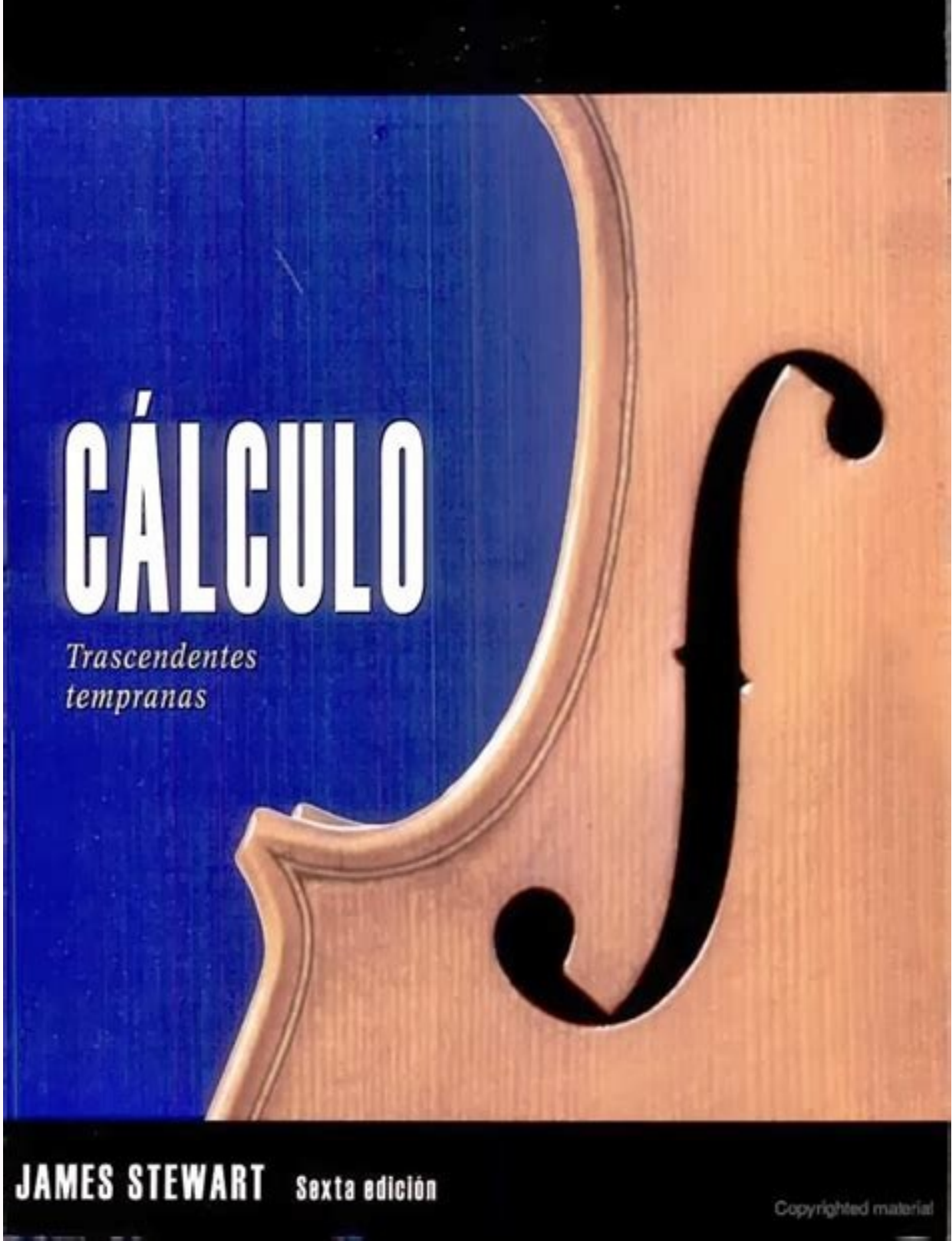
[illegible]

Título Original: Thomas' Calculus Part 2 Multivariable Author/es: George B. Thomas / Mautd E. Weir Edición: 12va Edición ISBN: 0321643690 / 9780321643698 Volumen: Volumen 2 Tipo: Libro | Solucionario Formato: PDF Idioma: Libro en Español | Solucionario en Inglés Cálculo featured Integrales Multivariable Thomas Varias Variables Los estudiantes y maestros aquí en esta web pueden abrir y descargar Thomas Calculo 12 Edicion Solucionario PDF con todas las soluciones y ejercicios resueltos oficial del libro oficial por la editorial | Solucionario Thomas Calculo 12 Edicion Oficial en formato PDF Páginas 461 DESCARGAR ABRIR SOLUCIONARIO Con todas las soluciones de los ejercicios tienen disponible para descargar Thomas Calculo 12 Edicion Solucionario PDF Thomas Calculo 12 Edicion Solucionario en formato PDF Páginas 461 Oficial por la editorial Índice de temas del solucionario Thomas Calculo 12 Edicion ABRIR DESCARGAR SOLUCIONARIO Tienen acceso a abrir y descargar profesores y estudiantes aquí en esta web oficial Thomas Calculo 12 Edicion Solucionario PDF con todos los ejercicios resueltos oficial del libro oficial por la editorial. [gesufedusida.pdf](#)

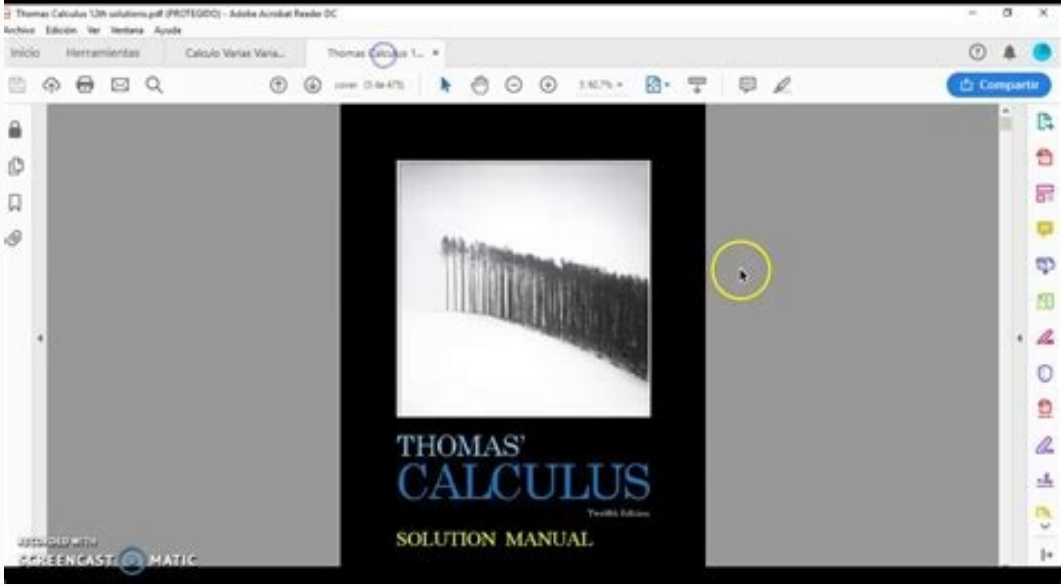
[illegible]

El resultado es un libro con sus ejemplos, sus ejercicios de nivel medio, mayor cantidad de figuras y mejor flujo conceptual, adems de mayores claridad y precisin. Al igual que las ediciones anteriores, esta nueva edicin ofrece una introduccin moderna al clculo que apoya la comprensin conceptual, pero conserva los elementos esenciales de un curso tradicional. [Le petit nicolas film summary](#) pdf Tales mejoras se relacionan estrechamente con una versin ampliada del texto de MyMathLab (al que nos referiremos ms adelante), el cual brinda apoyo adicional a los estudiantes y flexibilidad a los profesores. Muchos de nuestros alumnos estuvieron expuestos a la terminologa y los aspectos computacionales del clculo durante el bachillerato. A pesar de la familiaridad con el lgebra y la trigonometra, sus habilidades en estas materias con frecuencia son insuficientes para alcanzar el xito en el clculo universitario. Con este texto buscamos equilibrar la escasa experiencia de los estudiantes con el clculo y el desarrollo de habilidades algebraicas que podran necesitar, todo sin socavar o minar su confianza. Adems, hemos tenido cuidado de presentar suficiente material, soluciones detalladas paso a paso y ejercicios que apoyen una comprensin completa para alumnos de todos los niveles. Animamos a los estudiantes a ir ms all de la memorizacin de las frmulas para generalizarlas. Los ejemplos y ejercicios sobre grficas y funciones trascendentes prcticamente no aparecen en el texto anterior, pero el verdadero regalo ser haberlos incluido en esta edicin. El texto anterior era demasiado limitado para generalizar. Creemos que este libro brindar respaldo y apoyo para ambas cosas. Cambios en la decimosegunda edicin CONTENIDO En la preparacin de esta edicin hemos conservado la estructura bsica de la tabla de contenido de la edicin anterior. Hemos puesto atencin a las peticiones de los usuarios y los revisores de posponer la introduccin de ecuaciones paramtricas hasta despus de explicar las coordenadas polares, y de presentar el tema de la regla de L'Hpital despus de las funciones trascendentes. Realizamos numerosas revisiones a la mayora de los captulos, como se detalla a continuacin. Funciones Condensamos este captulo an ms para centrarnos en la revisin de los conceptos sobre funciones. El material de requisito que cubre nmeros reales, intervalos, incrementos, lneas rectas, distancias, circunferencias y parbolas se presenta en los apndices a 3.6.650597605976 Limites Para mejorar la continuidad en este captulo, combinamos las ideas de lmites que incluyen infinito y su relacin con las asntotas en las grficas de las funciones, colocndolas juntas al final de la ltima seccin del captulo. Derivadas Aunque utilizamos tasas de cambio y tangentes a curvas como motivacin para el estudio del concepto de lmite, ahora presentamos el concepto de derivada en un solo captulo. Reorganizamos e incrementamos el nmero de ejemplos de tasas relacionadas y agregamos nuevos ejemplos y ejercicios sobre grficas y funciones racionales. xiii Prefacio Antiderivadas e integracin Conservamos la organizacin de la decimo primera edicin al colocar las antiderivadas como el ltimo tema referente a las aplicaciones de las derivadas.

Nuestro objetivo es exponer la forma de recuperarse racionalmente a partir de su derivada, como la solucin del tipo ms sencillo de una ecuacin diferencial de primer orden. Las integrales, como lmites de sumas de Riemann, estudiadas sobre todo a la luz del problema de determinar reas de regiones generales con fronteras curvas, son un nuevo tema que forma la parte sustancial del captulo 5.



Despus de un cuidadoso desarrollo del concepto de integral, pusimos nuestra atencion en su evaluacion y su relacion con las antiderivadas, relacion que se plasma en el teorema fundamental del clculo. Las aplicaciones correspondientes definen diversas ideas geometricas de rea, volumen, longitudes de trayectorias y centroides, todas como limites de sumas de Riemann que dan lugar a integrales definidas que pueden evaluarse determinando una antiderivada del integrando, with honor certificate template Posteriormente, regresamos al tema de resolver ecuaciones diferenciales de primer orden ms complicadas; despus de ello, definimos y establecemos las funciones trascendentes y sus propiedades. Ecuaciones diferenciales Algunas universidades prefieren que este tema se incluya en un curso aparte de clculo. Aunque nosotros tratamos las soluciones de ecuaciones diferenciales con variables separables, cuando tratamos las aplicaciones de crecimiento y decaimiento exponenciales en el captulo de funciones trascendentes, organizamos todo nuestro material en dos captulos (que pueden omitirse para seguir la secuencia de clculo). En el captulo 9 damos un tratamiento introductorio a las ecuaciones diferenciales de primer orden. El captulo incluye una nueva seccin sobre sistemas y planos fase, con aplicaciones a modelos que incluyen presas y depredadores. En el captulo 17 presentamos una introduccion a ecuaciones diferenciales de segundo orden, que se incluye en MyMathLab, as como en el sitio Web del texto, www.pearsoneducacion.net/thomas. Series Conservamos la estructura organizacional de la decimoprimer a edicin para los temas de sucesiones y series. Agregamos nuevas figuras y nuevos ejercicios a diversas secciones, pero adem revisamos algunas de las demostraciones relacionadas con la convergencia de series de potencia para mejorar la accesibilidad del material a los estudiantes. Uno de los usuarios del texto nos dijo que cualquier modificacin que hiciramos para que este material resultara ms sencillo para los estudiantes sera bienvenida en su facultad; ese comentario nos gui para hacer las revisiones de este captulo. Ecuaciones paramtricas Varios usuarios pidieron incluir este tema en el capitulo 11, donde tambin se tratan coordenadas polares y secciones cnicas. Lo hicimos luego de comprender que muchos departamentos eligen cubrir tales temas al inicio de Clculo III, como preparacin para tratar el clculo con vectores y de varias variables. Funciones de variables vectoriales Redujimos los temas de este captulo para dar mayor nfasis a los conceptos que fundamentan el material sobre derivadas parciales, el vector gradiente y las integrales de lnea. Compactamos el anlisis del marco de Frenet y las tres leyes de Kepler acerca del movimiento de los planetas. Clculo de varias variables En estos tres captulos resaltamos el diseo, adem de aadir muchas figuras, ejemplos y ejercicios nuevos. Reorganizamos el material inicial sobre integrales dobles. Combinamos en una sola seccin las aplicaciones de integrales dobles y triples a masas y momentos; se presentan casos tanto de dos como de tres dimensiones. Dicha reorganizacin permite una mejor exposicin de los conceptos clave, junto con sus propiedades y sus aspectos computacionales. Al igual que en la edicin anterior, en sta continuamos haciendo las conexiones de las ideas de varias variables con sus anlogos de una variable que se estudian antes en el texto. Campos vectoriales Dedicamos un considerable esfuerzo para mejorar la claridad y precisin matematica de nuestro estudio de clculo integral vectorial, incluyendo ejemplos, figuras y ejercicios adicionales. Los teoremas y los resultados importantes se enuncian con mayor claridad y en forma completa; se incluyen explicaciones amplias de sus hiptesis y consecuencias matematicas. El rea de una superficie ahora se organiza en una sola seccin, mientras las superficies definidas, explcita o implcitamente, se tratan como casos especiales de la representacin paramtrica ms general.



Las integrales de superficie y sus aplicaciones se estudian en una seccin separada. El teorema de Stokes y el teorema de la divergencia se siguen presentando como generalizaciones del teorema de Green a tres dimensiones. Prefacio xv EJERCICIOS Y EJEMPLOS Sabemos que los ejercicios y los ejemplos son componentes fundamentales en el aprendizaje del clculo. En virtud de tal importancia, actualizamos, mejoramos y ampliamos el nmero de ejercicios en casi todas las secciones del libro. En la presente edicin incluimos ms de 700 nuevos ejercicios. Continuamos nuestra organizacin y la agrupacin de ejercicios por tema, como en las ediciones anteriores, pasando de problemas computacionales a problemas aplicados y tericos. Los ejercicios que requieren del uso de sistemas de cmputo (como Maple o Mathematica) se colocaron al final de cada seccin de ejercicios con el ttulo Exploraciones con computadora. La mayora de los ejercicios aplicados tienen un subtítulo para indicar la clase de aplicacin adecuada del problema. Muchas secciones incluyen ejemplos nuevos para clarificar y profundizar en el significado del tema que se estudia, as como para ayudar a los estudiantes a comprender las consecuencias matematicas o las aplicaciones a la ciencia y la ingeniera. Al mismo tiempo, eliminamos ejemplos que repetan material presentado con anterioridad. DISEO Por su importancia en el aprendizaje del clculo, continuamos con la mejora de figuras existentes en este texto e incluimos un nmro significativo de nuevas figuras. Continuamos con el uso del color de manera consistente y pedaggica para resaltar la idea conceptual que se ilustra.

FIGURA 2.50 La geometra dentro del argumento del ejemplo 1. FIGURA 16.9 Una superficie, como una red o un paracaídas, en un campo vectorial que representa los vectores velocidad del flujo de agua o aire.

Las flechas muestran la direccin y sus longitudes indican la rapidez. MYMATHLAB Y MATHXL El aumento en el uso y la demanda de sistemas de tareas en lnea ha llevado a cambios en MyMathLab y MathXL para el texto. El curso MyMathLab ahora incluye muchos ms ejercicios de todo tipo. Los nuevos applets JavaTM se agregan a la ya significativa coleccin, para ayudar a los estudiantes a visualizar los conceptos y generalizar el material. Otras características destacadasRIGOR El nivel de formalidad es consistente con el de las ediciones anteriores. Seguimos distinguiendo entre anlisis formal e informal, y sealamos sus diferencias. Consideramos que iniciar con una idea ms intuitiva y menos formal ayuda a los estudiantes a comprender un concepto nuevo y difcil, de manera que luego ellos puedan apreciar cabalmente su precisin matematica y los resultados. Ponemos atencion en definir las ideas de una manera detallada xvi Prefacio y en probar los teoremas adecuados para estudiantes de clculo, aunque mencionamos temas ms profundos o sutiles que ellos estudiarán en un curso ms avanzado. Nuestra organizacin y las distinciones entre tratamiento informal y formal dan al profesor un considerable grado de flexibilidad en la cantidad y la profundidad de cobertura de los diferentes temas. Por ejemplo, no demostramos el teorema del valor intermedio ni el teorema del valor extremo para el uso en el nivel de clculo. Los profesores pueden modificar las preguntas del banco respectivo y agregar nuevas preguntas. Es posible imprimir los exámenes o administrarlos en línea. Diapositivas de clases en PowerPointEstas diapositivas de presentaciones de clases fueron diseñadas específicamente para la secuencia y filosofía de la serie de Clculo de Thomas. Se incluyen figuras clave del libro para ayudar a hacer vidos los conceptos en el video de clases. Manual de soluciones para el profesorEl Manual de soluciones para el profesor, de William Ardis, Collin County Community College, contiene soluciones completamente desarrolladas de todos los ejercicios del texto. AgradecemosQueremos expresar nuestro agradecimiento a las personas que hicieron muchas e invaluables contribuciones a esta edicin conforme se desarrollaba en sus diferentes etapas: RevisoresBlaise DeSesa Paul Lorzack Kathleen Pellissier Lauri Semarne Sarah Streett Holly Zulu Revisores de la decimosegunda edicinMeighan Dillon, Southern Polytechnic State University Anne Dougherty, University of Colorado Stadi Fariabi, San Antonio College Klaus Fischer, George Mason University Tim Flood, Pittsburg State University Rick Ford, California State University, Chico Robert Gardner, East Tennessee State University Christopher Heil, Georgia Institute of Technology Joshua Brandon Holden, Rose-Hulman Institute of Technology Alexander Hulpke, Colorado State University Jacqueline Jensen, Sam Houston State University Prefacio xix Jennifer M. Johnson, Princeton University Hideaki Kaneko, Old Dominion University Przemko Kranz, University of Mississippi Xin Li, University of Central Florida Maura Mast, University of Massachusetts, Boston Val Mohanakumar, Hillsborough Community College, Dale Mabry Campus Aaron Montgomery, Central Washington University Cynthia Piez, University of Idaho Brooke Quinlan, Hillsborough Community College, Dale Mabry Campus Rebecca A. Segal, Virginia Commonwealth University Andrew V Sills, Georgia Southern University . Alex Smith, University of Wisconsin, Eau Claire Mark A. Smith, Miami University Donald Solomun, Montgometry of Wisconsin, Milwaukee Blake Thornton, Washington University in St. Louis David Walnut, George Mason University Adrian Wilson, University of Montevallo Bobby Winters, Pittsburg State University Dennis Wortman, University of Massachusetts, Boston 12LOS VECTORES Y LA GEOMETRÍADEL ESPACIOINTRODUCCIN Para aplicar el clculo a muchas situaciones reales y en matematicas avanzadas, necesitamos una descripcin matematica del espacio tridimensional. En este captulo presentaremos los sistemas de coordenadas y los vectores tridimensionales. Con base en nuestros conocimientos acerca de las habilidades necesarias de lgebra y trigonometra. Cada estudiante puede recibir apoyo para aquellas habilidades en las que necesite ayuda. Plan de estudio personalizado: se genera cuando los estudiantes completan un examen o un cuestionario; adem, indica los temas que tienen que dominarse, y contiene vnculos a ejercicios tutoriales para mejorar su comprensin y desempeo. Apoyo de aprendizaje multimedia, como videoclases, applets de Java y animaciones; ayuda a los estudiantes a mejorar, independientemente de su nivel de comprensin y desempeo. Administrador de evaluaciones: permite crear trabajos, cuestionarios y exámenes en línea, que se califican de manera automática. Basta seleccionar una mezcla adecuada de las preguntas en el banco de ejercicios de MyMathLab y de los ejercicios creados por el profesor. Libro de calificaciones: diseado específicamente para matematicas y estadística, de manera automática hace un seguimiento del estudiante y brinda al profesor control para calcular las calificaciones finales. También es posible agregar calificaciones extras a este libro de calificaciones. Diseador de ejercicios MathXL: permite crear ejercicios fijos y algorítmicos para las tareas en lnea. El profesor puede utilizar la biblioteca de ejercicios como un punto sencillo de inicio. MyMathLab es activado por CourseCompassTM, entornos de enseñanza y aprendizaje de Pearson Educacin, y por MathXL, nuestro sistema en lnea de tareas, tutoriales y trabajos. MyMathLab es disponible para maestros calificados que adopten el texto. Para mayor informacin, conmuense con su representante de ventas local de Pearson. Video clases con captura opcionalLas presentaciones de las clases incluyen ejemplos y ejercicios del texto, adem de que apoyan un enfoque que enfatiza la visualizacin y la resolucin de problemas. Est disponible por medio de MyMathLab y MathXL. Cursos en lnea con MathXL (se requiere cdigo de acceso)MathXL es un sistema en lnea para tareas, tutorías y asignacin de trabajos que acompaa a libros de texto en matematicas y estadística de Pearson. Ejercicios interactivos, correlacionados con el libro de texto en el nivel de objetivos, se generan de manera algorítmica para practicar el dominio limitados. La mayora de los ejercicios son de respuesta abierta y ofrecen soluciones guiadas, prtemas de ejemplo y apoyo al aprendizaje para ayuda adicional. Capitulo Cmo prepararse: incluye cientos de ejercicios referentes a las habilidades necesarias de lgebra y trigonometra. Cada estudiante puede recibir apoyo para aquellas habilidades en las que necesite ayuda. Plan de estudio personalizado: se genera cuando los estudiantes completan un examen o un cuestionario; adem, indica los temas que tienen que dominarse, y contiene vnculos a ejercicios tutoriales para mejorar su comprensin y desempeo. Apoyo de aprendizaje multimedia, como videoclases, applets de Java y animaciones; ayuda a los estudiantes a mejorar, independientemente de su nivel de comprensin y desempeo. xviii Prefacio Libro de calificaciones: diseado específicamente para matematicas y estadística, de manera automática hace un seguimiento del estudiante y brinda al profesor control para calcular las calificaciones finales. También es posible agregar calificaciones extras a este libro de calificaciones. Diseador de ejercicios MathXL: permite crear ejercicios fijos y algorítmicos para las tareas en lnea. alain sorral comprendre l empire pdf 2017 download full El profesor puede utilizar la biblioteca de ejercicios como un punto sencillo de inicio. Administrador de evaluaciones: permite crear trabajos, cuestionarios y exámenes en lnea que se califican de manera automática. Basta seleccionar una mezcla adecuada de las preguntas en el banco de ejercicios de MyMathLab y de los ejercicios creados por el profesor. MathXL es disponible para profesores calificados que adopten el libro. Para mayor informacin, conmuense con su representante de ventas local de Pearson. TestGenTestGen permite a los maestros construir, editar, imprimir y administrar exámenes utilizando un banco de preguntas computarizado, el cual fue desarrollado para cubrir todos los objetivos del texto. TestGen tiene como base un algoritmo que permite a los profesores crear múltiples versiones, aunque equivalentes, de la misma pregunta o examen con tal solo hacer clic en un botón.

FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0, 0, 0), 5 (2, 3, 5) Recta y Plano z 3, z 5 2, z 5 5 plano yz: x plano xy: z 0 Origen Plano x 2 0 (2, 0, 0) Recta x Plano y 0 (0, 3) x y 0 (0, 0) y x Recta x 2, y 3 FIGURA 12.2 Los planos x 5 0, y 5 0 y z 5 0 dividen al espacio en ocho octantes. 7302255224.pdf FIGURA 12.3 Los planos x 5 2, y 5 3 y z 5 5 determinan tres rectas que pasan por el punto (2, 3, 5). Un punto (x, y, z) est en la recta si y solo si x 5 2 y y 5 3. De igual manera, la lnea de interseccin de los planos y 5 3, y z 5 5 queda descrita por el par de ecuaciones y 5 3, z 5 5. Esta recta corre paralela al eje x. La recta de interseccin de los planos x 5 2 y z 5 5, paralela al eje y, queda descrita por el par de ecuaciones x 5 2, z 5 5. En los siguientes ejemplos relacionamos ecuaciones y desigualdades de coordenadas con los conjuntos de puntos que definen en el espacio. EJEMPLO 1 (a) z 0 (b) z 3 Interpretacin geomtrica de ecuaciones y desigualdades. El semiespacio que consta de los puntos que estn en y arriba del plano xy. El plano perpendicular al eje x en x 5 23. Este plano es paralelo al plano yz y est tres unidades atrs de l. El segundo cuadrante del plano xy. El primer octante. El bloque entre los planos y 5 21 y y 5 1 (con estos planos incluidos). La recta donde se intersecan los planos y 5 22 y z 5 2. O bien, la recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, 2, 0). z La circunferencia x2 y2 4, z 3 (c) z 0, x y 0 (d) x 0, y z 0 (e) -1 y 1 (f) y = -2, z = 2 (0, 2, 3) El plano z 3 (0, 2, 0) (2, 0, 0) x2 y2 4, z 0 y EJEMPLO 2 Cuantos Puntos P(x, y, z) satisfacen la ecuacin x2 + y2 = 4y, z = 3? FIGURA 12.4 La circunferencia x 2 1 y 2 5 4 en el plano x 5 3. FIGURA 12.1 El sistema de coordenadas cartesiano sigue la convención de la mano derecha. 660 12.1 Sistemas de coordenadas tridimensionales 661 z plano xy: y 0 (0,

Operaciones algebraicas con vectores Dos operaciones fundamentales que pueden realizarse con vectores son la suma de vectores y la multiplicación por un escalar.

Un escalarse simplemente con un numero real y se illara as cuando queramos resaltar su diferencia en relacin con los vectores. Los escalares pueden ser positivos, negativos o cero y se usan para escalar un vector multiplicandolo.

Sean u 5 8u1, u2, u39 y v 5 8v1, v2, v39 vectores y k un escalar. u + v = 8u1 + v1, u2 + v2, u3 + v39 ku = 8ku1, ku2, ku39 DEFINICIONES Suma: Multiplicación escalar: La suma de vectores se realiza sumando los componentes correspondientes de los vectores. Multiplicamos un vector por un escalar haciendo el producto de cada componente por el escalar. Las definiciones se aplican de manera similar a los vectores en el plano, slo que stos tienen nicamente dos componentes 8u1, u29 y 8v1, v29. La definicin de la suma de vectores en el plano se ilustra geomtricamente en la figura 12.12a, donde el punto inicial de un vector se coloca en el punto final del otro. Otra interpretacin se muestra en la figura 12.12b (llamada la ley del paralelogramo de la suma), dondey u1 v1, u2 v2 y u+v v v1 u2 v2 v u+v v x x (b) 0 u1 (a) 0 FIGURA 12.12 (a) Interpretacin geomtrica de la suma de vectores. (b) La ley del paralelogramo para la suma de vectores. 668 Captulo 12: Los vectores y la geometra del espacio 1.5u u 2u 2u la suma, llamada el vector resultante, es la diagonal del paralelogramo. En fsica, las fuerzas se suman vectorialmente, al igual que las velocidades, las aceleraciones, etcetera. As, la fuerza que acta sobre una partcula sujeta a fuerzas elctricas y gravitacionales se obtiene sumando los dos vectores de fuerza. En la figura 12.13 se muestra la interpretacin geomtrica del producto ku del escalar k por el vector u. Si k = 0, entonces ku tiene la misma direccin que u; si k < 0, entonces la direccin de ku es opuesta a la direccin de u. Comparando las longitudes de u y ku, vemos que2 2 2 2 2 2 2 ku = 2sku1 d + sku3 d = 2k su1 + u2 + u3 d FIGURA 12.13 Mltiplos escalares de u. = 2k2 u12 + u22 + u32 = k u . u v u (a) v La longitud de ku es igual al producto del valor absoluto del escalar k por la longitud de u. El vector (21)u 5 2u tiene la misma longitud de u, pero apunta en la direccin opuesta. La diferencia u 2 v de dos vectores est definida por Si u 5 8u1, u2, u39 y v 5 8v1, v2, v39, entonces u - v = u + s -vd . u - v = 8u1 - v1, u2 - v2, u3 - v39. Observe que (u 2 v) 1 v 5

Obtenga los componentes de (b) u - v (c) 1 u . 2 (a) 2u + 3 vu v (v) (b) Solucin (a) 2u + 3v = 28-1, 3, 19 + 384, 7, 09 = 8-2, 6, 29 + 812, 21, 09 = 810, 27, 29 (b) u - v = 8-1, 3, 19 - 84, 7, 09 = 8-1 -4, 3 -7, 1 -09 = 8-5, -4, 19 (c) 2 2 2 FIGURA 12.14 (a) El vector u 2 v, sumando a v, da u. (b) u 2 v 5 u 1 (2v). 1 3 1 1 3 1 1 1 u = ` h , , i ` = a - b + a b + a b = 211, 2 2 2 2 2 2 2 C Las operaciones vectoriales tienen muchas de las propiedades de la aritmtica ordinaria. Propiedades de las operaciones con vectores Sean u, v, y w vectores, y a y b escalares. 1. 3. 5. 7. 9. u + v = v + u u + 0 = 0 u0 = 0 asbud = sabdu sa + bd u = au + b u 2. 4. 6. 8. su + vd + w = u + sv + wd u + s -ud = 0 1u = u asu + vd = au + a v Estas propiedades se verifican fcilmente usando las definiciones de suma de vectores y multiplicacin por un escalar. Por ejemplo, para establecer la propiedad 1, tenemos u + v = = = 8u1, u2, u39 + 8v1, v2, v39 8u1 + v1, u2 + v2, u3 + v39 8v1 + u1, v2 + u2, v3 + u39 8v1, v2, v39 + 8u1, u2, u39 v + u. 12.2 Vectores 669 Cuando tres o ms vectores en el espacio se encuentran en el mismo plano, decimos que son vectores coplanares. Por ejemplo, los vectores u, v y u 1 v siempre son coplanares. Vectores unitariosUn vector v de longitud 1 se llama vector unitario. Los vectores unitarios estndar (o cannicos) son i = 81, 0, 09, j = 80, 1, 09, y k = 80, 0, 19. Cualquier vector v 5 8v1, v2, v39 se puede escribir como una combinacin lineal de los vectores unitarios estndar de la siguiente manera: v = 8v1, v2, v39 = 8v1, 0, 09 + 80, v2, 09 + 80, 0, v39= OP2 x21 y2j z2k P2(x2, y2, z2) = v181, 0, 09 + v280, 1, 09 + v380, 0, 19 = v1 i + v2 j + v3 k . Llamamos al escalar (o nmero) v1 el componente en i del vector v, a v2 el componente en j, y a v3 el componente en k. La expresin en componentes del vector de P1(x1, y1, z1) a P2(x2, y2, z2) es 1 P1P2 = sx2 - x1 di + sy2 - y1 dj + sz2 - z1 dky k i O j P1P2 (figura 12.15). Siempre que v Z 0, su longitud uvu no es cero y x OP1 x11 y1j P1(x1, y1, z1) z1k ` 1 1 i ` = v = 1. v v FIGURA 12.15 El vector de P1 a P2 es 1 P1P2 = sx2 - x1 di + s y2 - y1 dj + s z2 - z1 dk. Es decir, yvu es un vector unitario en la direccin de v, llamado la direccin del vector no nulo v. EJEMPLO 4 P2(3, 2, 0). Solucin Obtenga el vector unitario u en la direccin del vector de P1(1, 0, 1) a 1 Dividimos P1P2 entre su longitud: 1 P1P2 = 2s2d2 + s2d2 + s -1d2 = 24 + 4 + 1 = 29 = 3 1 P1P2 = s3 - 1di + s2 - 0dj + s0 - 1dk = 2i

+ 2j - k u = 1 2i + 2j - k P1P2 2 1 2 = = i + j - k. 1 3 3 3 3 P1P2 1 El vector unitario u es la direccin de P1P2 . EJEMPLO 5 Si v 5 3i 2 j 4 i es un vector de velocidad, exprese v como el producto de su rapidez por un vector unitario en la direccin del movimiento.Solucin La rapidez es la magnitud (longitud) de v: 2 2 v = 2s3d + s -4d = 29 + 16 = 5. El vector unitario yvuvi tiene la misma direccin de v: BIOGRAFA HISTRICA Hermann Grassmann (18091877) 3i - 4j 4 3 v = = i - j. 5 5 5 v 670 Captulo 12: Los vectores y la geometra del espacio Entonces 3 4 v = 3i - 4j = 5 a i - j b. 5 5 (*)Longitud (rapidez) Direccin del movimiento En resumen, podemos expresar cualquier vector no nulo v en trminos del producto de sus dos v . caractersticas fundamentales, longitud y direccin, escribiendo v = v v Si v Z 0, entonces v 1. es un vector unitario en la direccin de v; v 2. La ecuacin v = v expresa a v en trminos de su longitud y direccin. v EJEMPLO 6 Se aplica una fuerza de 6 newtons en la direccin del vector v 5 2i 1 2j 2 k. Exprese la fuerza F como el producto de su magnitud y direccin.Solucin El vector de fuerza tiene magnitud 6 y direccin F = 6 2i + 2j - k 2i + 2j - k v = 6 = 6 2 2 2 3 v 22 + 2 + s -1d v , entonces v 2 2 1 = 6 a i + j - kb . 3 3 3 Punto medio de un segmento de rectaLos vectores a menudo son tiles en geometra. Por ejemplo, las coordenadas del punto medio de un segmento de recta se determinan promediando. El punto medio M del segmento de recta que une los puntos P(x1, y1, z1) y P2(x2, y2, z2) es el puntoP1(x1, y1, z1) x M 1 x2 y1, y2 2 z1 2 z2 a2 , x1 + x2 y1 + y2 z1 + z2 , , b. 2 2 2 Para comprender por qu, observe la figura 12.16, dondeP2(x2, y2, z2) O FIGURA 12.16 Las coordenadas del punto medio son los promedios de las coordenadas de P1 y P2. 1 1 1 1 1 1 1 OM = OP1 + sP1P2 d = OP1 + sOP2 - OP1 d 2 2 1 1 1 = sOP1 + OP2 d 2 y1 + y2 z1 + z2 = i + j + k.

2 2 2 EJEMPLO 7 El punto medio del segmento que une P1(3, 22, 0) y P2(7, 4, 4) es a 3 + 7 - 2 + 4 0 + 4 , b = 85, 1, 2d. 2 2 12.2 Vectores 671 AplicacionesUna aplicacin importante de los vectores se da en la navegacin.N v 30 70 EJEMPLO 8 Un avin comercial, que vuela hacia el este a 500 millas por hora con cielo despejado, encuentra un viento de cola de 70 millas por hora soplando en direccin 60 al noreste. El avin mantiene el rumbo hacia el este, pero, debido al viento, adquiere una nueva rapidez y direccin con respecto al suelo. Cules son la rapidez y direccin?u v 500 u E NO EST A ESCALA FIGURA 12.17 Los vectores que representan las velocidades del avin u y el viento de cola v del ejemplo 8. Si u 5 la velocidad del avin solamente y v 5 la velocidad del viento de cola, entonces uu u 500 y uv u 5 70 (figura 12.17). La velocidad del avin con respecto al suelo est dada por la magnitud y direccin del vector resultante u 1 v. Si el eje x positivo representa la direccin este y el eje y positivo representa la direccin norte, entonces los componentes de u y v sonSolucin u = 8500, 09 Por lo tanto, y v = 870 cos 60, 70 sen 609 = 835, 35 239. 2 2 u + v = 2535 + s3513d L 538.4 u + v = 8535, 35239 = 535i + 3523 j y u = tan-1 3523 L 6.5, 535FIGura 12.17 La nueva rapidez del avin con respecto al suelo es de alrededor de 538.4 millas por hora, y su nueva direccin es de aproximadamente 6.5 al noreste. Otra aplicacin importante se da en fsica e ingeniera, cuando varias fuerzas actan sobre un objeto simple. EJEMPLO 9 Un peso de 75 newtons (N) est suspendido por dos alambres, como se muestra en la figura 12.18a. Obtenga las fuerzas F1 y F2 que actan en ambos alambres. Los vectores de fuerza F1 y F2 tienen magnitudes uF1u y uF2u y componentes que se miden en newtons. La fuerza resultante es la suma F1 1 F2 y debe ser igual en magnitud y actuar en direccin opuesta (hacia arriba) al vector de peso w (figura 12.18b). A partir de la figura se deduce queSolucin 55 F1 F2 55 75 (a) F F1 F1 F2 40 40 80, 759 Puesto que F1 1 F2 5 80, 759, el vector resultante lleva al sistema de ecuaciones - F1 cos 55 + F2 cos 40 = 0 F1 = 8- F1 cos 55, F1 sen 559 y F2 = 8 F2 cos 40, F2 sen 409. F1 F2 55 40 F2 F1 sen 55 + F2 sen 40 = 75. Al despejar uF2u en la primera ecuacin y sustituir el resultado en la segunda, tenemos F2 = Por lo tanto, F1 = 75 L 57.67 N, sen 55 + cos 55 tan 40 F1 cos 55 cos 40 y F1 sen 55 + F1 cos 55 sen 40 = 75. cos 40 w (b) 80, 759 FIGURA 12.18 ejemplo 9. El peso suspendido del 672 Captulo 12: Los vectores y la geometra del espacio

y F2 = = 75 cos 55 sen 55 cos 40 + cos 55 sen 40 75 cos 55 L 43.18 N. sens55 + 40d Los vectores de fuerza son F1 5 8233.08, 47.249 y F2 5 833.08, 27.769. Ejercicios 12.2Vectores en el plano En los ejercicios 1 a 8, u 5 83, 229 y v 5 822, 59. Determine (a) los componentes y (b) la magnitud (longitud) del vector indicado. 1. 3u 3. u + v 5. 2u - 3v 7. 3 4 u + v 5 5 2. - 2v 4. u - v 6. - 2u + 5v 8. 5 12 u + v 13 13w v Representaciones geomtricas En los ejercicios 23 y 24, copie los vectores u, v y w con punto inicial y final conforme se requiera para dibujar el vector indicado. 23. En los ejercicios 9 a 16, obtenga los componentes del vector. 1 9. El vector PQ, donde P 5 (1, 3) y Q 5 (2, 21) 1 10. El vector OP donde O es el origen y P es el punto medio del segmento RS, donde R 5 (2, 21) y S 5 (24, 3) 11. El vector del punto A 5 (2, 3) al origen 1 1 12. La suma de AB y CD , donde A 5 (1, 21), B 5 (2, 0), C 5 (21, 3), y D 5 (22, 2) 13. El vector unitario que forma un ngulo u 5 2py3 con el eje x positivo 14. El vector unitario que forma un ngulo u 5 23py4 con el eje x positivo u + v c. u - v 24. v u b. u + v + w d. u - w w 15. El vector unitario obtenido al girar el vector 80, 19 120 en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen 16. El vector unitario obtenido al girar el vector 81, 09 135 en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen a. u - v c. 2u - v Vectores en el espacio En los ejercicios 17 a 22, exprese cada vector en la forma u 5 v1 v2j 1 v3k. 1 17. P1P2 si P1 es el punto (5, 7, 21) y P2 es el punto (2, 9, 22) 1 18. P1P2 si P1 es el punto (1, 2, 0) y P2 es el punto (23, 0, 5) 1 19. AB si A es el punto (27, 28, 1) y B es el punto (210, 8, 1) 20. AB si A es el punto (1, 0, 3) y B es el punto (21, 4, 5) 21. Vectores en el espacio En los ejercicios 17 a 22, u 5 v + w d. u + v + w Longitud y direccin En los ejercicios 25 a 30, exprese cada vector como producto de su longitud y direccin. 25. 2i + j - 2k 27. 5k 29. 26 1 26 1 26 1 26. 9i - 2j + 6k 28. k 30. 3 4 i + k 5 5 i + 23 23 j 23 ki - j - + 12.2 Vectores31. Determine los vectores con las longitudes y direcciones dadas. Intente hacer los clculos mentalmente. b. 23 1 c.

2 a. 2 d. 7 Longitud Direccin i - k 3j + 5 6 i 7100 673 30 F1 45 F2 4 k 5 2 3j + k 7 7 46. Considere un peso de 50 N suspendido de dos alambres, como se muestra en la figura. Si la magnitud del vector F1 es de 35 N, obtenga el ngulo a y la magnitud del vector F2.a F1 60 F2 32. Obtenga los vectores con las longitudes y direcciones dadas. Intente hacer los clculos mentalmente. b. 22 a. 7 c. 13 12 Longitud Direccin j -4 3 i - k 5 4 12 3 i j k 13 13 1 1 1 1 + j k 22 23 2650 d. a 7 0 47. Considere un peso de w-N suspendido de dos alambres, como se muestra en la figura. Si la magnitud del vector F2 es 100 N, determine w y la magnitud del vector F1.40 F1 35 F2 w 33. Determine un vector de magnitud 7 en la direccin de v 5 12i 2 5k. 34. Obtenga un vector de magnitud 3 en direccin opuesta a la direccin de v 5 (1y2)j 2 (1y2)j 2 (1y2)k. Direccin y puntos medios En los ejercicios 35 a 38, determine 1 a. La direccin de P1P2 y b. El punto medio del segmento de recta P1P2. 35. P1s - 1, 1, 5d 36. P1s 1, 4, 5d 37. P1s 3, 4, 5d P2s2, 5, 0d P2s4, - 2, 7d P2s2, 3, 4d 48. Considere un peso de 25 N suspendido de dos alambres, como se ilustra en la figura. Si las magnitudes de los vectores F1 y F2 son ambas de 75 N, entonces los ngulos a y b son iguales. Obtenga a a F1 25 b F2 38. P1s0, 0, 0d P2s2, - 2, -2d 1 39. Si AB 5 1 4j 2k y B es el punto (5, 1, 3), obtenga A. 1 40. Si AB 5 27i 1 3j 1 1 8k y A es el punto (22, 23, 6), obtenga B. Teora y aplicaciones 41. Combinacin lineal Si u 5 2i 1 j, v 5 1 i j, y w 5 1 2j, obtenga los escalares a y b tales que u 5 av + bw. 42. Combinacin lineal Si u 5 i 2 j, v 5 2i 1 3j, y w 5 1 i j, escriba u 5 u 1 u 2, donde u 1 sea paralelo a v y u 2 sea paralelo a w. (Vase el ejercicio 41). 43. Velocidad Un avin vuela en direccin 25 al oeste del norte a 800 km/hy. Determine la forma en componentes de la velocidad del avin, suponiendo que el eje x positivo representa el rumbo este y el eje y positivo representa el rumbo norte. 44. (Continuacin del ejemplo 8) Qu rapidez y direccin debe tener el avin del ejemplo 8 para que el vector resultante sea de 500 millas por hora hacia el este? 45. Considere un peso de 100 N suspendido de dos alambres como se muestra en la siguiente figura. Obtenga las magnitudes y los componentes de los vectores de fuerza F1 y F2. 49. Ubicacin Un pjaro vuela desde su nido 5 km en direccin de 60 al noreste, donde se detiene a descansar en un rbol. Luego vuela 10 km en direccin hacia el suroeste y se detiene en un poste telefnico. Utilice un sistema de coordenadas xy de manera que el origen est en el nido del pjaro, el eje x apunte hacia el este y el eje y apunte hacia el norte. a. En qu punto se ubica el rbol? b. En qu punto se localiza el poste de telfono? 50. Use tringulos semejantes para obtener las coordenadas del punto Q que divide al segmento de P1(x1, y1, z1) a P2(x2, y2, z2) en dos tramos, cuya razn es pyq 5 r. 51. Medianas de un tringulo Suponga que A, B y C son las esquinas de una delgada placa triangular de densidad constante como se muestra en la figura. a.

Obtenga el vector que va desde C al punto medio de M del lado AB. b. Determine el vector que va desde C al punto que est sobre la mediana CM, a dos tercios de la distancia de C a M. 674 Captulo 12: Los vectores y la geometra del espacio53. Sea ABCD un cuadriltero en el espacio (no necesariamente en el plano). Demuestre que los dos segmentos que unen los dos puntos medios de los lados opuestos de ABCD se bisecan entre s. (Sugerencia: Muestre que los segmentos tienen el mismo punto medio). 54. Desde el centro de un polgono regular de n lados en el plano se trazan vectores hasta los vrtrices del polgono. Demuestre que la suma de los vectores es igual a cero. (Sugerencia: Qu pasa con la suma si usted hace girar el polgono en torno a su centro?) 55. Suponga que A, B y C son los vrtrices de un tringulo y que a, b, y c son, respectivamente, los puntos medios de los lados opuestos. De 1 1 1 muestre que Aa + Bb + Cc = 0 . 56. Vectores unitarios en el plano Demuestre que un vector unitario en el plano se puede expresar como u 5 (cos u) i (sen u)j, obtenido al hacer girar el vector i un ngulo u en direccin contraria a las manecillas del reloj. Explique por qu cualquier vector unitario en el plano puede expresarse en esta forma. c. Obtenga las coordenadas del punto donde se cortan las medianas del DABC. De acuerdo con el ejercicio 17 de la seccin 6.6, este punto es el centro de masa de la placa.z C(1, 1, 3) c.m. B(1, 3, 0) x M A(4, 2, 0) y 52. Determine el vector del origen al punto de interseccin de las medianas del tringulo cuyos vrtrices son As1, - 1, 2d, Bs2, 1, 3d, y Cs - 1, 2, - 1d. 12.3F El producto puntoSi se aplica una fuerza F a una partcula que se mueve a lo largo de una trayectoria, con frecuencia necesitamos conocer la magnitud de la fuerza en la direccin de movimiento. Si v es paralelo a la recta tangente a la trayectoria en el punto donde se aplica F, buscamos la magnitud de F en la direccin de v. La figura 12.19 indica que la cantidad escalar que buscamos es la longitud de uFu cos u, donde u es el ngulo entre los dos vectores. En esta seccin mostraremos cmo calcular fcilmente el ngulo entre dos vectores a partir de sus componentes. Una parte clave del clculo es una expresin llamada el producto punto. El producto punto tambin se conoce como producto interno o escalar porque el producto da como resultado un escalar, no un vector. Despus de investigar al producto punto, lo aplicaremos para determinar la proyeccin de un vector sobre otro (como se ilustra en la figura 12.19) y para determinar el trabajo realizado por una fuerza constante que acta a lo largo de un desplazamiento. v Longitud F cos FIGURA 12.19 La magnitud de la fuerza F en la direccin del vector v es la longitud uFu cos u de la proyeccin de F sobre v. ngulo entre vectoresCuando dos vectores no nulos u y v se colocan de manera que sus puntos iniciales coincidan, forman un ngulo u con medida 0 # u # p (figura 12.20). Si los vectores no estn en la misma recta, el ngulo u se mide en el plano que los contiene. Si los vectores estn alineados, el ngulo entre ellos es igual a cero si apuntan a la misma direccin, y p si apuntan en direcciones opuestas. El ngulo u es el ngulo entre u y v. El teorema 1 ofrece una frmula para determinar este ngulo. v TEOREMA 1: ngulo entre dos vectores El ngulo u entre dos vectores no nulos u 5 8u1, u2, u39 y v 5 8v1, v2, v39 est dado poru u = cos-1 a u1 v1 + u2 v2 + u3 v3 b. u v FIGURA 12.20 El ngulo entre u y v. Antes de demostrar el teorema 1, enfocaremos nuestra atencin en la expresin u1v1 1 u2v2 1 u3v3 en el clculo de u. Esta expresin es la suma de los productos de los componentes correspondientes a los vectores u y v. 12.3 El producto punto 675 DEFINICIN El producto punto u ? v (u punto v) de los vectores u 5 8u1, u2, u39 y v 5 8v1, v2, v39 es u # v = u1 v1 + u2 v2 + u3 v3 . EJEMPLO 1 (a) 81, -2, -19 # 8-6, 2, -39 = s1ds -6d + s -2ds2d + s -1ds -3d = - 6 -4 + 3 = -7 1 1 (b) a i + 3j + kb # s4i - j + 2kd = a bs4d + s3ds -1d + s1ds2d = 1 2 2 El producto punto de un par de vectores bidimensionales se define de un modo similar: 8u1, u29 # 8v1, v29 = u1 v1 + u2 v2 . A lo largo del resto del libro veremos que el producto punto es una herramienta clave, no slo para la obtencin del ngulo entre dos vectores, sino tambin para muchos clculos fsicos y geomtricos importantes en el espacio (y en el plano). Prueba del teorema 1 Al aplicar la ley de los cosenos [ecuacin (8), seccin 1.3] al tringulo de la figura 12.21, encontramos que w 2 = u 2 + v 2 - 2 u v cos u w uLeY de los cosenos2 A 2u12 + u22 + u32 B = u12 + u22 + u32 2 A 2v12 + v22 + v32 B = v12 + v22 + v32 2 u v cos u = u 2 + v 2 - w 2 . Como w 5 u 2 v, la forma componente de w es 8u1 2 v1, u2 2 v2, u3 2 v39. De esta forma, u2 = v2 = w2 = FIGURA 12.21 La ley del paralelogramo de la suma de vectores da w 5 u 2 v. 2 A 2su1 - v1 d2 + su2 - v2 d2 + su3 - v3 d2 B = su1 - v1 d2 + su2 - v2 d2 + su3 - v3 d2 = u12 - 2u1v1 + v12 + u22 - 2u2v2 + v22 + u32 - 2u3v3 + v32 y u 2 + v 2 - w 2 = 2su1 v1 + u2v2 + u3 v39. Por lo tanto, 2 u v cos u = u 2 + v 2 - w 2 = 2su1 v1 + u2v2 + u3 v3 d u v cos u = u1 v1 + u2 v2 + u3 v3 u1 v1 + u2 v2 + u3 v3 cos u = - u v Como 0 # u # p, tenemos u = cos-1 a u1 v1 + u2 v2 + u3 v3 b. u v En la notacin del producto punto, el ngulo entre dos vectores u y v puede escribirse como u = cos-1 a u # v b.

u v 676 Captulo 12: Los vectores y la geometra del espacio EJEMPLO 2Solucin Obtenga el ngulo entre u 5 i 2 j 2 2k y v 5 6i 1 3j 1 2k. Utilizamos la frmula anterior: u = 2s1d2 + s -2d2 + s -2d2 = 29 = 32 2 2 v = 2s6d + s3d + s2d = 249 = 7 u # v = s1ds6d + s -2ds3d + s -2ds2d = 6 -6 -4 = -4 u = cos-1 a u # v -4 b L 1.76 radianes. b = cos-1 a s3ds2d u v La frmula para el ngulo tambin se aplica a vectores bidimensionales.y B(3, 5) EJEMPLO 3 Determine el ngulo u del tringulo ABC determinado por los vrtrices A 5 (0, 0), B 5 (3, 5) y C 5 (5, 2) (figura 12.22). 1 1 El ngulo u es el ngulo entre los vectores CA y CB . Las expresiones en componentes de estos dos vectores sonSolucinx C(5, 2) 1 A 1 1 1 CA = 8-5, -29 y 1 CB = 8-2, -39. FIGURA 12.22 El tringulo del ejemplo 3. Primero calculamos el producto punto y las magnitudes de estos dos vectores. 1 1 CA # CB = s -5ds -2d + s -2ds3d = 4 1 CA = 2s -5d2 + s -2d2 = 229 1 CB = 2s -2d2 + s3d2 = 213 u = cos-1 L 78.1 1 1 CA # CB 1 1 CA CB 4 o Luego, aplicando la frmula del ngulo, tenemos = cos-1 A 229 B A 213 B 1.36 radianes. Vectores perpendiculares (ortogonales)Dos vectores no nulos u y v son perpendiculares u ortogonales si el ngulo entre ellos es py2.

Para tales vectores tenemos que u7v 5 0, ya que cos(py2) 5 0. El recproco tambin es cierto. Si u y v son vectores no nulos con u7v 5 uuuuv cos u 5 0, entonces cos u 5 0 y u 5 cos21 0 5 py2. DEFINICIN Si u7v 5 0. Los vectores u y v son ortogonales (o perpendiculares) si y slo EJEMPLO 4 (a) u 5 83, 229 y v 5 84, 69 son ortogonales porque u7v 5 3(4) 1 (22)(6) 5 0. (b) u 5 5 3i 2 1j 1 k y v 5 2j 1 4k son ortogonales porque u7v 5 3(0) 1 (22)(2) 1 (1)(4) 5 0. Para determinar si dos vectores son ortogonales, calcule su producto punto. 12.3 El producto punto 677 (c) 0 es ortogonal a cualquier vector u, puesto que 0 # u = 80, 0, 09 # 8u1, u2, u39 = 0. = s0dsu1 d + s0dsu2 d + s0dsu3 d Propiedades del producto punto y proyecciones de vectoresEl producto punto cumple varias de las leyes vlidas para productos ordinarios de nmeros reales (escalares). Propiedades del producto punto Si u, v y w son tres vectores cualesquiera y c es un escalar, entonces 1. u # v = v # u 3. u # sv + wd = u # v + u # w 5. 0 # u = 0. 2. scud # v = u # scvd = csu # vd 4. u # u = u 2 BIOGRAFA HISTRICA Carl Friedrich Gauss (17771855) Demostracin de las propiedades 1 y 3 Las propiedades son fciles de demostrar usando la definicin. Por ejemplo, aqu estn las demostraciones de las propiedades 1 y 3. 1. 3.Q u v u # v = u1 v1 + u2 v2 + u3 v3 = u1 u1 + v2 u2 + v3 u3 = v # u u # v + wd = 8u1, u2 , u39 # 8v1 + w1, v2 + w2 , v3 + w39 = u1sv1 + w1 d + u2sv2 + w2 d + u3sv3 + w3 d = u1 v1 + u1 w1 + u2 v2 + u2 w2 + u3 v3 + u3 w3 = su1 v1 + u2 v2 + u3 v3 d + su1 w1 + u2 w2 + u3 w3 d P Q u v R P R S = u # v + u # w Regresemos ahora al problema planteado al principio de esta seccin: la proyeccin de 1 1 un vector sobre otro. El vector proyeccin de u = PQ sobre un vector no nulo v = PS (figura 1 12.23) es el vector PR determinado al trazar una perpendicular desde Q hasta la recta PS. La notacin para este vector es S FIGURA 12.23 sobre v. El vector proyeccin de u proy v (el vector proyeccin de u sobre v). Si u representa una fuerza, entonces la proyeccin de u sobre v es agudo, proy u tiene la longitud uu cos u y direccin yvu (figura 12.24). Si u es obtuso, cos u < 0, y proy u tiene una longitud 2uu cos u y direccin 2yvu. En ambos casos Fuerza v u proy u proy u = s u cos ud = a = a u # v b v v v2 v v u cos u = u v cos u = v u # v FIGURA 12.24 Si tiramos de la caja con una fuerza u, la fuerza efectiva que mueve la caja en la direccin v es la proyeccin de u sobre v. 678 Captulo 12: Los vectores y la geometra del espacio u proy u Longitud u cos (b) v v FIGURA 12.25 La longitud de proy u es (a) uu cos u si cos u \$ 0 y (b) 2uu cos u si cos u < 0. El nmero uu cos u se conoce como el componente escalar de u en la direccin de v (de u sobre v).

Resumiendo: El vector proyeccin de u sobre v es el vector proy v u = a u # v b v. v2(1) El componente escalar de u en la direccin de v es el escalar u cos u = v u # v = u # . v v(2) Observe que tanto el vector proyeccin de u sobre v como el componente escalar de u sobre v dependen de la direccin del vector v y no de su longitud (pues hacemos el producto punto de u con yvu, que es la direccin de v). EJEMPLO 5 Determine el vector proyeccin de u 5 6i 1 2j 1 2k sobre v 5 i 2 j 2 2k y el componente escalar de u en la direcc