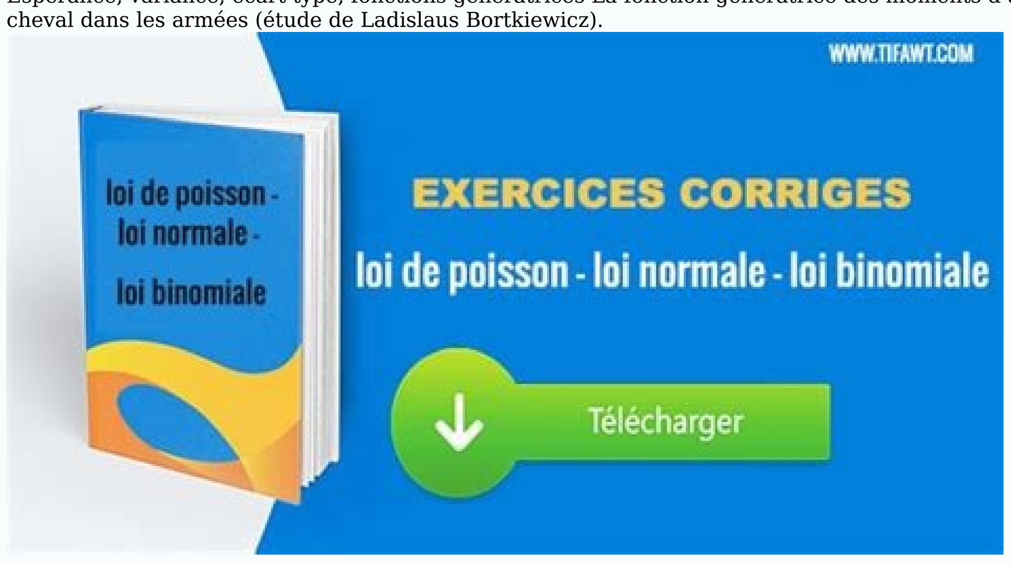
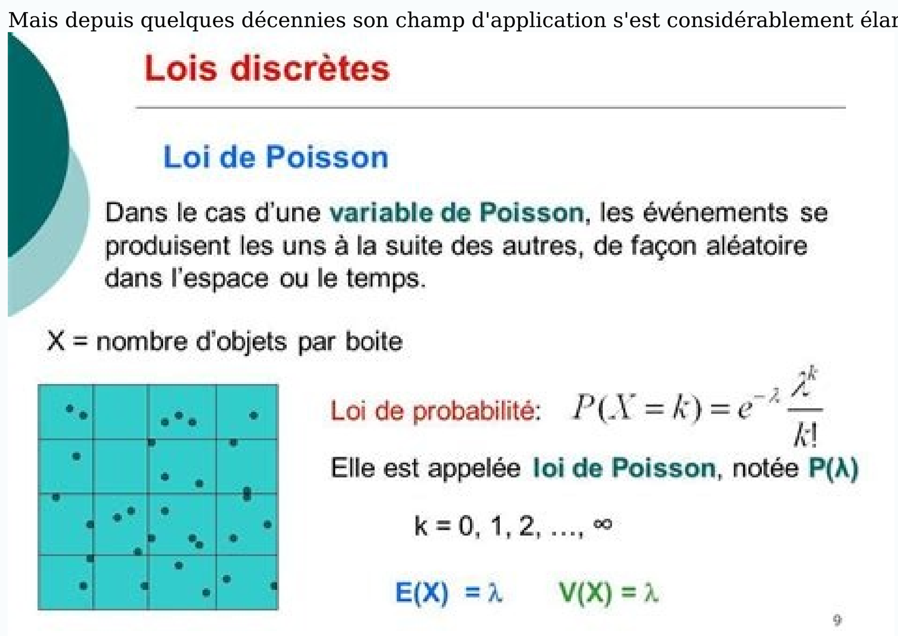
Loi de poisson probabilité exercice corrigé pdf. La loi de poisson probabilité exercice corrigé.

 ChronoMath, une chronologie des MATH�MATIQUES � l'usage des professeurs de math�matiques, des �tudiants et des �l�ves des lyc�es & coll�ges On a r�pertori� dans une usine le nombre d'accidents mineurs subis par le personnel dans une journ�e de travail sur une p�riode de 200 jours. hinduism and buddhism primary sources worksheet answers Ces accidents sont survenus ind�pendamment les uns des autres. Les r�sultats sont consign�s dans le tableau suivant : Nombre d'accidents 0 1 2 3 4 5 Nombre de jours 86 82 22 7 2 1 ➔ par exemple, la colonne 4 indique que le nombre de journ�es o� il s'est produit 2 accidents est de 22. 1�/ Quel est le nombre moyen d'accidents par jour ? Interpr�ter concr�tement le r�sultat trouv�. 2�/ On ajuste cette distribution par une loi de Poisson. client satisfaction questionnaire csq 8 pdf Justifier cette d�cision et pr�ciser cette loi; Comparer avec un ajustement par la loi binomiale. 3�/ Quel est le nombre th�orique de jours o� il se produit moins de 3 accidents ? Comparer avec la r�alit�. Si vous séchez après avoir bien cherché : ����   © Serge Mehl - www.chronomath.com 1�/ Appelons X la variable al�atoire �gale au nombre d'accidents recens�s par jour; les valeurs possibles de X sont enti�res (variable discr�te) et varient de 0 � 5.
A chacune de ces valeurs xi , on associe sa probabilit� de r�alisation pi : nombre de jours d'apparitions divis� par 200.
Nombre xi d'accidents 0 1 2 3 4 5 Probabilit�s pi 0,43 0,41 0,11 0,035 0,01 0,005 Le nombre moyen d'accidents par jours est alors l'esp�rance math�matique de X : E(X) = Σxipi = (0 × 86 + 1 × 82 + 2 × 22 + 3 × 7 + 4 × 2 + 5 × 1)/200 = 0,8 = 4/5 On peut �noncer qu'il y a en moyenne 0,8 accidents par jour ou, plus concr�tement, 4 accidents en moyenne tous les 5 jours. » C'est une moyenne : comme l'indique la statistique (86 jours sans accident), on pourrait constater aucun accident pendant plusieurs jours cons�cutifs ! 2�/ La loi de Poisson est la loi des "anomalies" ind�pendantes et de faible probabilit�. On peut l'appliquer ici a priori directement, faute d'autres informations sur la survenue des accidents. Afin de mieux s'en convaincre, en notant que les accidents sont consid�r�s comme des �v�nements ind�pendants, on peut interpr�ter X comme une variable binomiale de param�tre n = 200 (nombre d'�preuves) de moyenne np = 0,8. Par suite p = 0,004. On est tout � fait dans le champ d'approximation de la loi de Poisson : n > 50, p ≤ 0,1 et np = 0,8 ≤ 10. Le param�tre de cette loi sera λ = np = 0,8 et : Prob(X = k) = e-0,8(0,8)k/k! Tableaux comparatifs : La derni�re ligne indique les probabilit�s obtenues par la loi binomiale, tr�s peu pratique ici eu �gard au grand nombre d'observation (manipulation de combinaisons et puissances) : Pr{B = k} = Cnk x pkqn-k. Par exemple : Pr{B = 2} = × (0,004)2(0,996)198 = 200 × 199/2 × 0,000016 × 0,452219... ≃ 0,144 Nombre xi d'accidents 0 1 2 3 4 5 Nombre de jours 86 82 22 7 2 1 pi 0,43 0,41 0,11 0,035 0,01 0,005 pi th�oriques selon Poisson 0,449 0,359 0,144 0,038 0,008 0,001 pi selon loi binomiale 0,448 0,360 0,144 0,038 0,0075 0,001 3�/ La probabilit� de voir survenir moins de 3 accidents est th�oriquement 0,449 + 0,359 + 0,144 = 0,952. Le nombre th�orique de jours o� il se produit moins de 3 accidents est donc 0,952 × 200 = 190,4, nombre arrondi � 190. Le nombre fourni par la r�alit� (statistique) est : 86 + 82 + 22 = 190. On remarque un bon ajustement par la loi de Poisson. Le cas k = 5 est moins convaincant mais il est marginal. © Serge Mehl - www.chronomath.com Pour les articles homonymes, voir Poisson (homonymie). En théorie des probabilités et en statistiques, la loi de Poisson est une loi de probabilité discrète qui décrit le comportement du nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps fixé, si ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent. La loi de Poisson est également pertinente pour décrire le nombre d'évènements dans d'autres types d'intervalles, spatiaux plutôt que temporels, comme des segments, surfaces ou volumes. La loi de Poisson a été introduite en 1838 par Siméon Denis Poisson (1781–1840), dans son ouvrage Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile [2]. Le sujet principal de cet ouvrage consiste en certaines variables aléatoires N qui dénombrent, entre autres choses, le nombre d'occurrences (parfois appelées “arrivées”) qui prennent place pendant un laps de temps de longueur donnée. Si le nombre moyen d'occurrences dans cet intervalle est λ, alors la probabilité qu'il existe exactement k occurrences (k étant un entier naturel, k = 0, 1, 2, ...) est où On dit alors que X suit la loi de Poisson de paramètre λ. Par exemple, si un certain type d'évènements se produit en moyenne 4 fois par minute, pour étudier le nombre d'évènements se produisant dans un laps de temps de 10 minutes, on choisit comme modèle une loi de Poisson de paramètre λ = 10× 4 = 40.   Calcul de p(k) Ce calcul peut se faire de manière déductive en travaillant sur une loi binomiale de paramètres (T; λ/T). Pour T grand, on démontre que la loi binomiale converge vers la loi de Poisson. onn full motion wall mount 13 32 instructions Il peut aussi se faire de manière inductive en étudiant sur l'intervalle [0; T] les fonctions = probabilité que l'événement se produise k fois sur l'intervalle de temps [0 ; t]. En utilisant la récurrence et du calcul différentiel, on parvient à retrouver les formules précédentes. Espérance, variance, écart type, fonctions génératrices La fonction génératrice des moments d'une loi de Poisson est   Domaine d'application Le domaine d'application de la loi de Poisson a été longtemps limité à celui des événements rares comme les suicides d'enfants, les arrivées de bateaux dans un port ou les accidents dus aux coups de pied de cheval dans les armées (étude de Ladislaus Bortkiewicz).

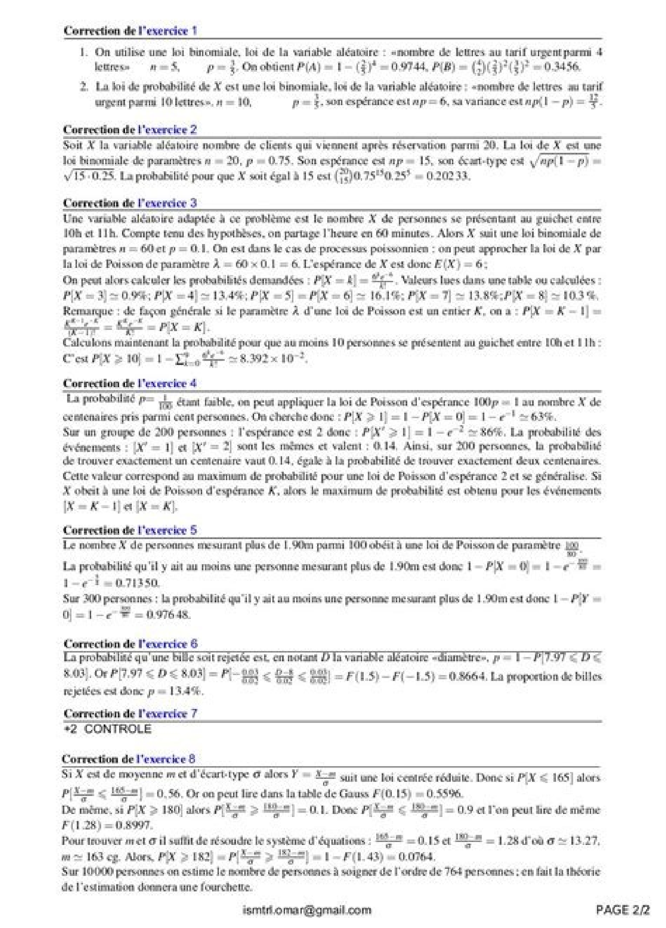


Mais depuis quelques décennies son champ d'application s'est considérablement élargi.



Actuellement, on l'utilise beaucoup dans les télécommunications (pour compter le nombre de communications dans un intervalle de temps donné), le contrôle de qualité statistique (nombre de défauts en SPC), la description de certains phénomènes liés à la désintégration radioactive (la désintégration des noyaux radioactifs suivant, par ailleurs, une loi exponentielle de paramètre noté aussi lambda), la biologie (mutations), la météorologie, la finance pour modéliser la probabilité de défaut d'un crédit…   Lien avec la loi de Bernoulli Le décompte des évènements rares se fait souvent au travers d'une somme de variables de Bernoulli, la rareté des évènements se traduisant par le fait que les paramètres de ces variables de Bernoulli sont petits (ainsi, la probabilité que chaque évènement survienne est faible). Le lien entre la loi de Poisson et les évènements rares peut alors s'énoncer ainsi : L'inégalité de Le Cam précise le paradigme de Poisson : soit un tableau de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, avec paramètres respectifs On note Inégalité de Le Cam[3] — Pour tout ensemble A d'entiers naturels, En particulier, si les deux conditions suivantes sont réunies : alors Sn converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ. musonugezigiparamavuz.pdf Dans l'énoncé du paradigme de Poisson, on fait deux hypothèses (vagues) sur les termes d'une somme Sn de variables de Bernoulli : les paramètres des variables de Bernoulli sont petits ; or les deux conditions ci-dessus entrainent que ce qui reformule l'hypothèse « les paramètres des variables de Bernoulli sont petits » de manière plus précise ; il y a un grand nombre de termes ; or les deux conditions ci-dessus entrainent que le nombre de termes tend vers l'infini : Remarques : Ce paradigme reste pertinent, dans certaines conditions, si l'on relaxe l'hypothèse d' indépendance[4]. Le cas particulier an=n, pk,n=λ/n, λn=λ, de l'inégalité de Le Cam, précise la rapidité de convergence de la loi binomiale de paramètres n et λ/n vers la loi de Poisson de paramètre λ.   Diagrammes en bâtons Comme toute loi de probabilité discrète, une loi de Poisson peut être représentée par un diagramme en bâtons. Ci-dessous sont représentés les diagrammes en bâtons des lois de Poisson de paramètres 1, 2 et 5. Lorsque le paramètre λ de la loi de Poisson devient grand, (pratiquement lorsqu'il est supérieur à 5), son diagramme en bâton est correctement approché par l'histogramme d'une loi normale d'espérance et de variance égales à λ (l'intervalle de classe étant égal à l'unité). Cette convergence était mise à profit, avant que les moyens informatiques ne se généralisent, pour utiliser la loi normale en lieu et place de la loi de Poisson dans certains tests.

Stabilité de la loi de Poisson par la somme Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ et µ, alors X+Y est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ + µ. Théorème — Si et sont indépendantes, alors   Intervalle de confiance Dans un article paru en 2012, le chercheur Vincenzo Guerriero propose une méthode rapide pour le calcul approximatif de l'intervalle de confiance de la moyenne [5]. Étant donné un nombre k des événements enregistrés (au moins 15-20 pour une approximation satisfaisante) pour N enregistrements dans un intervalle de temps - ou de la longueur, volume, etc. -, l'intervalle de confiance pour la moyenne λ est donné par: En littérature Dans le roman de Thomas Pynchon, L'Arc-en-ciel de la gravité, un des personnages, le statisticien Roger Mexico, utilise la loi de Poisson pour cartographier les zones d'impact des fusées allemandes V2 sur la ville de Londres durant la bataille d'Angleterre.



Correction de l'exercice 1

1. On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres au tarif urgent parmi 4 lettres» $n=5$, $p=\frac{3}{5}$. On obtient $P(A)=1-(\frac{2}{5})^4=0.9744$, $P(B)=\binom{4}{2}(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^2=0.3456$.
2. La loi de probabilité de X est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres au tarif urgent parmi 10 lettres», $n=10$, $p=\frac{3}{5}$, son espérance est $np=6$, sa variance est $np(1-p)=\frac{12}{5}$.

Correction de l'exercice 2

Soit X la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n=20$, $p=0.75$. Son espérance est $np=15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{15\cdot 0.25}$. La probabilité pour que X soit égal à 15 est $\binom{20}{15}0.75^{15}0.25^5=0.20233$.

Correction de l'exercice 3

Une variable aléatoire adaptée à ce problème est le nombre X de personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h. Compte tenu des hypothèses, on partage l'heure en 60 minutes. Alors X suit une loi binomiale de paramètres $n=60$ et $p=0.1$. On est dans le cas de processus poissonnien : on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda=60\times 0.1=6$. L'espérance de X est donc $E(X)=6$;
On peut alors calculer les probabilités demandées : $P[X=k]=\frac{6^k e^{-6}}{k!}$. Valeurs lues dans une table ou calculées : $P[X=3]\simeq 0.9\%$; $P[X=4]\simeq 13.4\%$; $P[X=5]=P[X=6]\simeq 16.1\%$; $P[X=7]\simeq 13.8\%$; $P[X=8]\simeq 10.3\,\%$.
Remarque : de façon générale si le paramètre λ d'une loi de Poisson est un entier K, on a : $P[X=K-1]=\frac{K^{K-1}e^{-K}}{(K-1)!}=\frac{K^K e^{-K}}{K!}=P[X=K]$.
Calculons maintenant la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h : C'est $P[X\geqslant 10]=1-\sum_{k=0}^{9}\frac{6^k e^{-6}}{k!}\simeq 8.392\times 10^{-2}$.

Correction de l'exercice 4

La probabilité $p=\frac{1}{100}$ étant faible, on peut appliquer la loi de Poisson d'espérance $100p=1$ au nombre X de centenaires pris parmi cent personnes. On cherche donc : $P[X\geqslant 1]=1-P[X=0]=1-e^{-1}\simeq 63\%$.
Sur un groupe de 200 personnes : l'espérance est 2 donc : $P[X'\geqslant 1]=1-e^{-2}\simeq 86\%$. La probabilité des événements : $[X'=1]$ et $[X'=2]$ sont les mêmes et valent : 0.14. Ainsi, sur 200 personnes, la probabilité de trouver exactement un centenaire vaut 0.14, égale à la probabilité de trouver exactement deux centenaires. Cette valeur correspond au maximum de probabilité pour une loi de Poisson d'espérance 2 et se généralise. Si X obéit à une loi de Poisson d'espérance K, alors le maximum de probabilité est obtenu pour les événements $[X=K-1]$ et $[X=K]$.

Correction de l'exercice 5

Le nombre X de personnes mesurant plus de 1.90m parmi 100 obéit à une loi de Poisson de paramètre $\frac{100}{80}$.
La probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1-P[X=0]=1-e^{-\frac{100}{80}}=1-e^{-\frac{5}{4}}=0.71350$.
Sur 300 personnes : la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1-P[Y=0]=1-e^{-\frac{300}{80}}=0.97648$.

Correction de l'exercice 6

La probabilité qu'une bille soit rejetée est, en notant D la variable aléatoire «diamètre», $p=1-P[7.97\leqslant D\leqslant 8.03]$. Or $P[7.97\leqslant D\leqslant 8.03]=P[-\frac{0.03}{0.02}\leqslant\frac{D-8}{0.02}\leqslant\frac{0.03}{0.02}]=F(1.5)-F(-1.5)=0.8664$. La proportion de billes rejetées est donc $p=13.4\%$.

Correction de l'exercice 7

•2 CONTROLE

Correction de l'exercice 8

Si X est de moyenne m et d'écart-type σ alors $Y=\frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite. Donc si $P[X\leqslant 165]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma}\leqslant\frac{165-m}{\sigma}]=0.56$. Or on peut lire dans la table de Gauss $F(0.15)=0.5596$.
De même, si $P[X\geqslant 180]$ alors $P[\frac{X-m}{\sigma}\geqslant\frac{180-m}{\sigma}]=0.1$. Donc $P[\frac{X-m}{\sigma}\leqslant\frac{180-m}{\sigma}]=0.9$ et l'on peut lire de même $F(1.28)=0.8997$.
Pour trouver m et σ il suffit de résoudre le système d'équations : $\frac{165-m}{\sigma}=0.15$ et $\frac{180-m}{\sigma}=1.28$ d'où $\sigma\simeq 13.27$, $m\simeq 163$ cg. Alors, $P[X\geqslant 182]=P[\frac{X-m}{\sigma}\geqslant\frac{182-m}{\sigma}]=1-F(1.43)=0.0764$.
Sur 10000 personnes on estime le nombre de personnes à soigner de l'ordre de 764 personnes ; en fait la théorie de l'estimation donnera une fourchette.

ismtrl.omar@gmail.com PAGE 2/2

Notes et références ↑ a et b Avec les conventions habituelles 0!=1 et 00=1, la définition de la loi de Poisson s'étend à λ=0 : on trouve alors p(0)=1 et, dès que k>0, p(k)=0. Ainsi une variable aléatoire nulle presque sûrement peut être vue comme suivant la loi de Poisson de paramètre 0. Cette convention est cohérente avec les propriétés essentielles de la loi de Poisson de paramètre strictement positif. Elle est commode, voire indispensable, par exemple lors de l'étude des processus ponctuels de Poisson.

↑ [1] ↑ L. brain_power_motor_controller_36v_manual_online_books.pdf Le Cam, « An Approximation Theorem for the Poisson Binomial Distribution », dans Pacific Journal of Mathematics, vol. 10, no 4, 1960, p. 1181–1197 [texte intégral (page consultée le 2009-05-13)] ↑ (en) A. D. Barbour, L. Holst et S. Janson, Poisson approximation, The Clarendon Press Oxford University Press, 1992 (ISBN 0198522355) . ↑ (en) Vincenzo Guerriero, « Power Law Distribution: Method of Multi-scale Inferential Statistics », dans Journal of Modern Mathematics Frontier, vol. 1, no 1, 2012, p. 21-28 [texte intégral]   Voir aussi   Articles connexes Portail des probabilités et de la statistique