Paulo Winterle

VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA

2ª edição

Capítulo 1 - Vetores

 Prof. Henrique A M Faria.

Tratamento Geométrico

Grandezas

Escalares

Vetoriais

Tratamento Geométrico

Grandezas

Escalares

Comprimento

Tempo

Massa

Corrente elétrica

Temperatura Termodinâmica

Quantidade de matéria

Intensidade luminosa

Vetoriais

Força

Velocidade

Aceleração

Campo Magnético

Direção e sentido

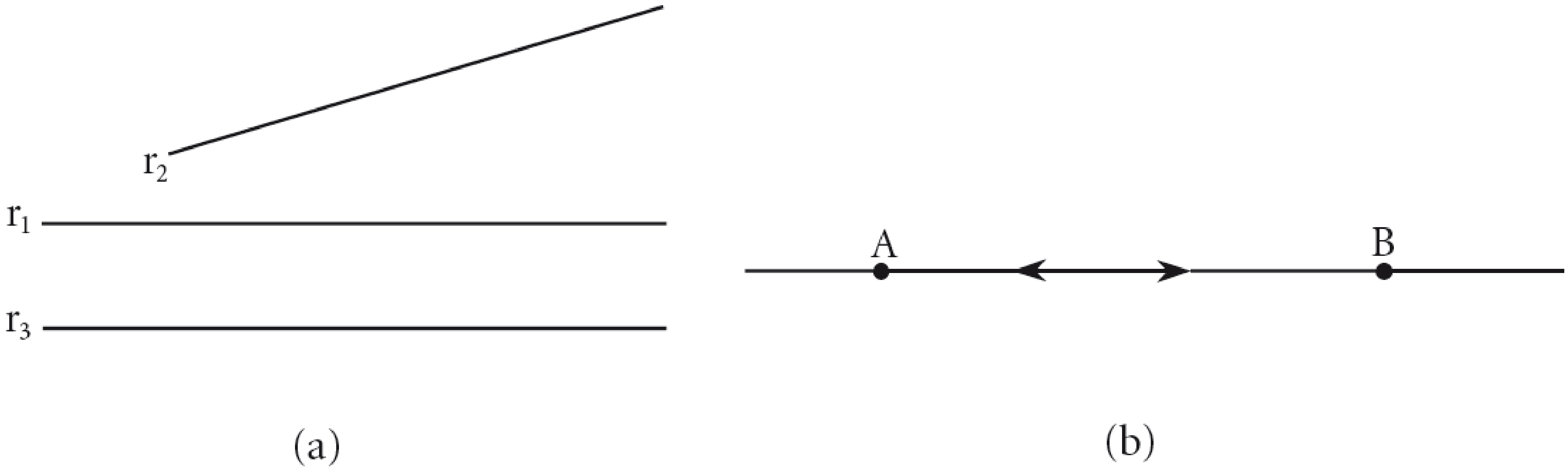


Figura 1.1

Exemplo de grandeza vetorial

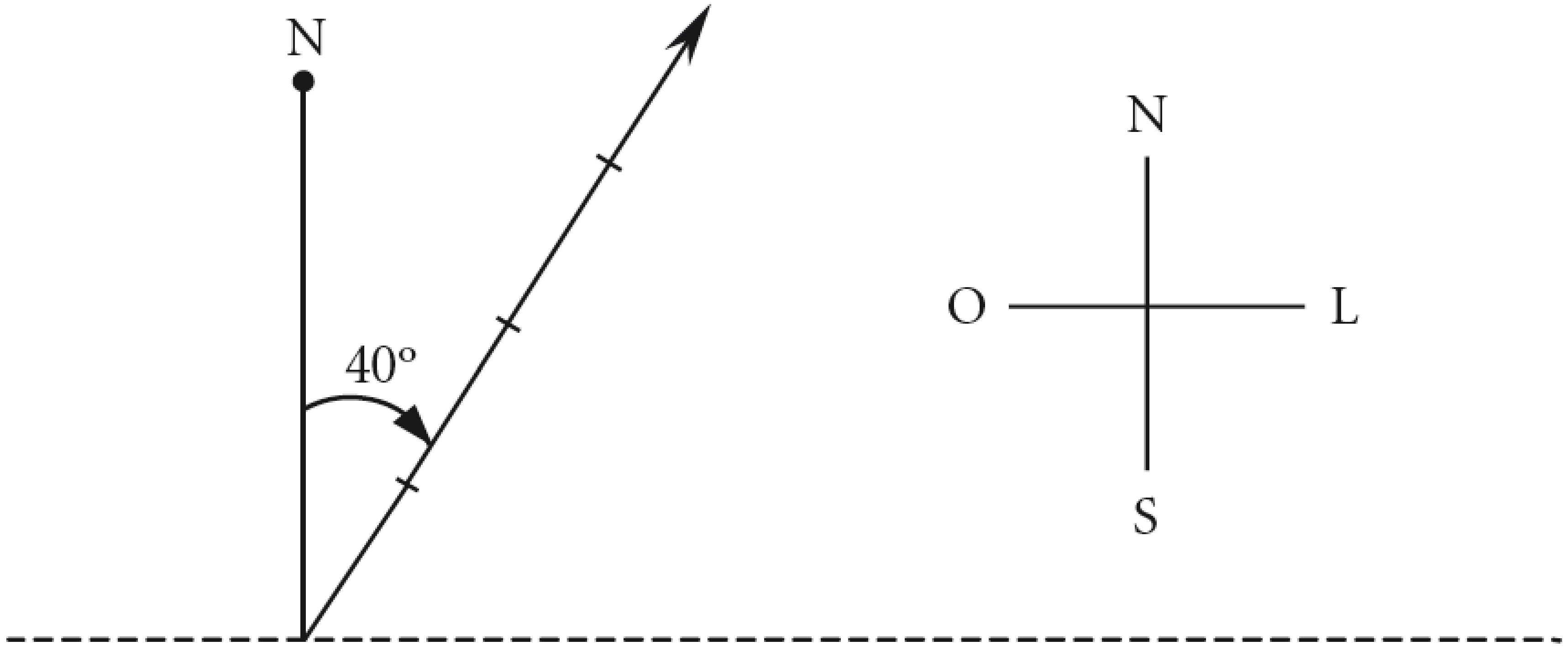


Figura 1.2

Vetor: segmento orientado

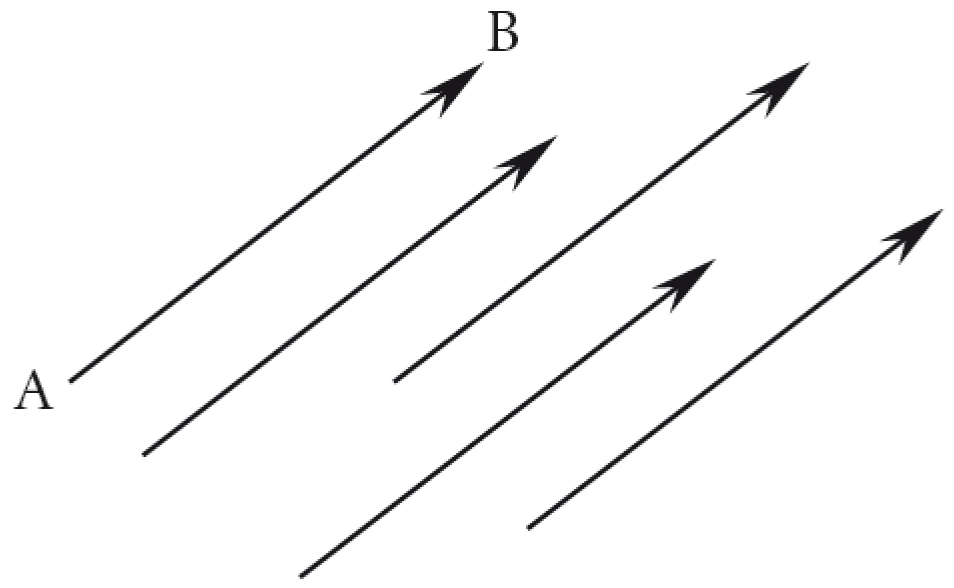


Figura 1.3

Todos os representantes paralelos e de mesmo comprimento representam o mesmo vetor.

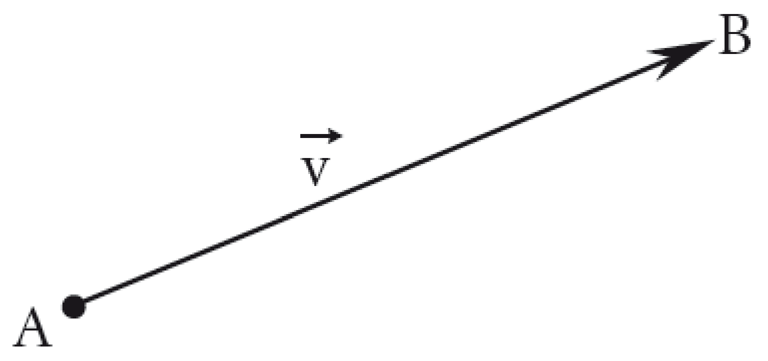


Figura 1.4

Cada ponto do espaço pode ser considerado como origem do segmento orientado.

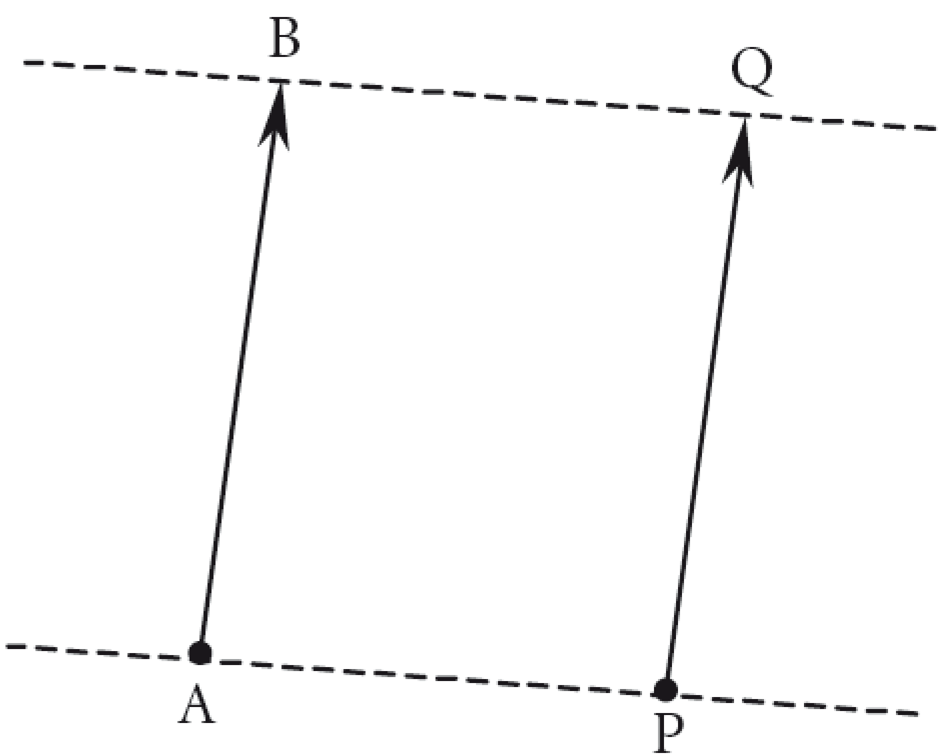
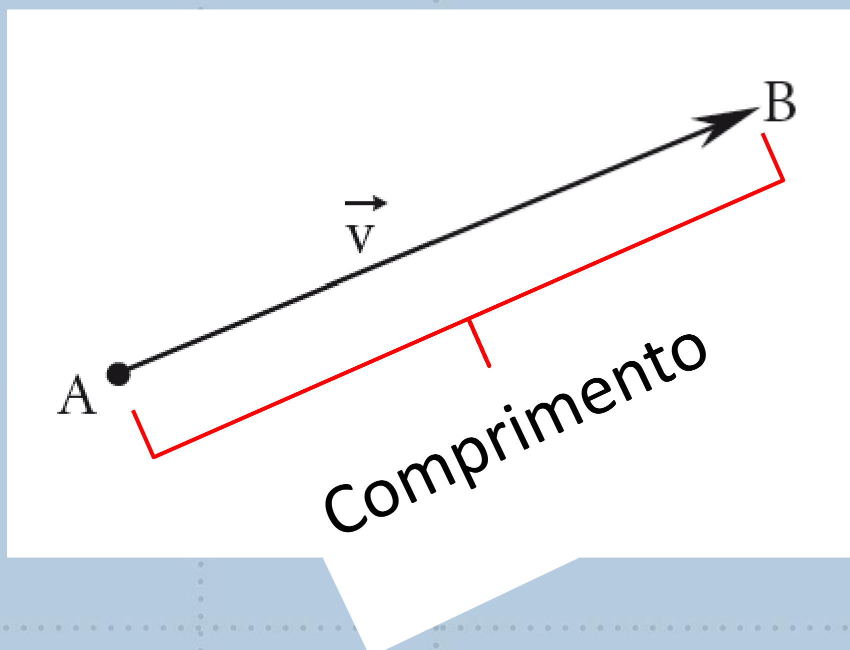


Figura 1.5

Módulo de um vetor

$$|\vec{v}| = |\overrightarrow{AB}|$$



 Prof. Henrique A M Faria.

Casos particulares de vetores

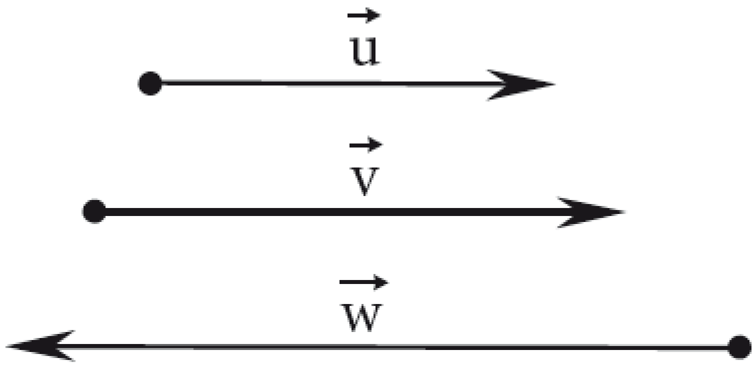


Figura 1.6

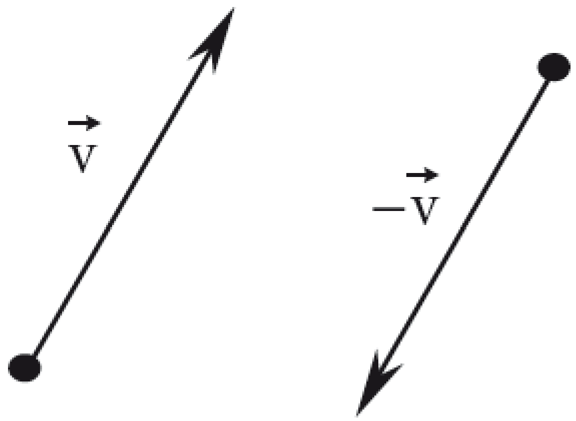


Figura 1.7

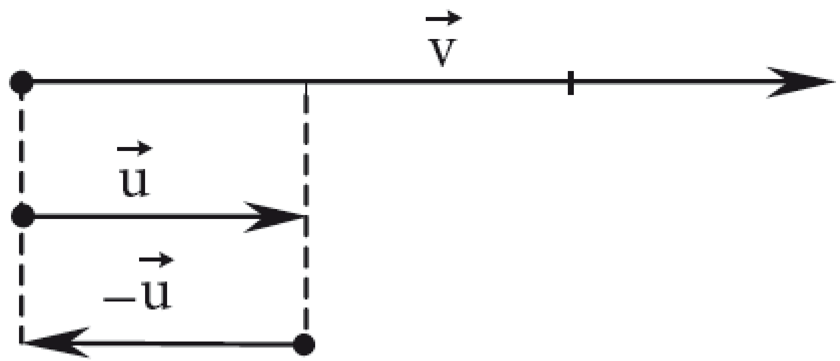


Figura 1.8

Versor

$$\vec{u}: unitário\ e\ mesmo\ sentido\ de\ \vec{v}.$$

Ortogonalidade

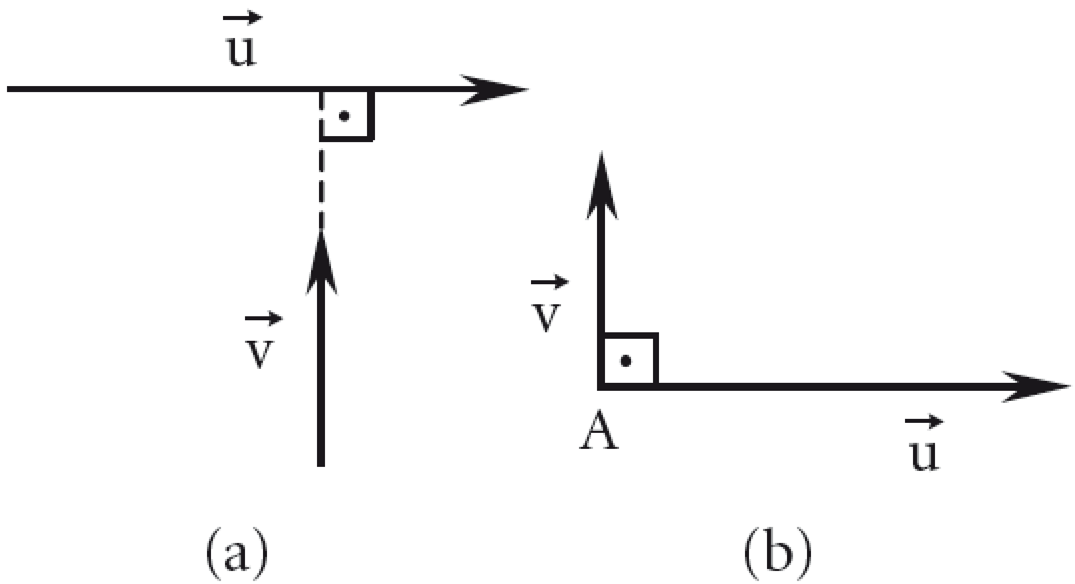


Figura 1.9

Vetores coplanares

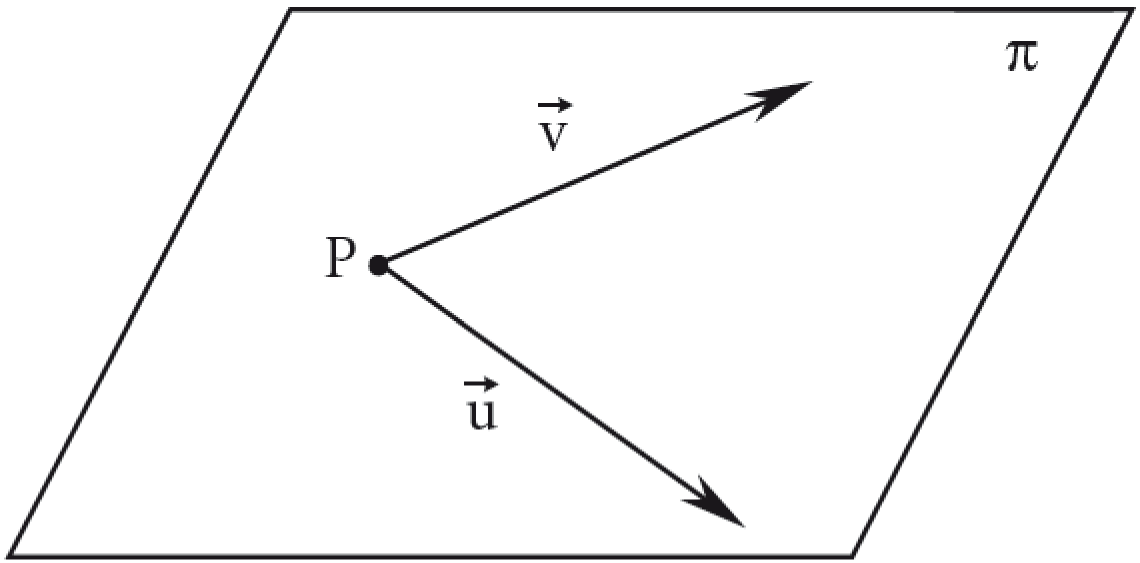


Figura 1.10

Vetores coplanares

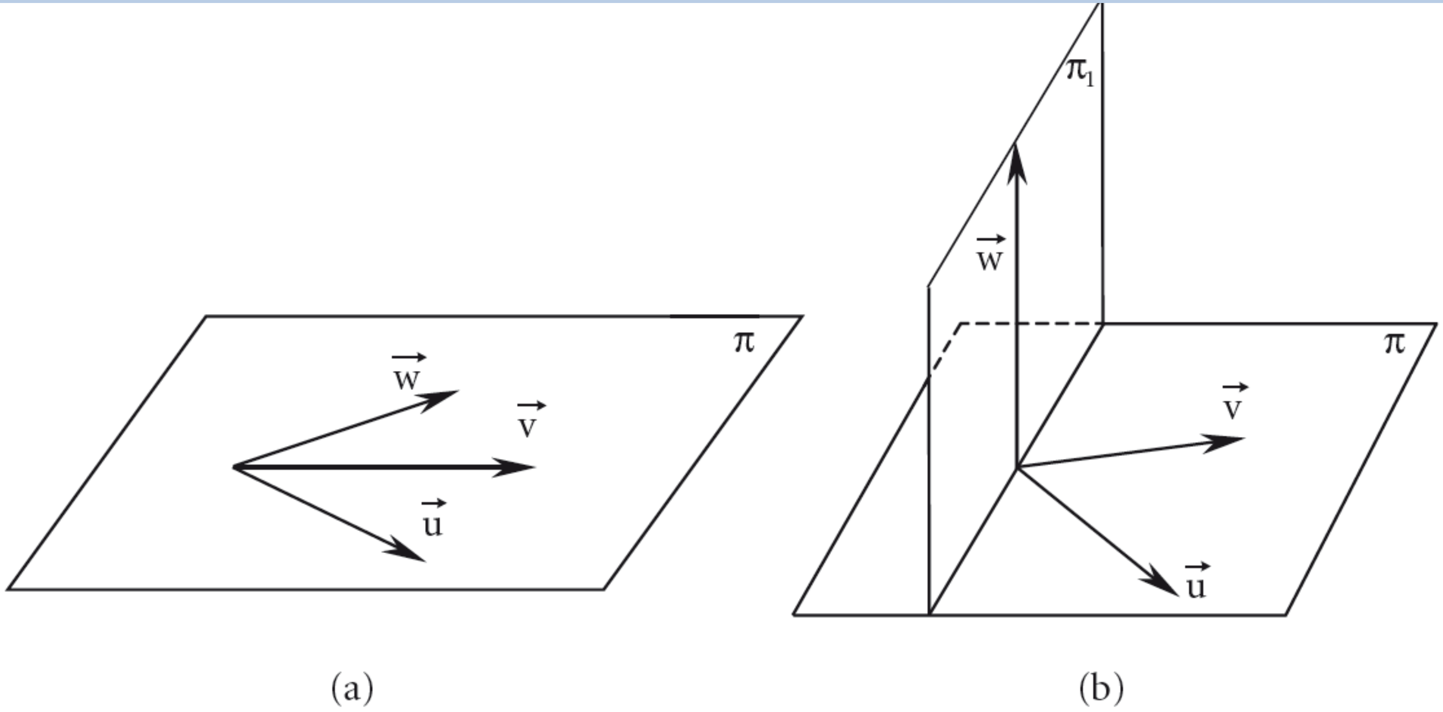


Figura 1.11

Exemplo: definir se é verdadeira ou falsa

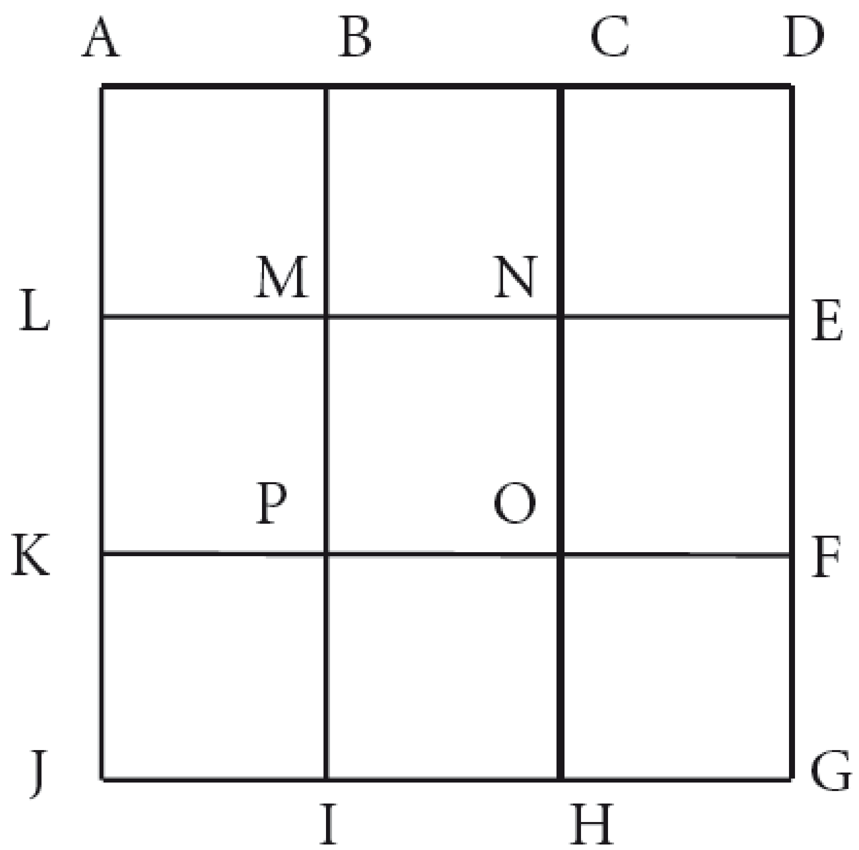


Figura 1.12

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$$

$$\overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{HI}$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{FP}\right|$$

Exercício (pag. 6): próxima aula

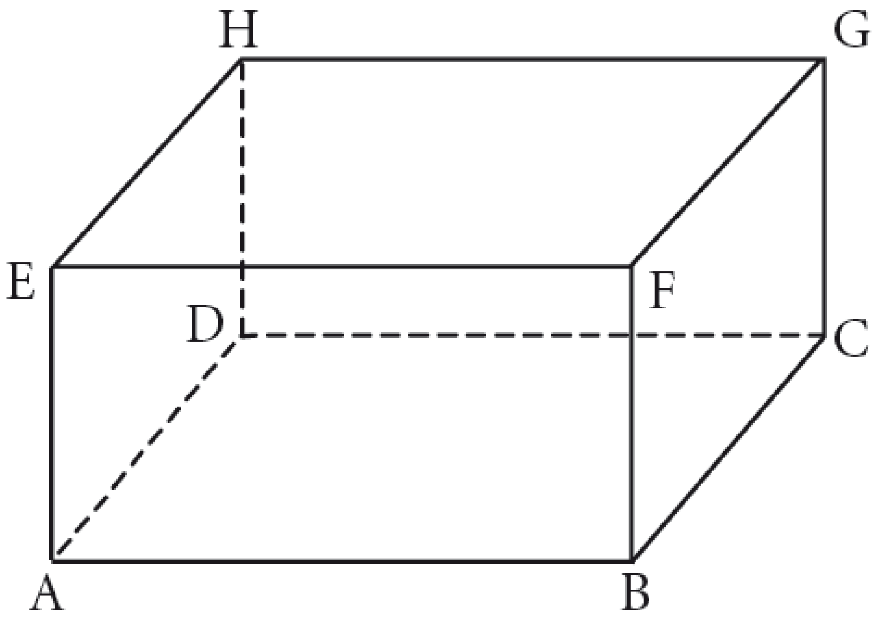


Figura 1.13

Na próxima aula ...

Operações com vetores

Operações com vetores

Adição

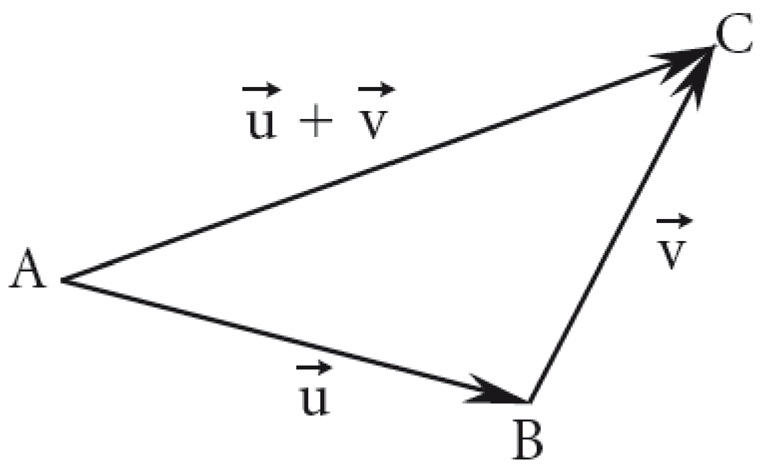


Figura 1.14

Adição pela regra do paralelogramo

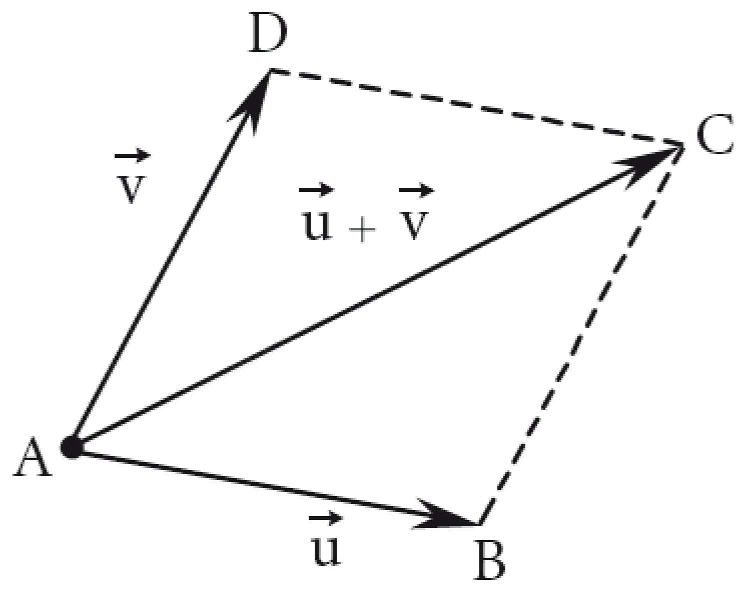


Figura 1.16

Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$

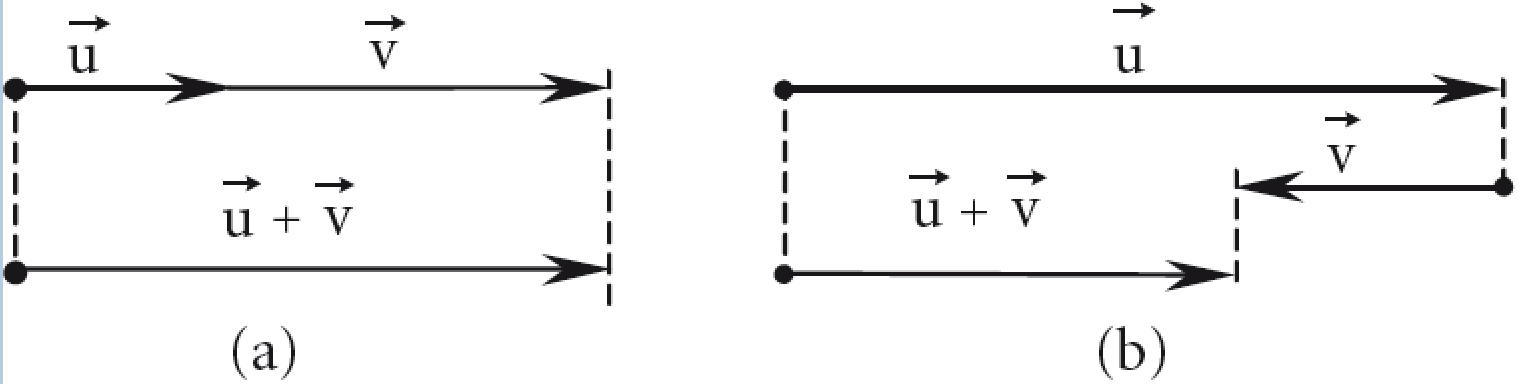


Figura 1.15

Soma de três ou mais vetores

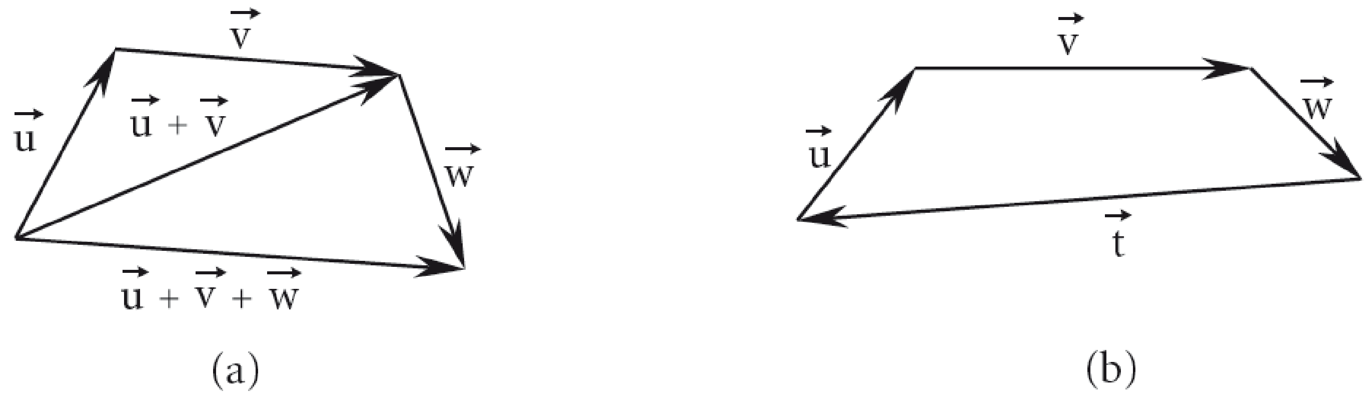


Figura 1.17

Propriedades da soma de vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer.

I) Comutativa:

II) Associativa:

III) Elemento neutro:

IV) Elemento oposto:

Propriedades da soma de vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer.

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa:

III) Elemento neutro:

IV) Elemento oposto:

Propriedades da soma de vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer.

I) Comutativa: $$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

II) Associativa: $$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

III) Elemento neutro:

IV) Elemento oposto:

Propriedades da soma de vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer.

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

IV) Elemento oposto:

Propriedades da soma de vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer.

I) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

II) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

III) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

IV) Elemento oposto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

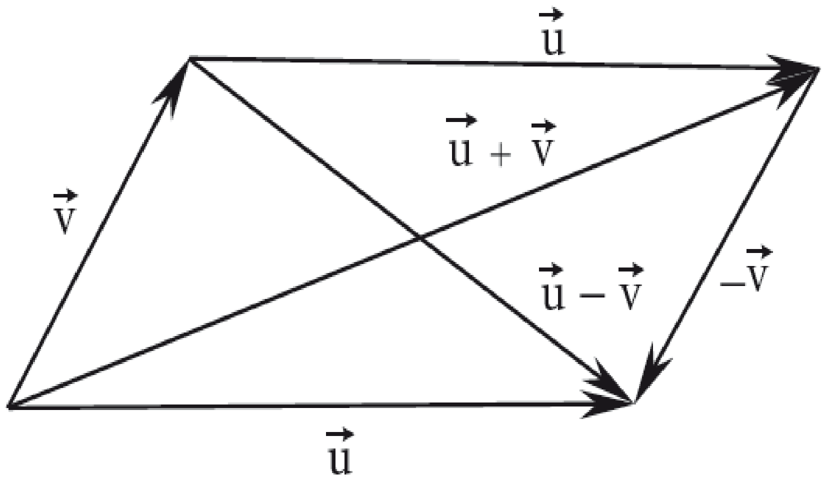


Figura 1.18

O vetor $\vec{u} - \vec{v}$ é chamado de diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

No paralelogramo uma das diagonais é a soma e a outra a diferença entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo (pag. 8)

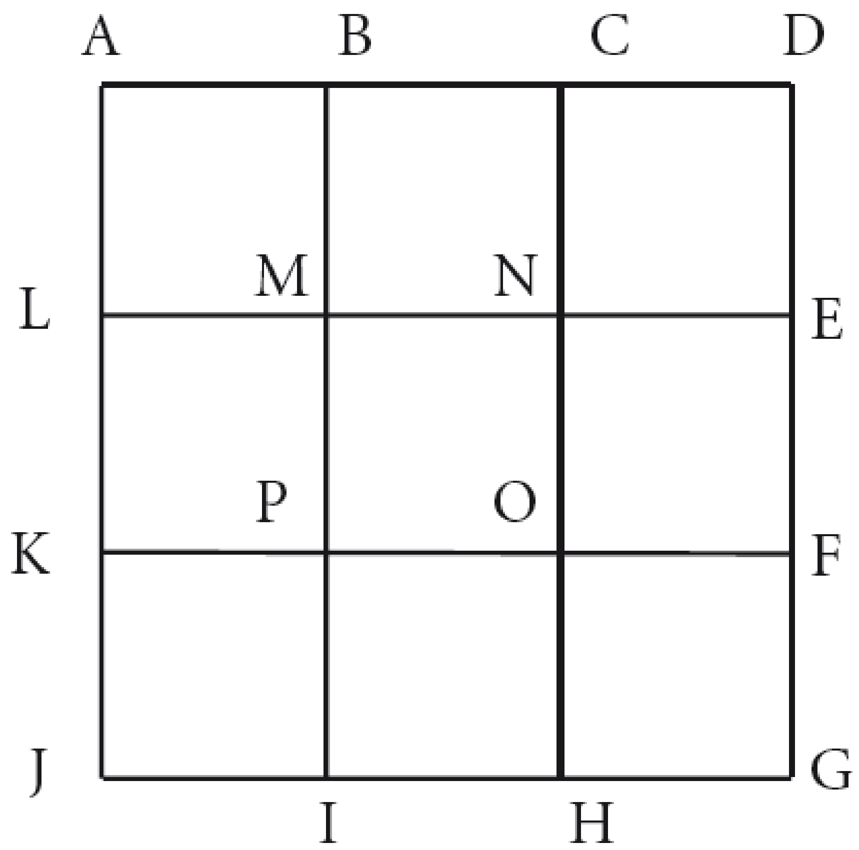


Figura 1.12

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} =$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} =$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} =$$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PB} =$$

Resolver os demais em casa...

Exercício com base figura 1.13 (pag. 8)

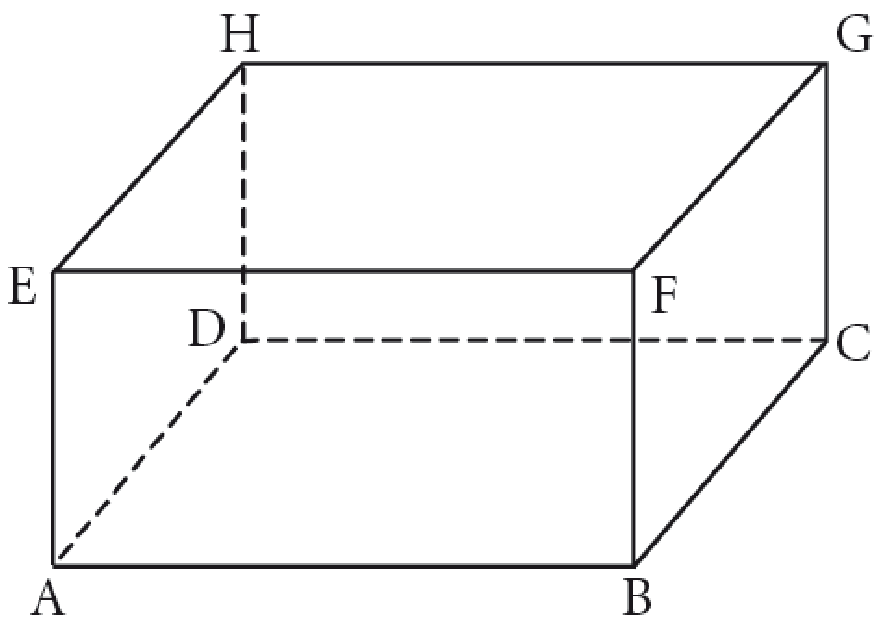


Figura 1.13

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} =$$

$$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH} =$$

$$\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{BC} =$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} =$$

Resolver os demais em casa...

Multiplicação de um número real por vetor

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $\propto \neq 0$,
Chama-se produto do número real $\propto$ pelo vetor $\vec{v}$,
o vetor $\propto \vec{v}$ tal que:

a) $|\propto \vec{v}| = |\propto|\,|\vec{v}|$

b) $\propto \vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$

c) Se $\propto > 0$, $\propto \vec{v}$ tem mesmo sentido de $\vec{v}$

Se $\propto < 0$, $\propto \vec{v}$ tem sentido contrário de $\vec{v}$

Se $\propto = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então: de $\propto \vec{v} = \vec{0}$

Multiplicação de um número real por vetor

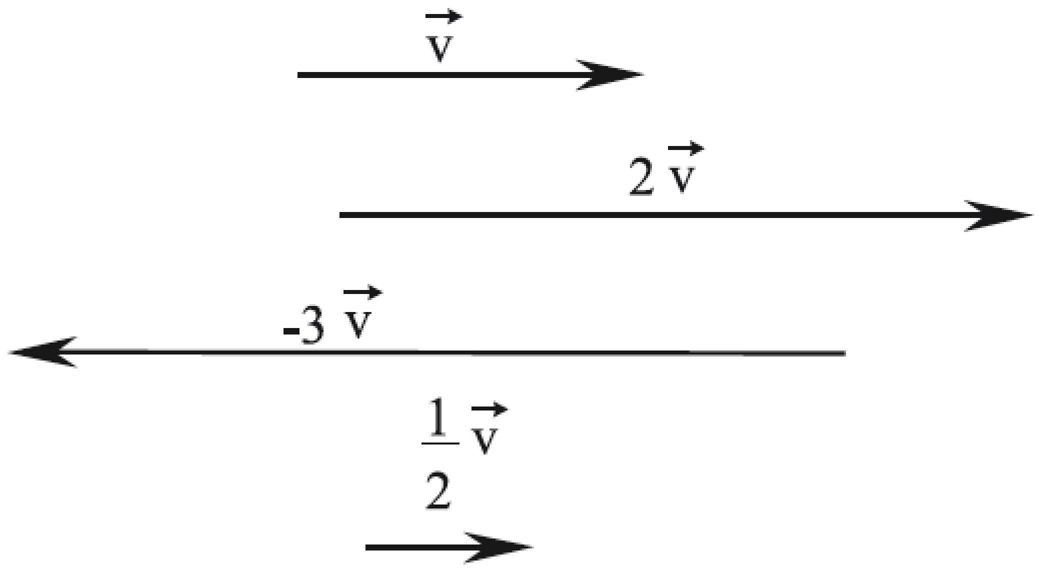


Figura 1.20

Vetores paralelos a $\vec{v}$

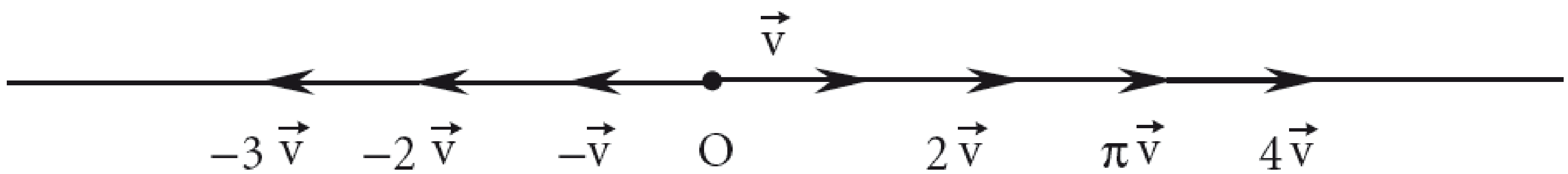


Figura 1.21

Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ sempre existe $\propto$ tal que $\vec{u} = \propto \vec{v}$

Figura 1.22

Se $\vec{v} \neq \vec{0}$ o versor de $\vec{v}$ é um vetor unitário de mesmo sentido de $\vec{v}$

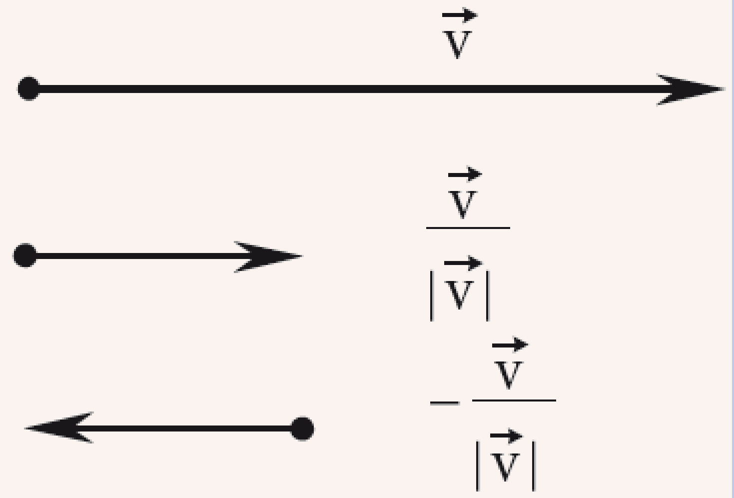


Figura 1.23

Propriedades da multiplicação de um número real por vetor

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ vetores quaisquer e $\propto, \beta$ números reais.

I) $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

II) $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

III) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

IV) $1\vec{v} = \vec{v}$

A figura 1.24 ilustra a propriedade III

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

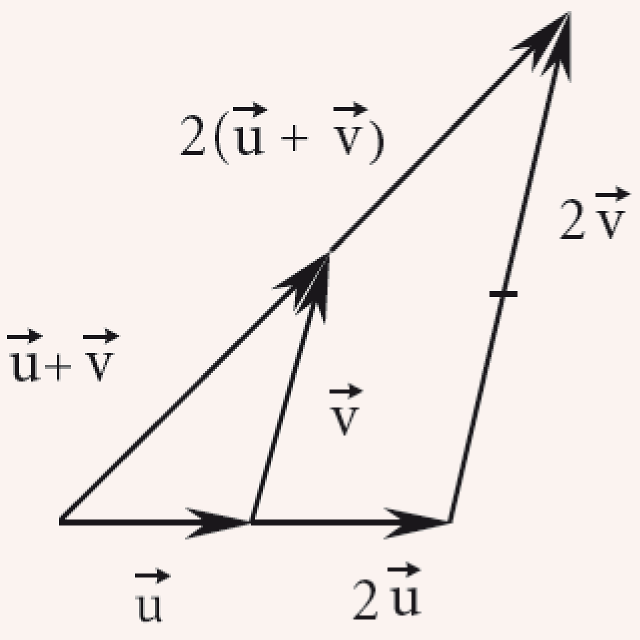


Figura 1.24

Ângulo entre dois vetores

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ não nulos e o ângulo θ formado por duas Semiretas OA e OB.

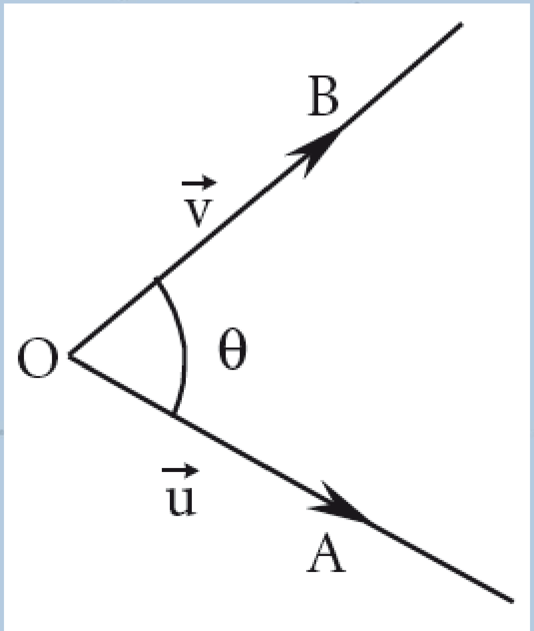


Figura 1.27

$$0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{(radianos)}$$

Casos especiais de ângulos entre vetores

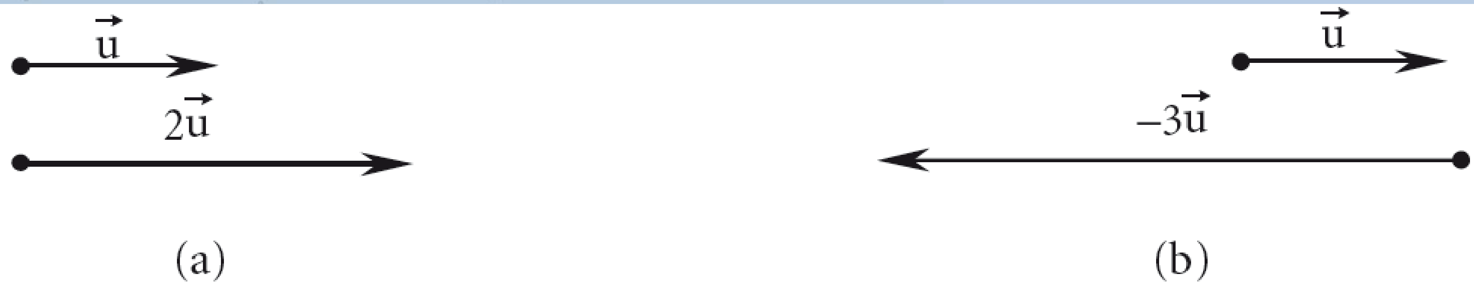


Figura 1.28

Resolver exercícios selecionados da página 13

Tratamento Algébrico

Tratamento Algébrico

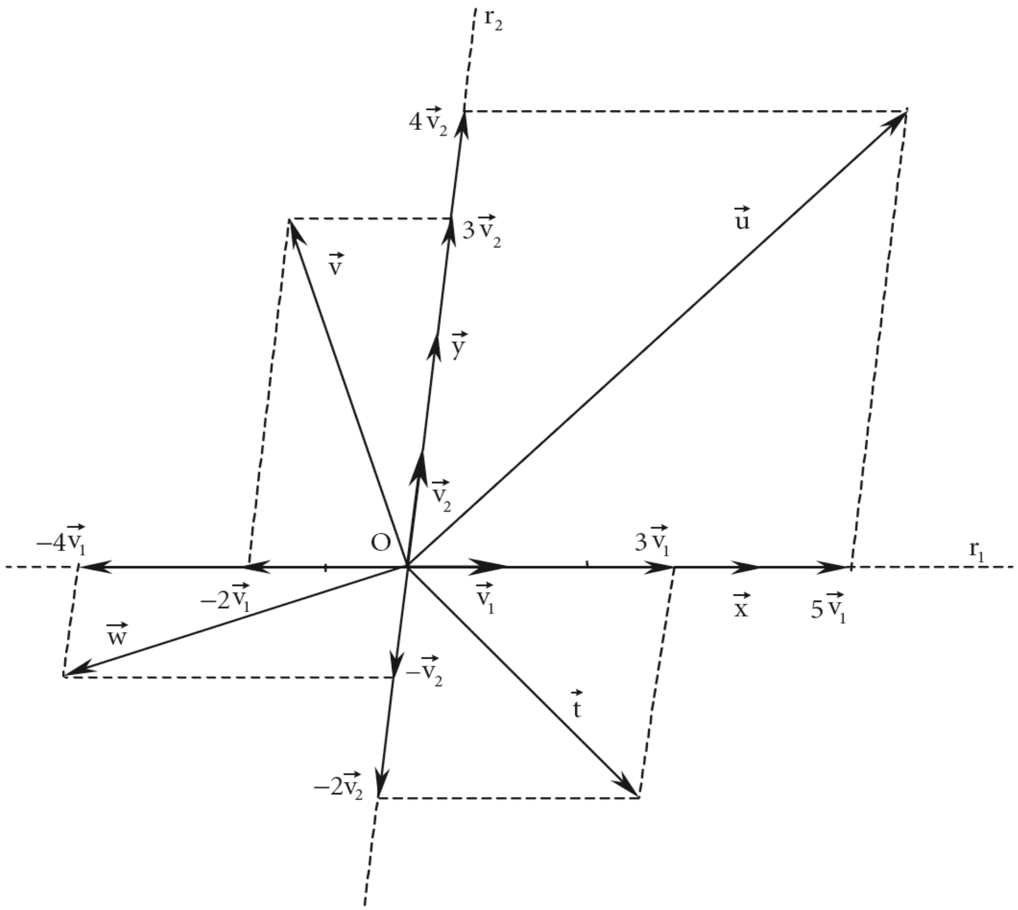


Figura 1.38

Combinação linear de dois vetores

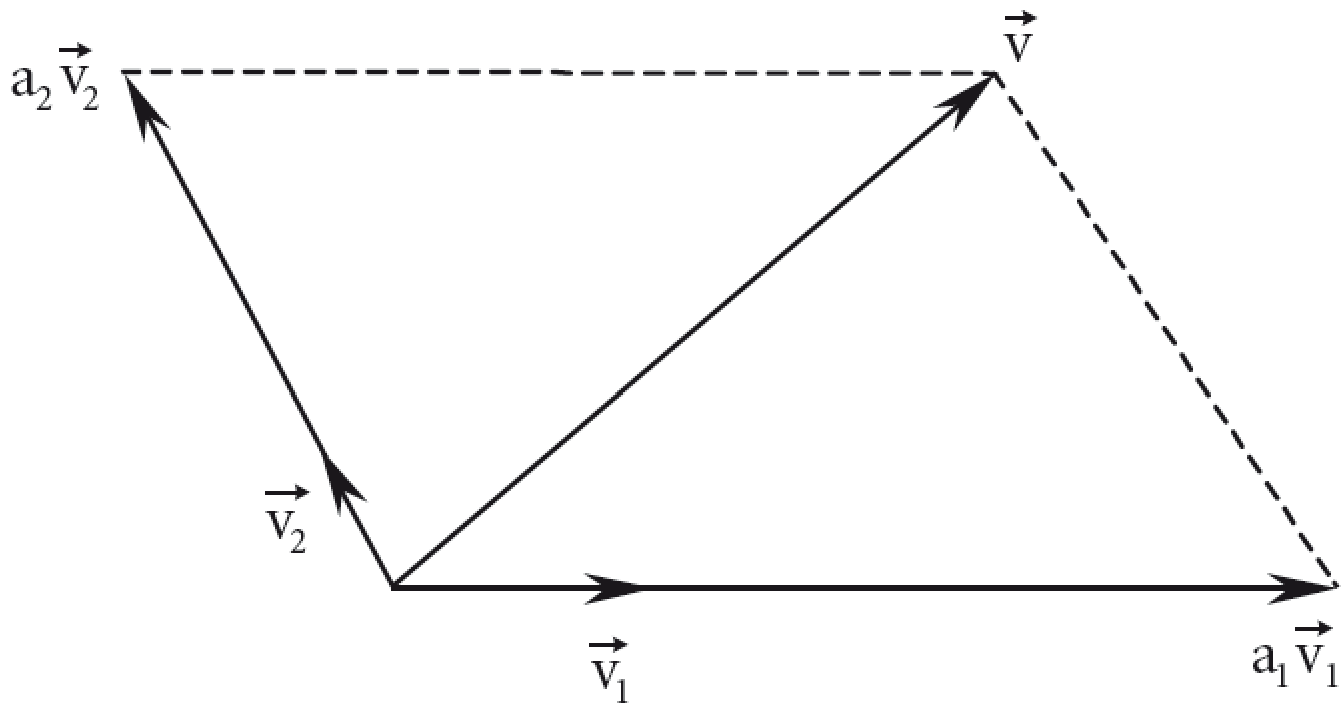


Figura 1.39

Base canônica

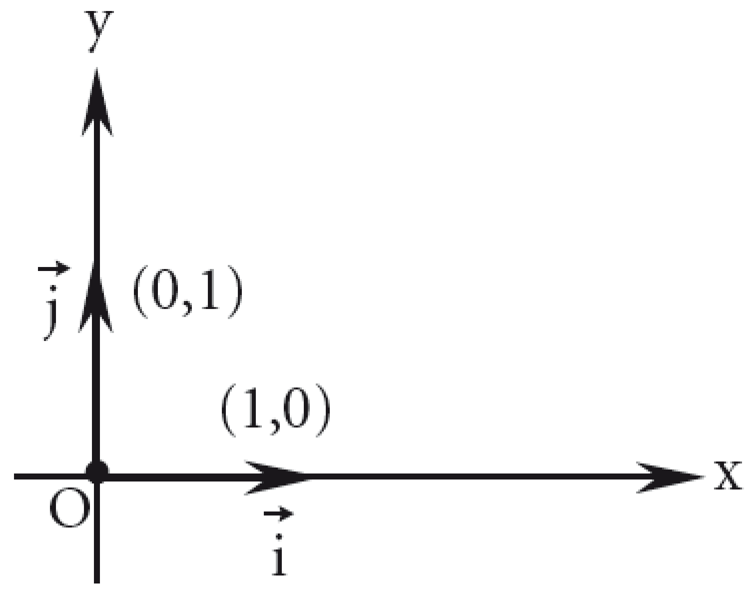


Figura 1.40

Vetor no plano

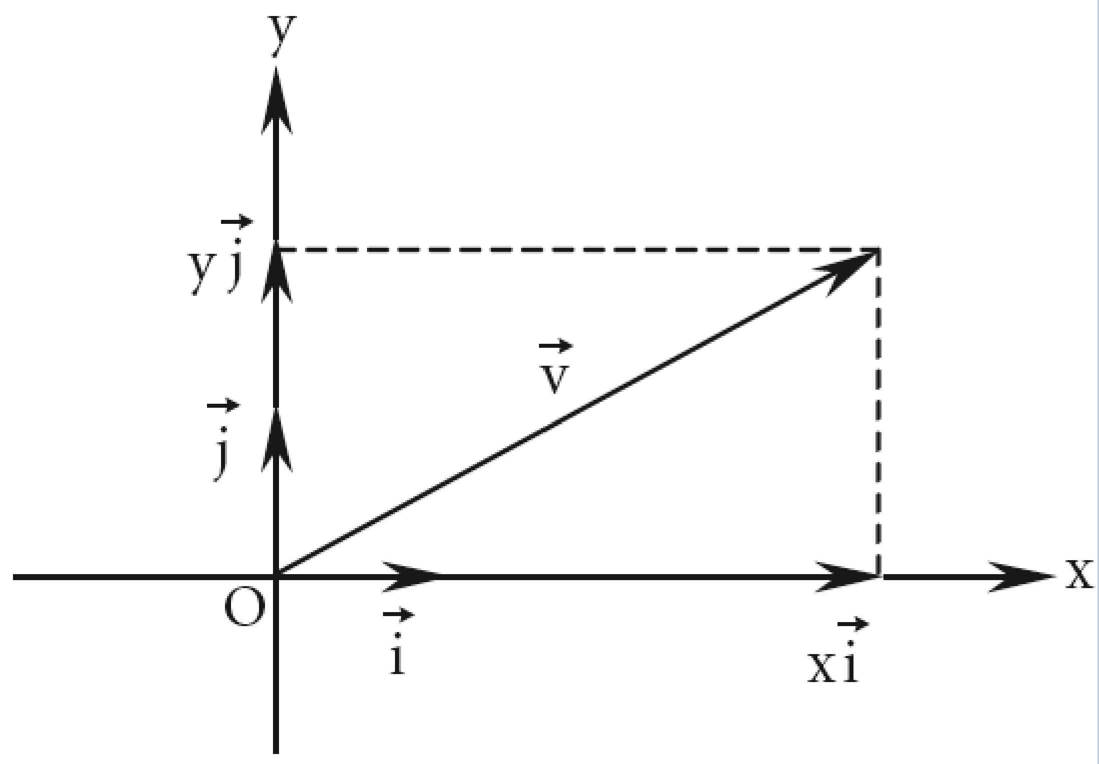


Figura 1.41

Exemplos

a) $3\vec{i} - 5\vec{j} = (3, -5)$

b) $3\vec{j} = (0, 3)$

c) $-4\vec{i} = (-4, 0)$

d) $\vec{0} = (0, 0)$

Ponto correspondente ao vetor

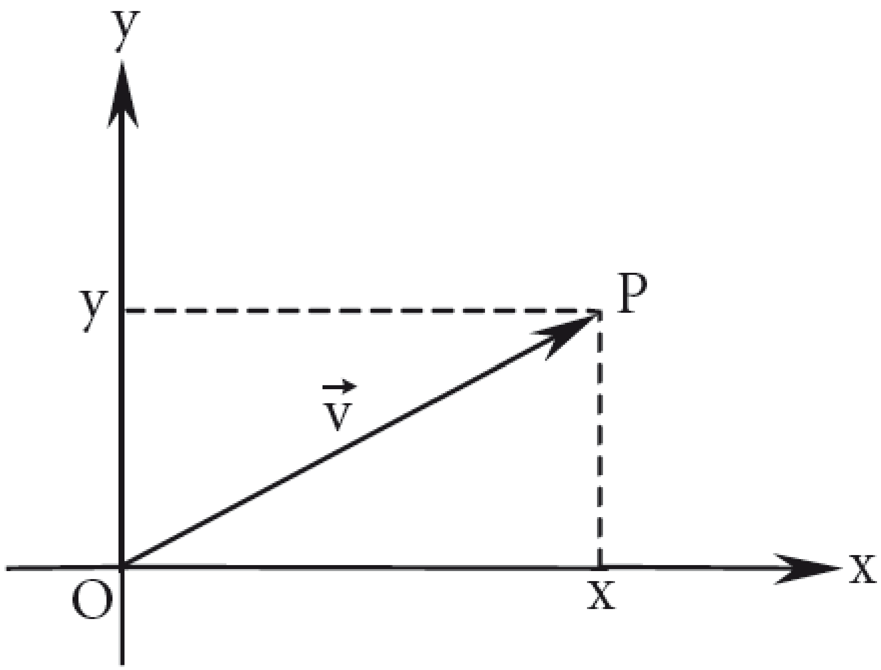
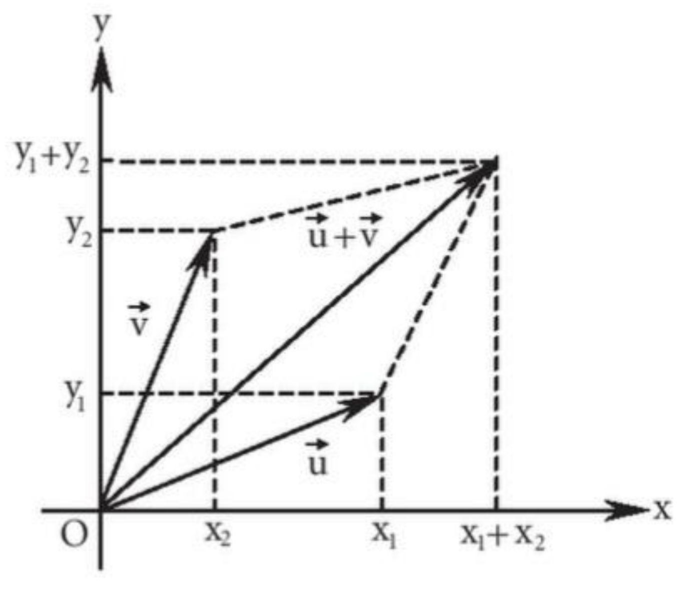


Figura 1.42

Operações com vetores forma analítica

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$ e $\propto \in \mathbb{R}$



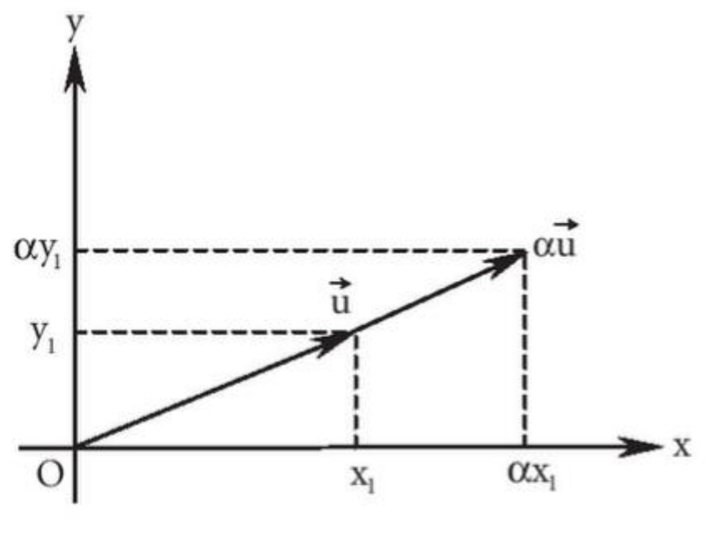
(a)

I) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

II) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

$$= (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Operações com vetores forma analítica



(b)

III) $$\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

IV) $$-\vec{u} = (-1)\vec{u}$$
$$= (-x_1, -y_1)$$

Exercícios 1

Demontre as propriedades abaixo utilizando as definições dos vetores em componente e as operações algébricas.
Considerar: $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2})$, $\propto \boldsymbol{e}\, \beta \in \mathbb{R}$

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

b) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

d) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

Exercícios 2

a) Dados os vetores: $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1,4)$ encontrar:

$$3\vec{u} + 2\vec{v} =$$

b) Dados os vetores: $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2,4)$ encontrar:

$$3\vec{x} + 2\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{x}$$

Vetor definido por dois pontos

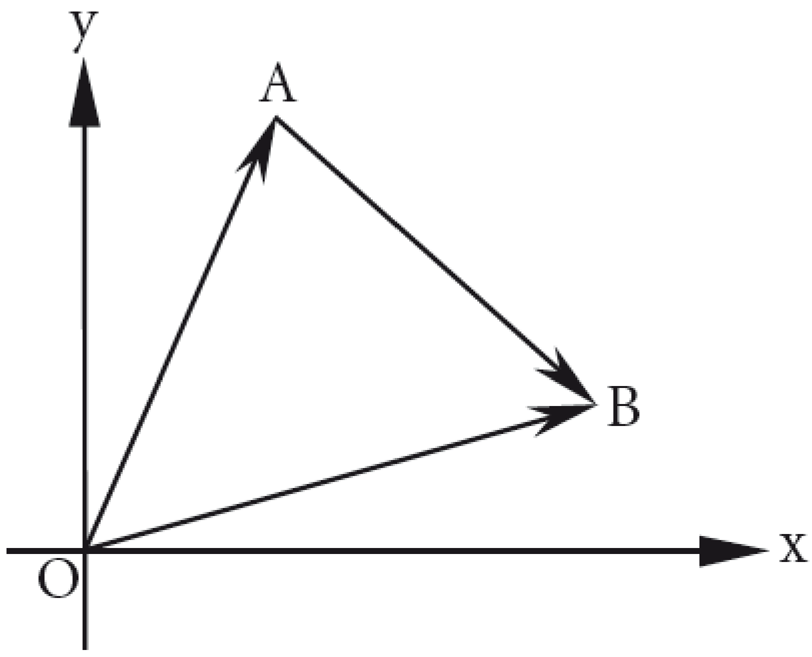


Figura 1.44

O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ é o vetor posição ou representante natural de $\overrightarrow{AB}$

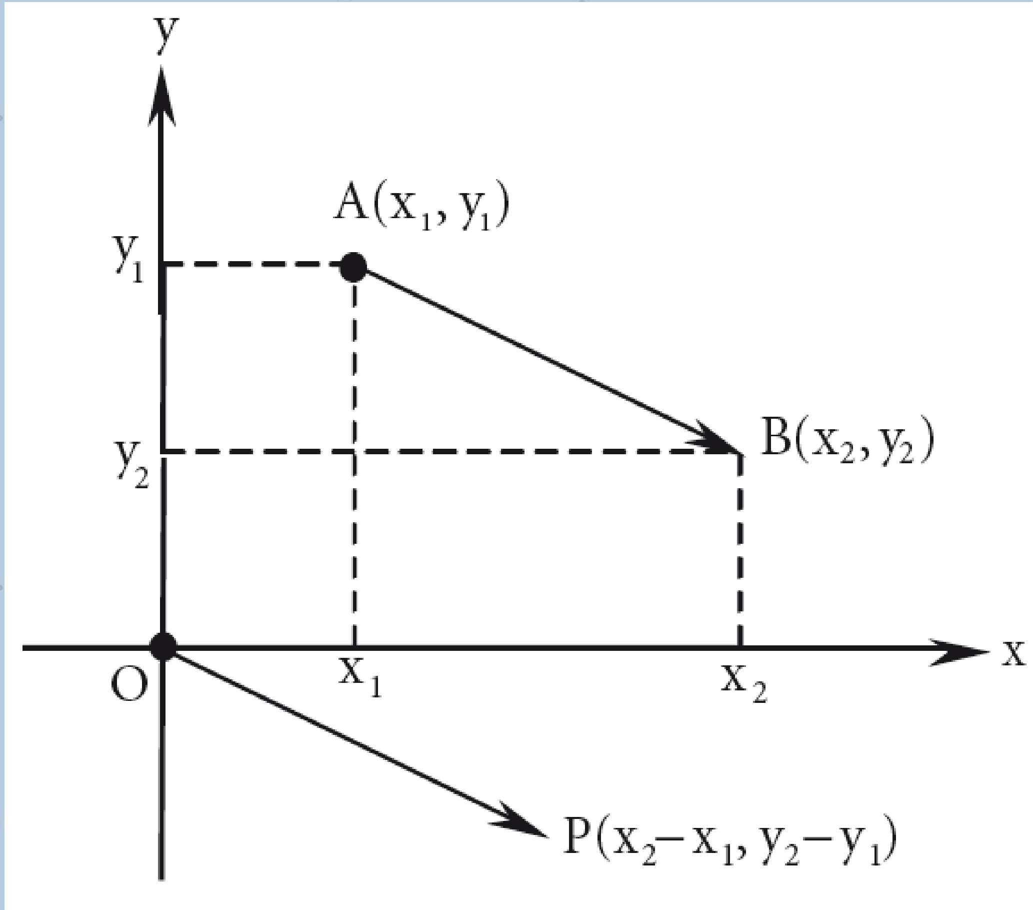


Figura 1.45

Segmentos que representam o mesmo vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$

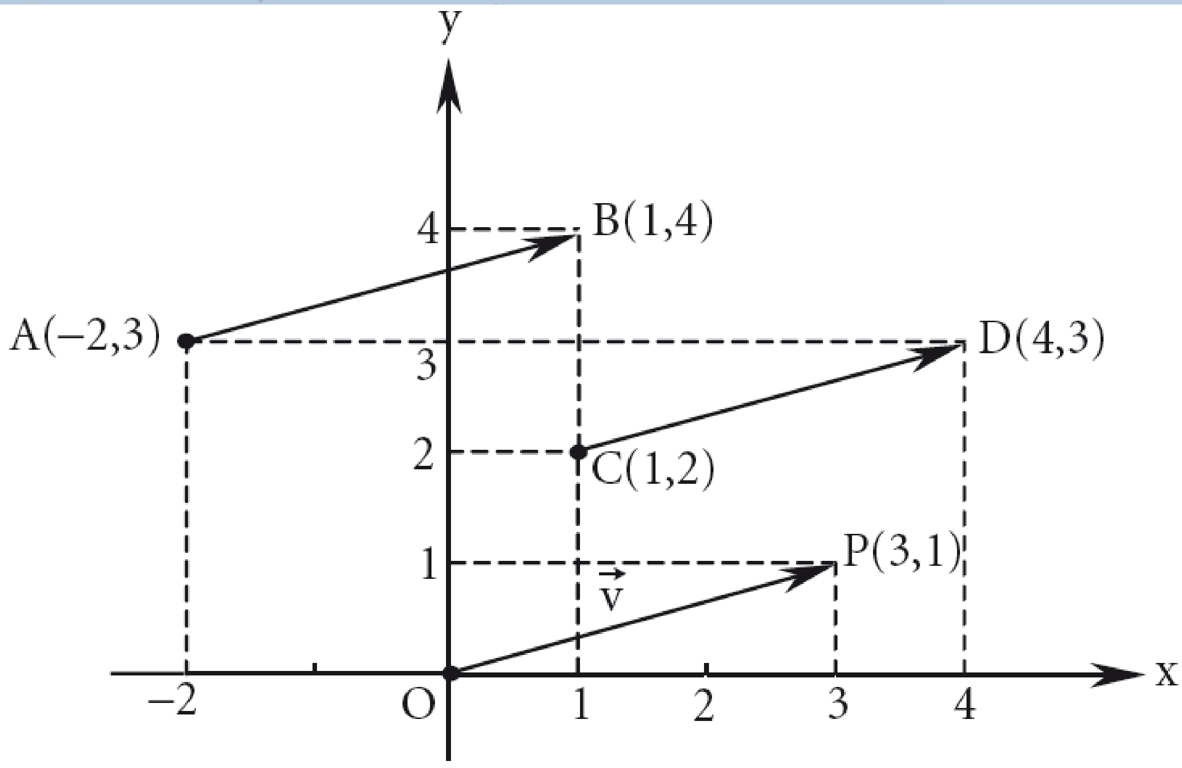


Figura 1.46

Exemplo

Dados os pontos $A(-1,2)$, $B(3,-1)$ e $C(-2,4)$ determine o ponto D de modo que

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Ponto Médio (M)

Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o ponto médio será:

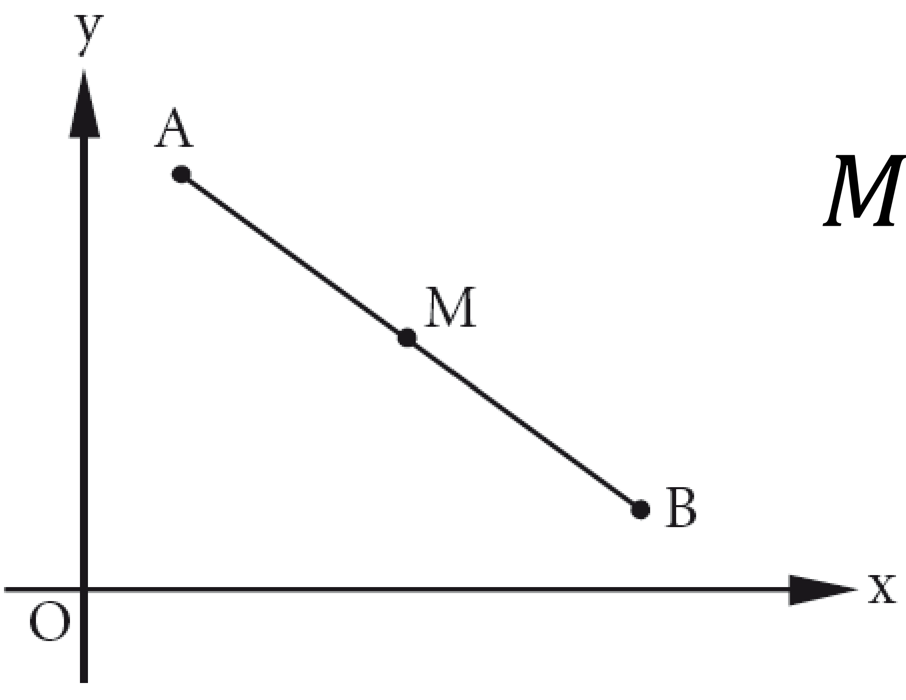


Figura 1.50

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Paralelismo entre dois vetores

Se $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos,
Existe um número real $\propto$ tal que:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v}$$

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

$$x_1 = \alpha x_2 \text{ e } y_1 = \alpha y_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_1} = \alpha}$$

Módulo de um vetor

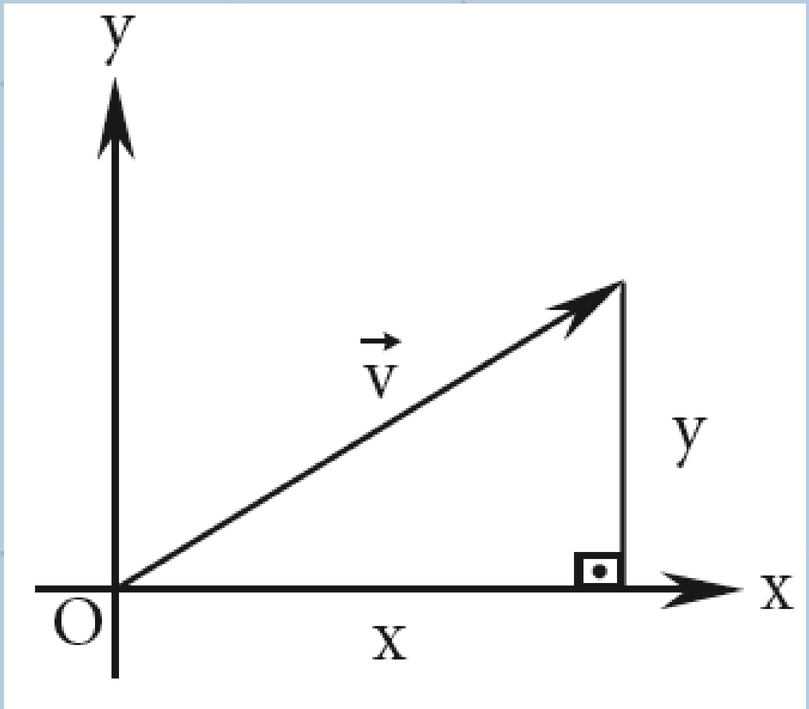


Figura 1.51

$$\vec{v} = (x, y)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2})$$

Distância entre dois pontos

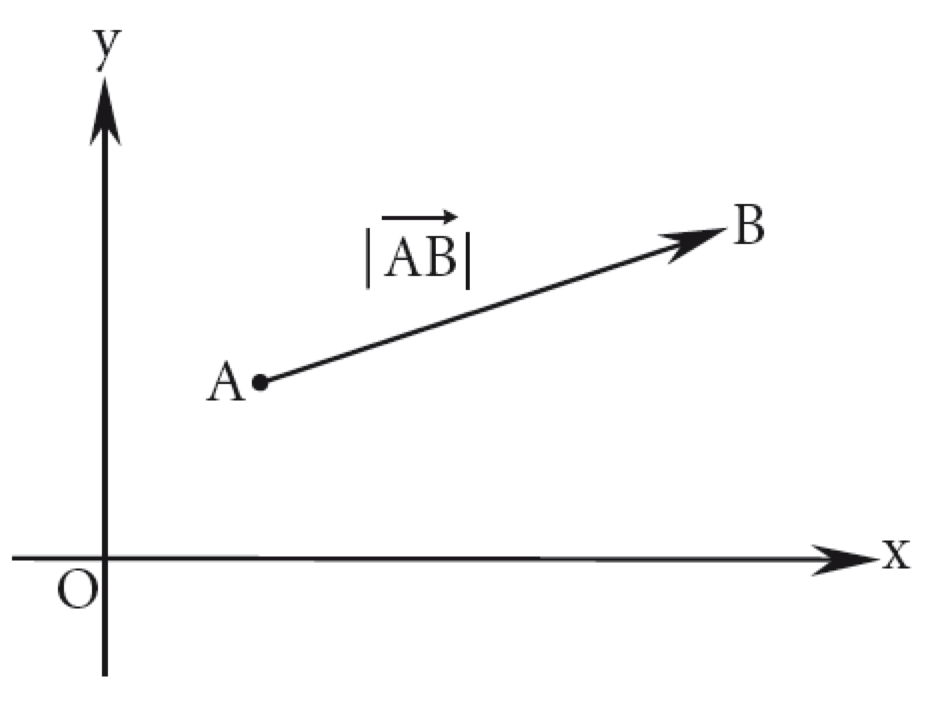


Figura 1.52

$$d(A,B) = |\overrightarrow{AB}|$$

Vetor Unitário

Para cada vetor $\vec{v} \neq 0$ é possível associar dois vetores unitários paralelos a $\vec{v}$.

$$(\text{Versor de } \vec{v}) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$(\text{oposto do Versor de } \vec{v}) = -\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Exemplos (p. 28)

Vetores no espaço

Vetores no espaço

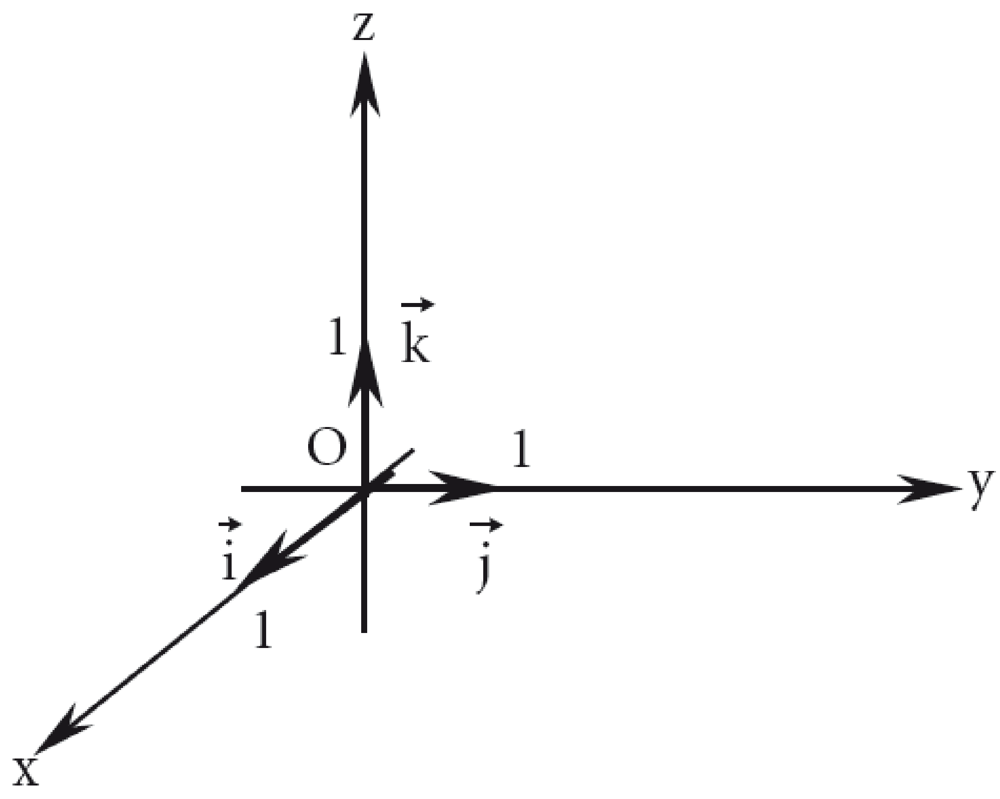


Figura 1.53

Dupla de vetores da base define um plano

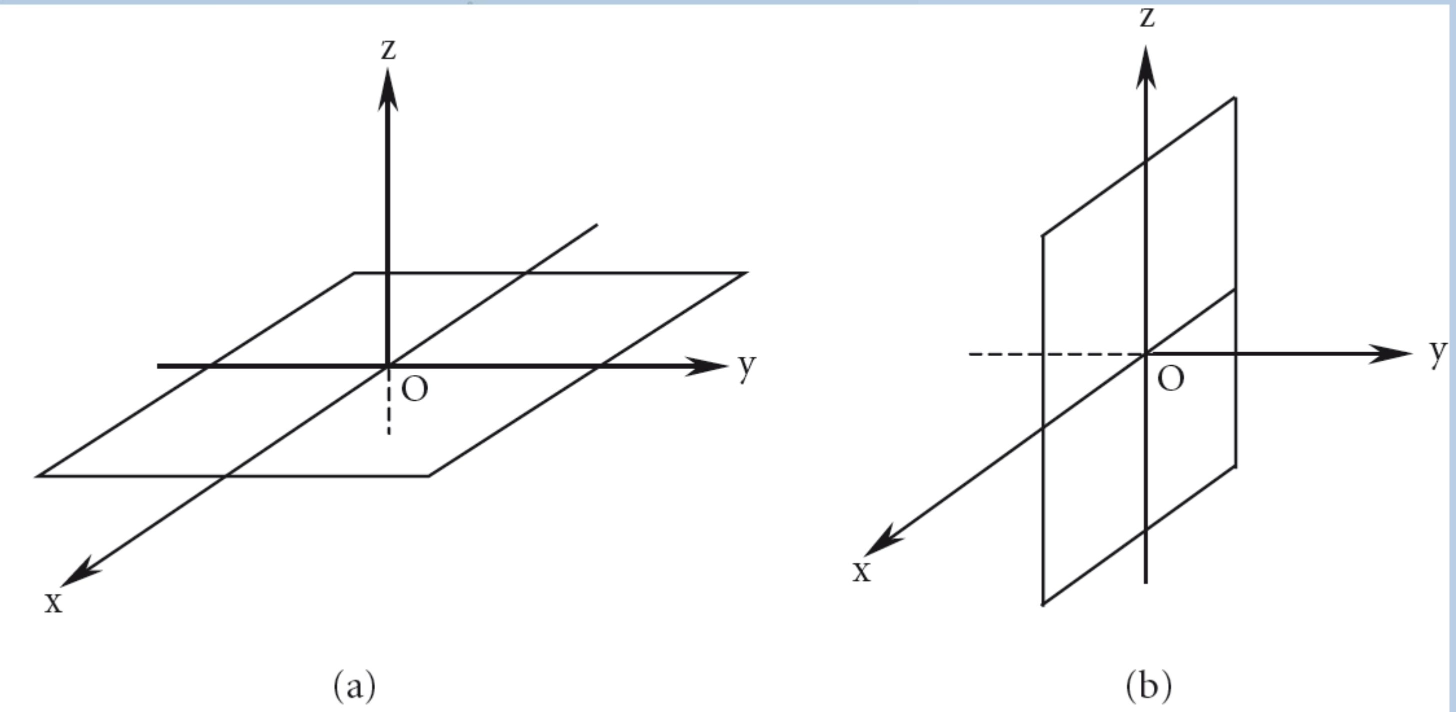


Figura 1.54

Ponto no espaço corresponderá ao vetor

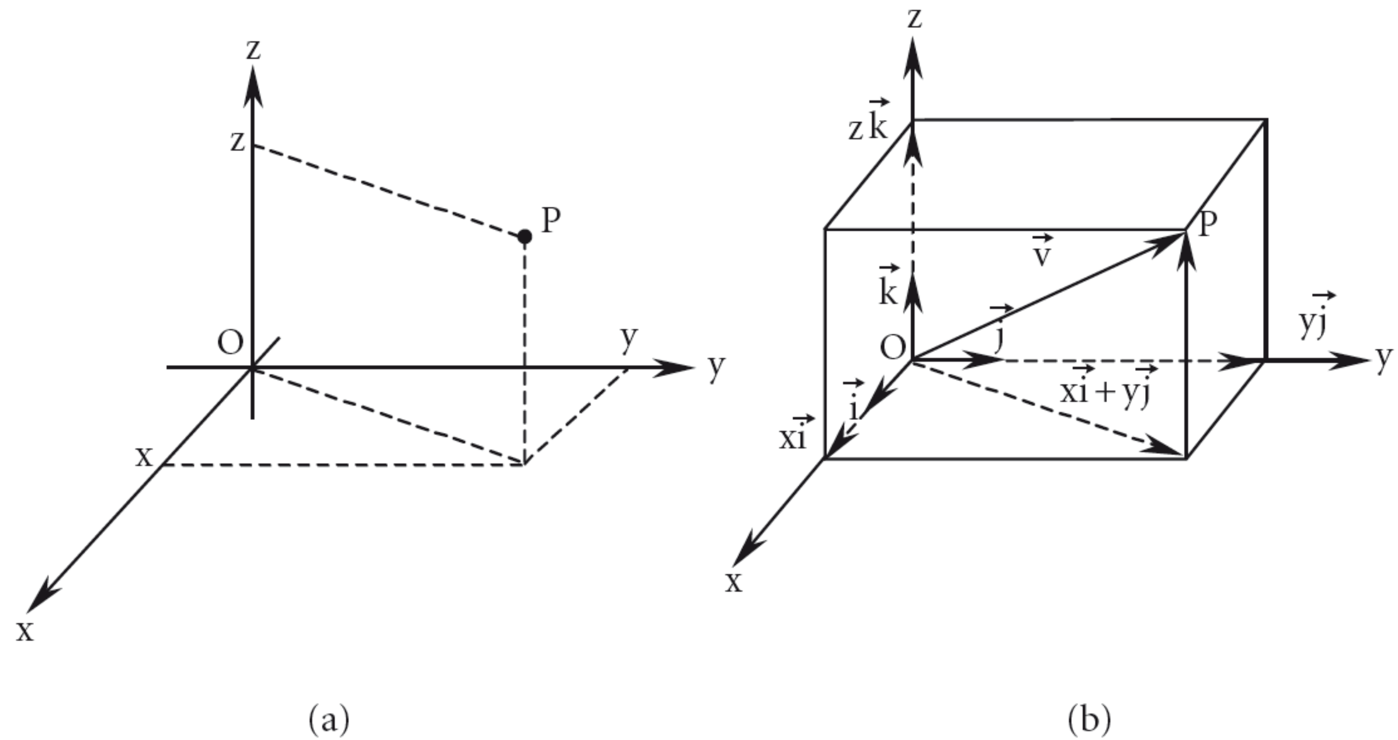


Figura 1.55

Exemplo: Representar o vetor $\vec{v} = (2,4,3)$ em componentes e geometricamente.

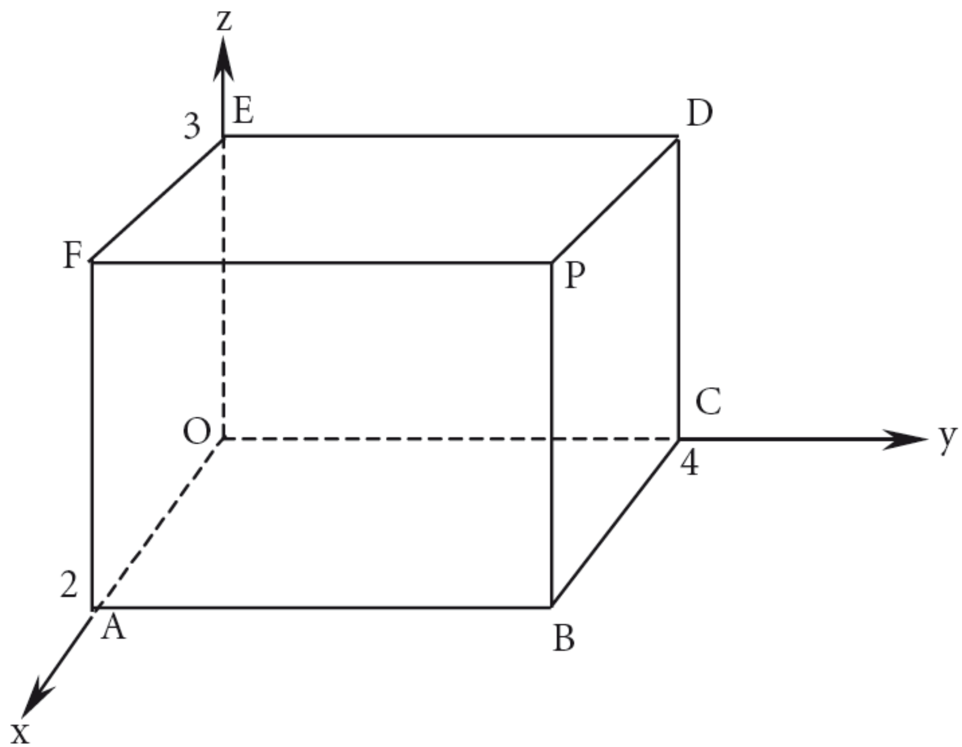


Figura 1.56

Pontos pertencentes aos eixos e aos planos coordenados

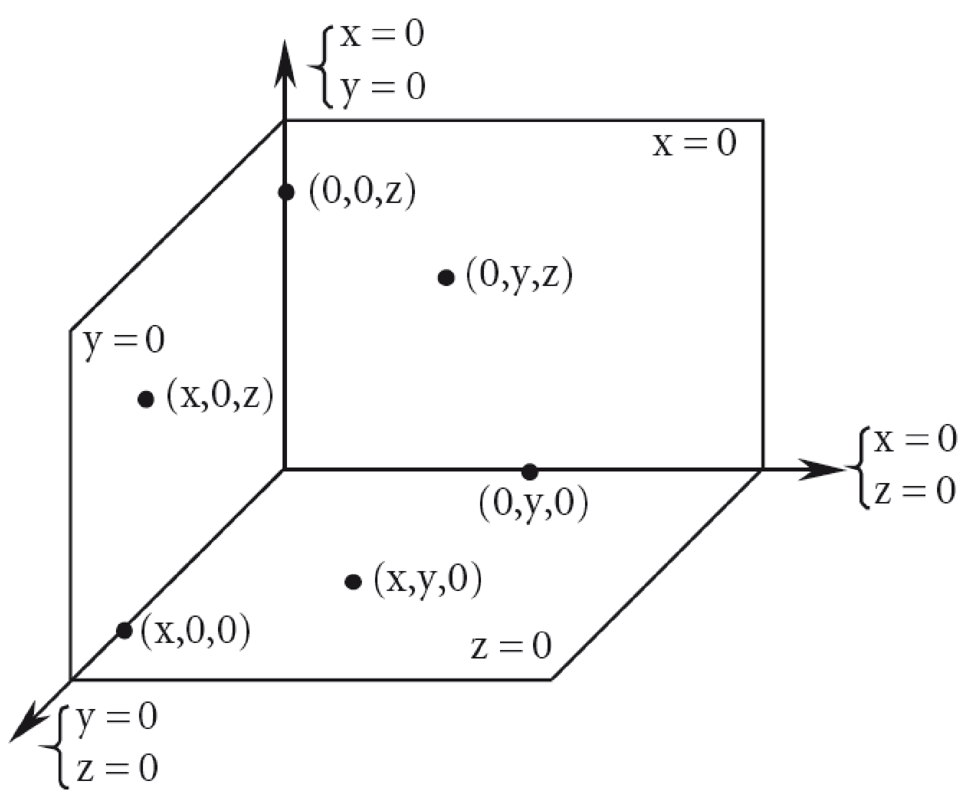


Figura 1.57

Marcação de um ponto no espaço

$$A(3, -2, 4)$$

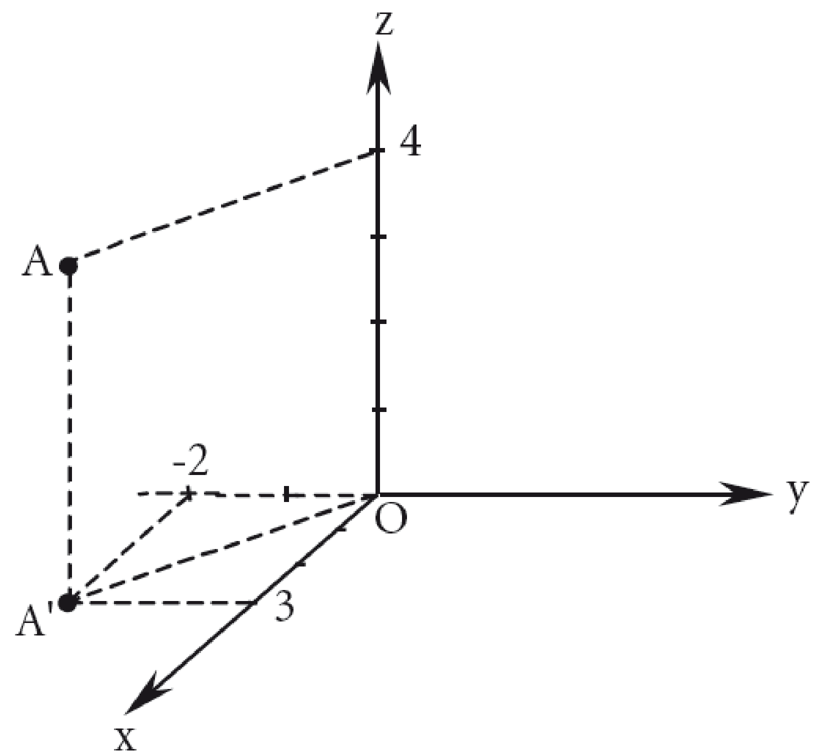


Figura 1.58

Octantes

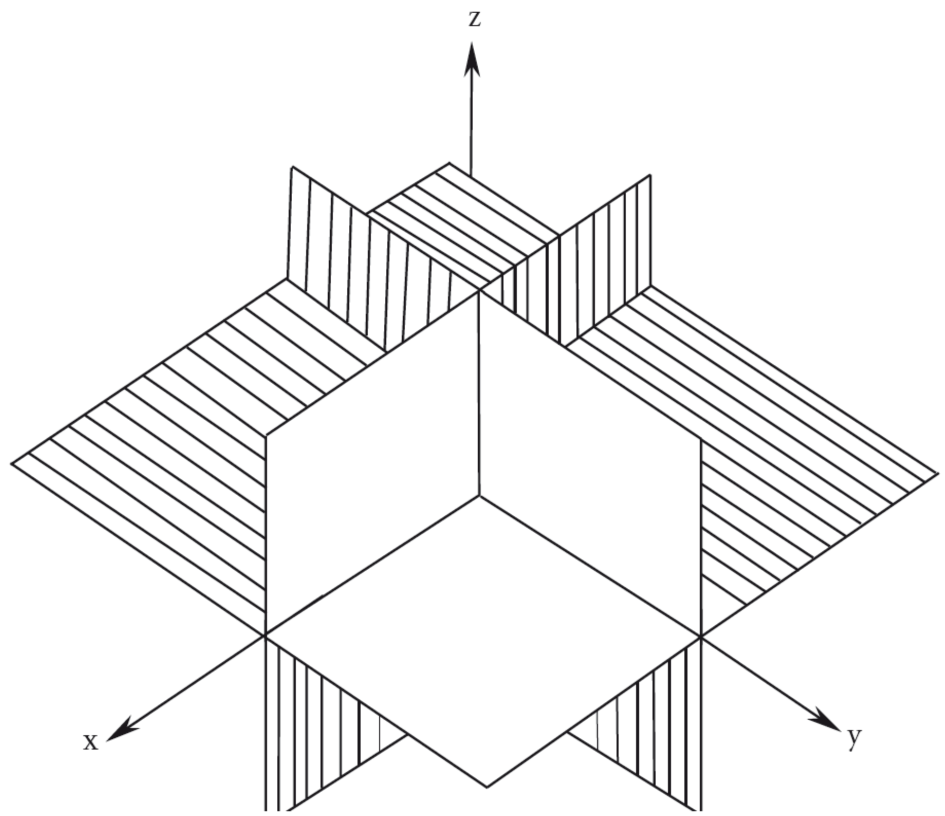


Figura 1.59

Vetor definido por dois pontos

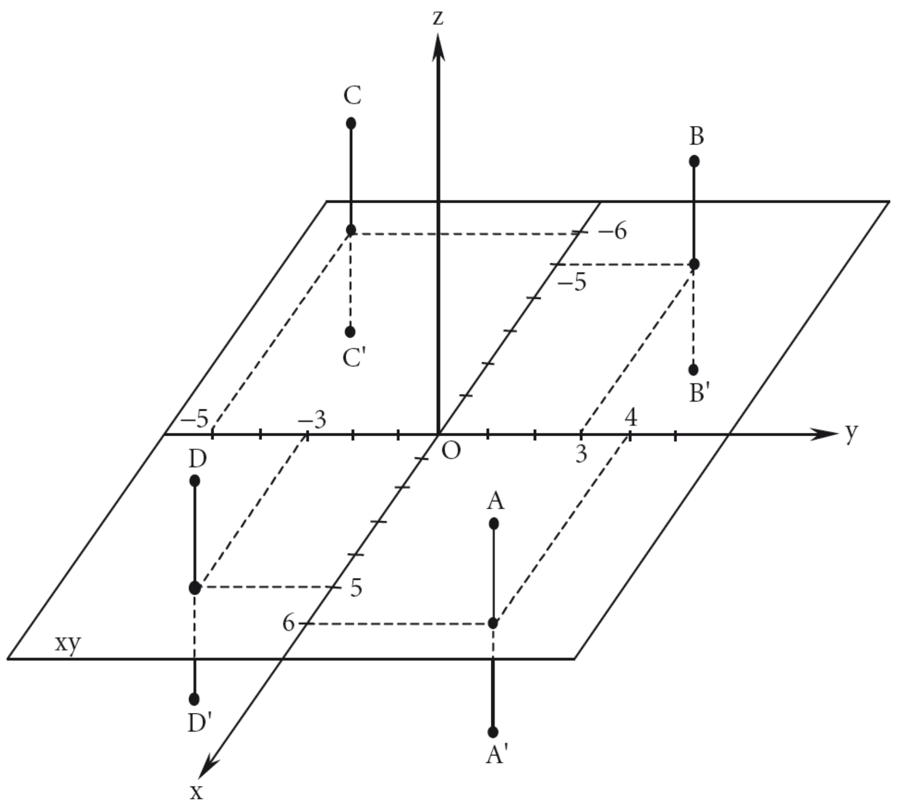


Figura 1.60

Igualdade, Operações , Ponto médio, Paralelismo, módulo

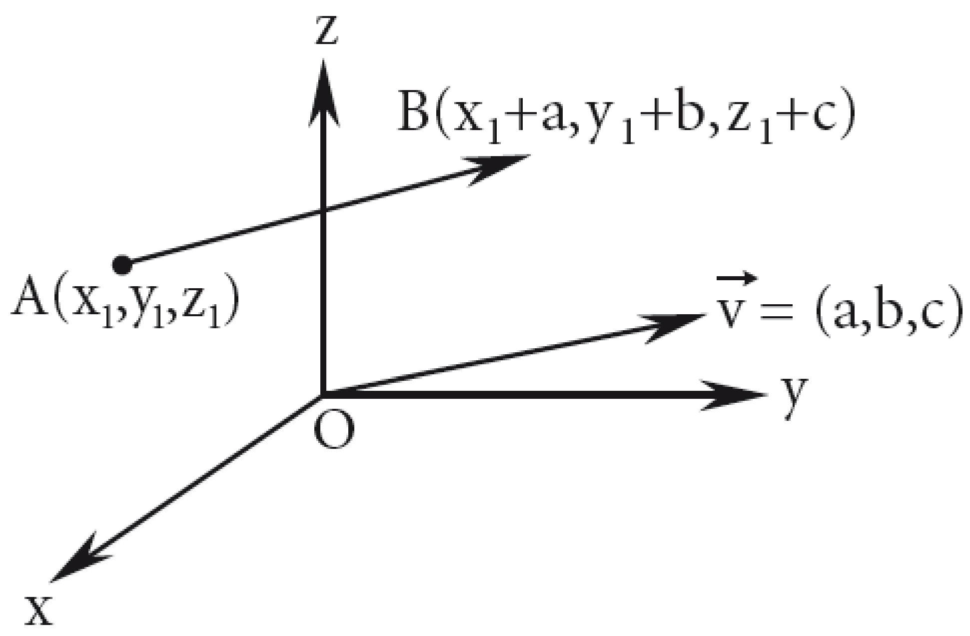


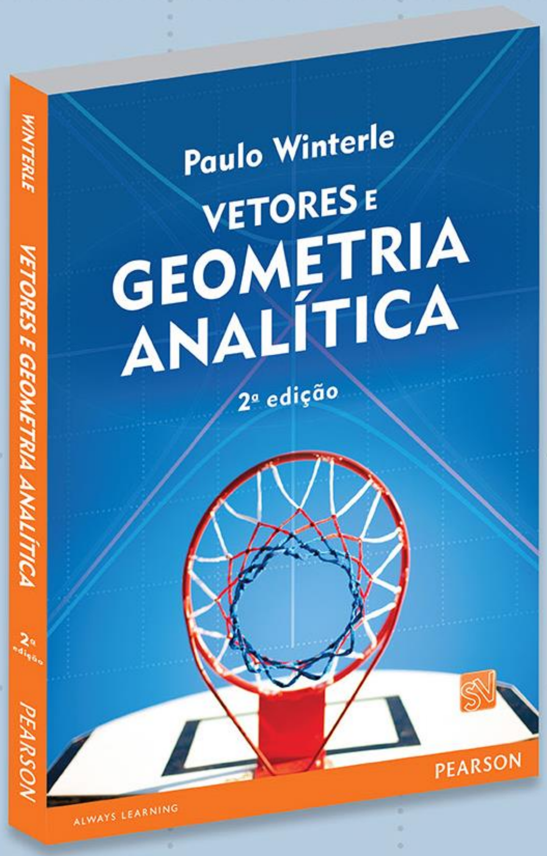
Figura 1.61

Exemplos (p. 36)

Na próxima aula ...

Capítulo 2 – Produto escalar

Bibliografia Geometria Analítica



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.