Cálculo I

Licenciatura em Química

Aula 02
Funções e Gráficos

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Introdução

- População que varia com o tempo
- Amplitude dos pulsos elétricos do músculo cardíaco no tempo
- Velocidade da contração muscular varia com a carga

Significado de função

Sejam A e B dois subconjuntos não vazios da reta real.

A função f de A em B é um correspondência que associa a cada elemento x de A a um único elemento y pertencente a B.

Simbolicamente

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Correspondência de um dado elemento $x \in A$

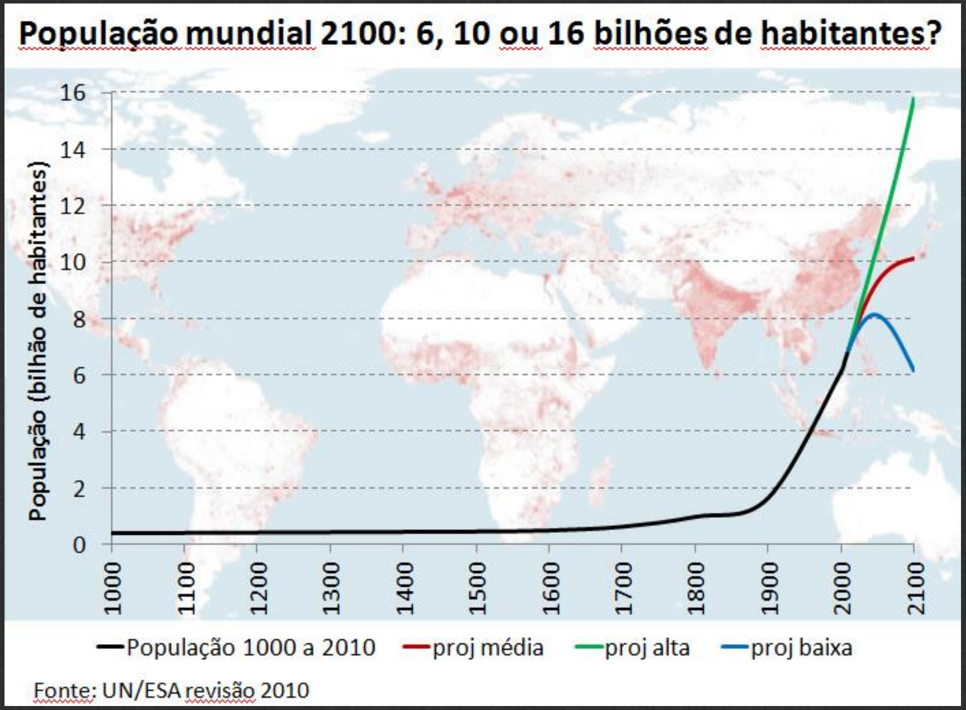
e o valor y $= f(x) \in B$

A : Domínio de f

B : Contradomínio de f

$I(f) = \{y \in B \mid y = f(x) \; para \; algum \; x \in A\}$

f: associa o tempo à população



y: variável dependente (população);

x: variável independente (tempo).

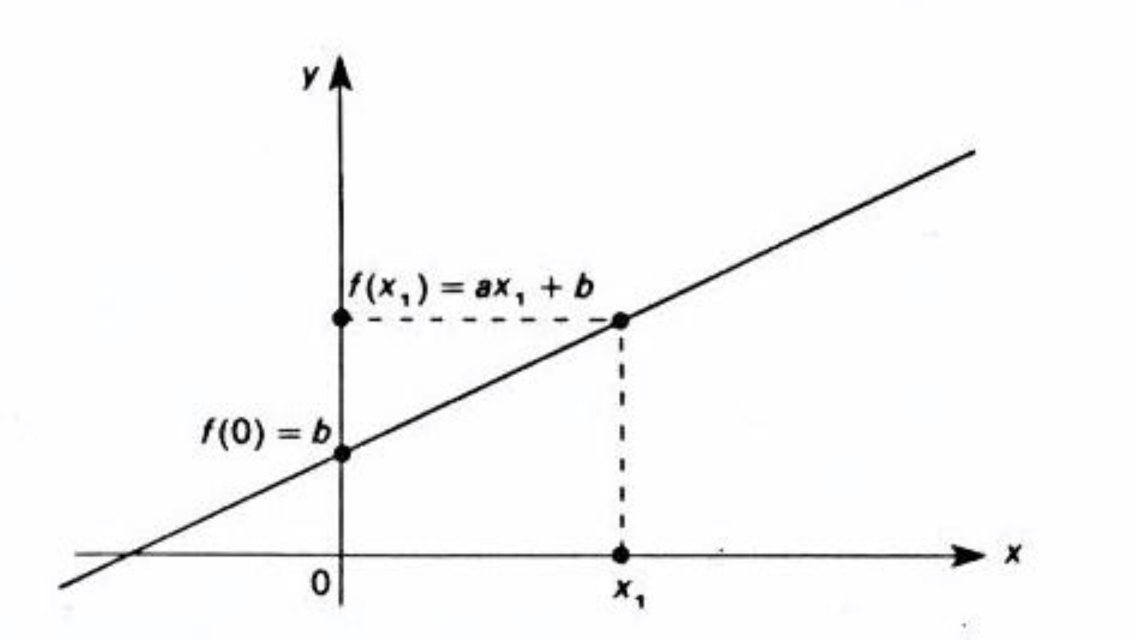
Exemplo 1 – Função linear

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = f(x) = ax + b$

a: inclinação ou declividade.

$b = f(0)$: intercepto.



Domínio: $\mathbb{R}$

Imagem: $\mathbb{R}$

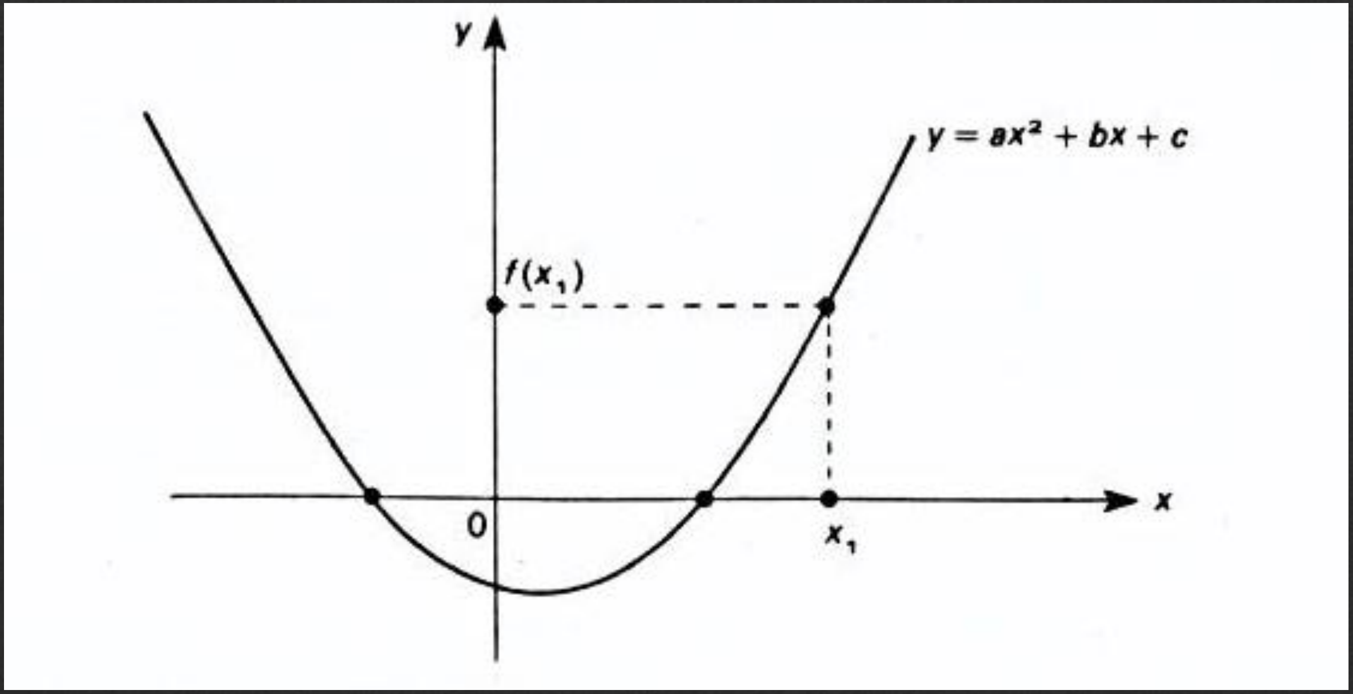
Exemplo 2 – Função quadrática

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a, b, c: constantes.

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

Domínio: $\mathbb{R}$



Exemplo 3 – construir gráficos

a) $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $y = f(x) = -x^2 + x + 2$

Exercícios

a) Construir o gráfico e encontrar o domínio da função de $y = \sqrt{x}$

b) Encontrar o domínio de $f(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{1-x}$ e o valor $f(5)$

Combinação de funções

Novas funções a partir de duas ou mais funções;

Sejam f e g com domínio A e contradomínio B

$$f: A \to B \qquad\qquad g: A \to B$$

Soma: $f(x) + g(x) = [f + g](x)$

Diferença: $f(x) - g(x) = [f - g](x)$

Produto: $f(x)g(x) = [fg](x)$

Quociente: $f(x)/g(x) = [f/g](x) \quad \text{p/ } g(x) \neq 0$

Exemplo 4 – construir gráficos

a) $f(x) = x^2$

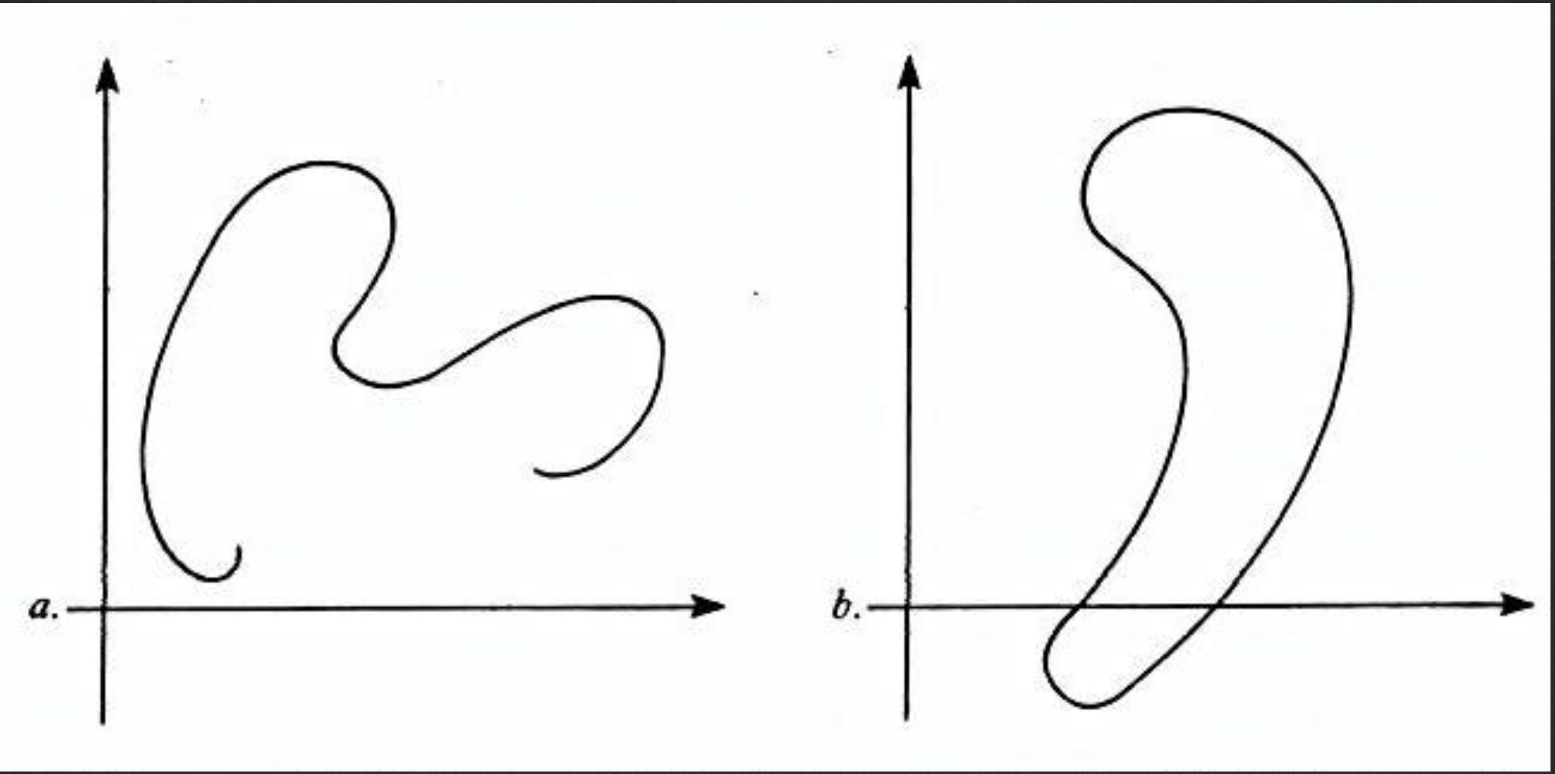
b) $[f + g](x)$ sendo, $f(x) = x^2$ $g(x) = 1$

c) $[fg](x)$ sendo, $f(x) = x^2$ $g(x) = 2$

d) $[f + g](x)$ sendo, $f(x) = x^2$ $g(x) = -2x + 1$

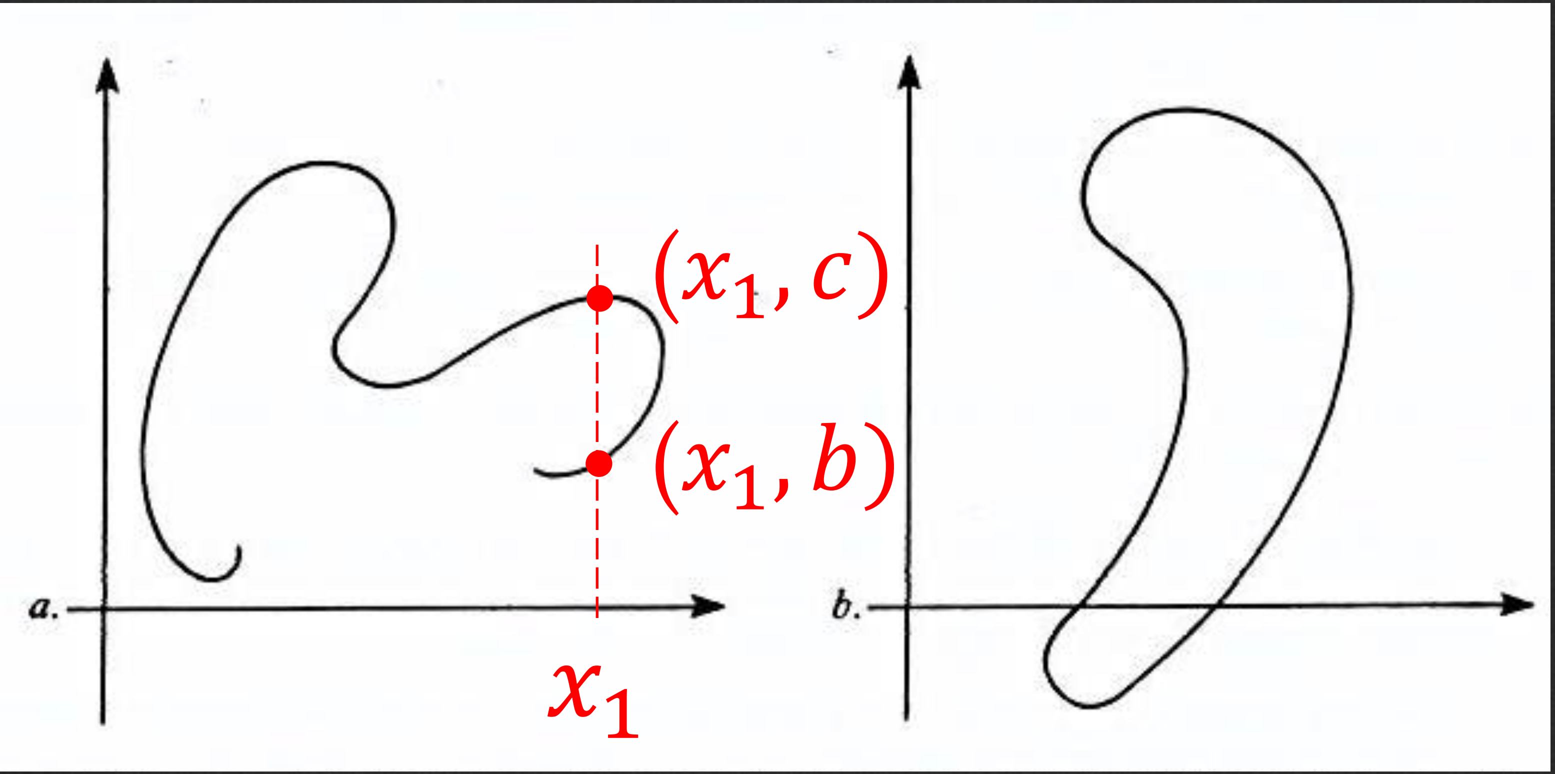
Relações não funcionais

As curvas abaixo representam uma função?



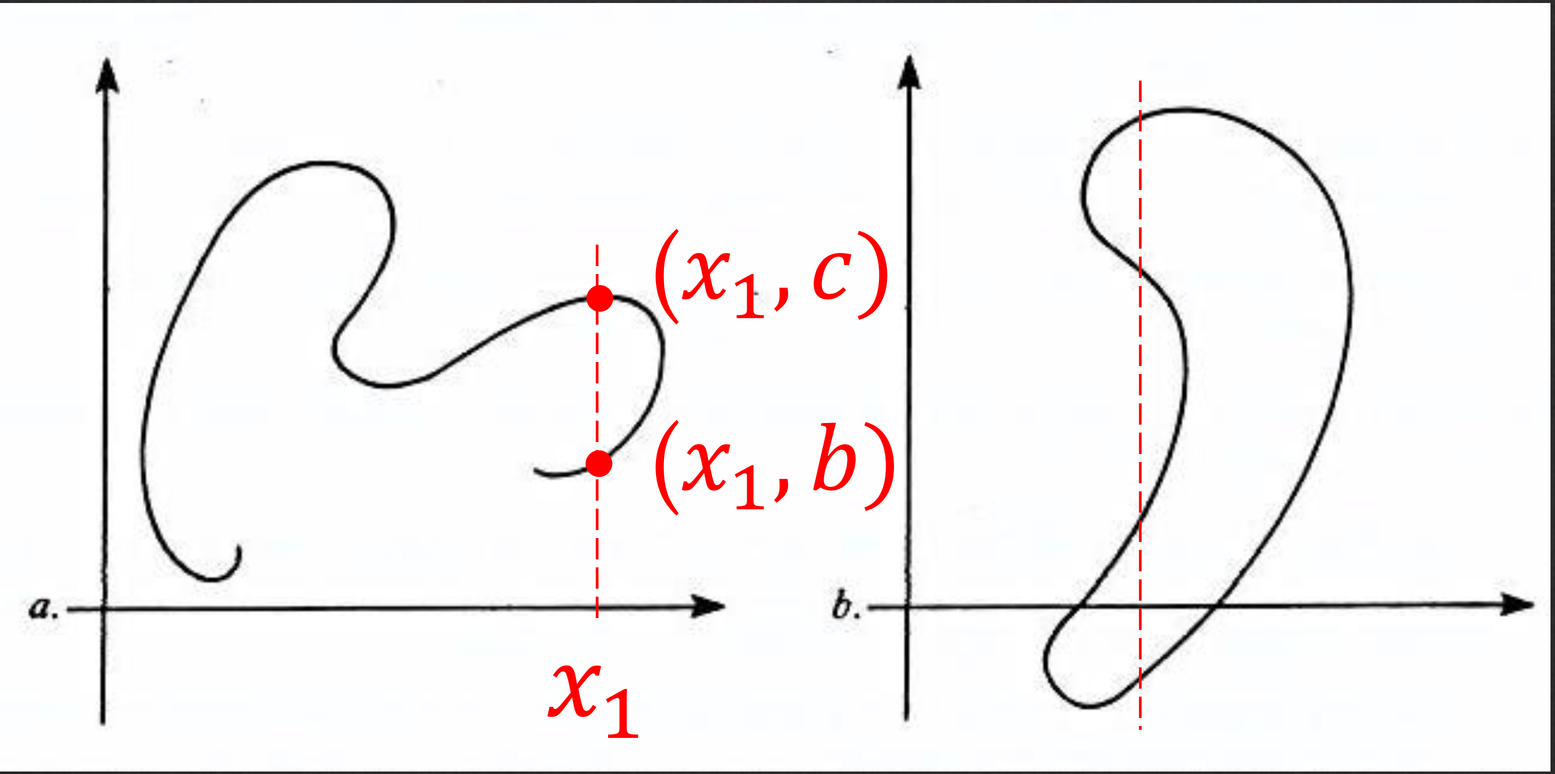
Relações não funcionais

As curvas abaixo representam uma função?



Relações não funcionais

As curvas abaixo representam uma função?



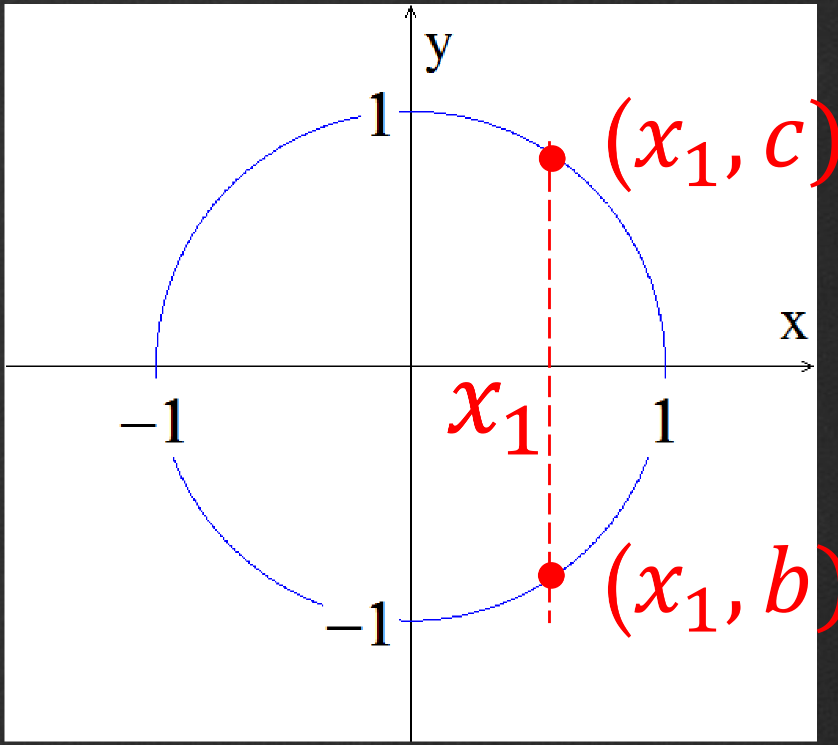
Dado um gráfico

"Uma curva no plano XY será o gráfico de uma função f se e somente se nenhuma reta vertical intercepta a curva mais de uma vez."

Outro exemplo de relação não funcional

$$x^2 + y^2 = 1$$

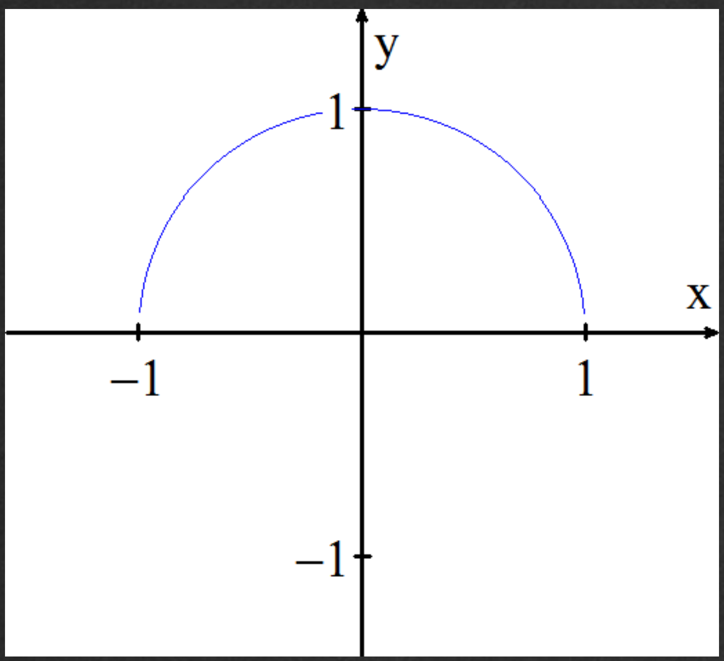
Expressão matemática que representa um círculo de raio unitário.

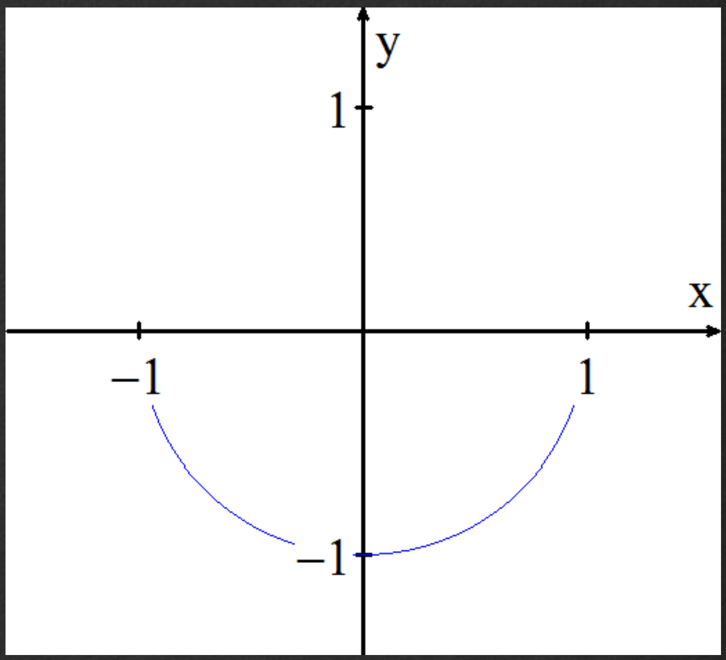


Winplot

As raízes separadas são funções

$$y = +\sqrt{1 - x^2} \qquad\qquad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

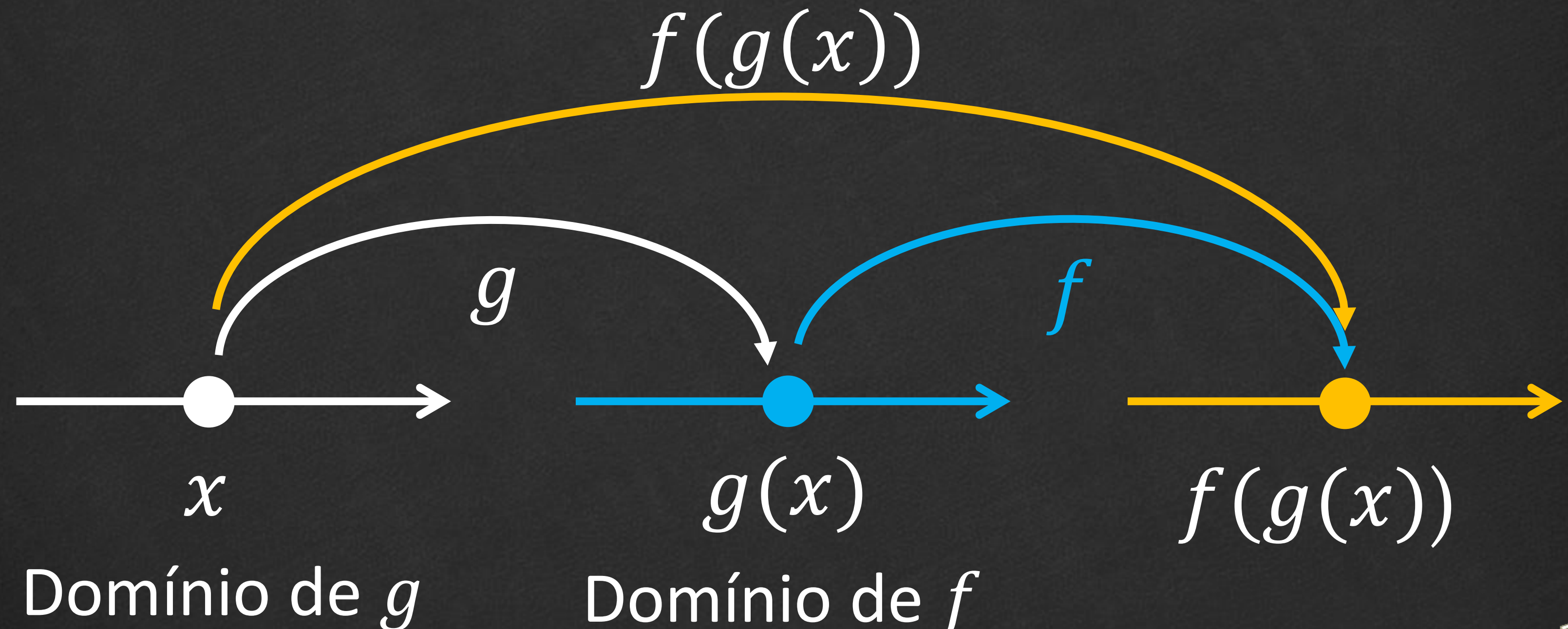




Winplot

Funções compostas

- Composição de duas funções f e g que origina uma nova função $(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})$ (Lê-se: f bola g);
- Imagem $g(x)$ deve estar no domínio de f.



Exemplo 5: calcular $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$

a) $y = f(u) = 2u - 3$

$u = g(x) = x^2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = x^2 + 1$

Exemplo 6

c) Uma mancha de óleo sobre uma superfície de água é originada a partir de um vazamento que se mantém constante ao longo do tempo. Essa mancha é esférica e a área pode ser obtida em função do raio:

$$A = A(r) = \pi r^2$$

Por outro lado, o raio cresce em função do tempo t, em minutos, seguindo a expressão:

$$r = r(t) = 15t + 0{,}5 \quad [cm]$$

Encontrar a expressão da área em função do tempo.

Funções inversas

Considere um experimento de cultura que comece com 100 bactérias em um meio contendo nutriente para reprodução.

Tempo t (horas)	Número de bactérias (N)
0	100
1	168
2	259
3	358
…	…

$$f(t) = N \qquad f(2) = 259$$

Funções inversas

Mudando o ponto de vista: tempo necessário para população atingir certo nível.

Número de bactérias (N)	Tempo t (horas)
100	0
168	1
259	2
358	3
…	…

$$t = f^{-1}(N)$$

$$f^{-1}(259) = 2\ horas$$

Critérios para função ser inversível

Seja: $f: I \rightarrow J$

$$y = f(x) \quad \forall \ x \in I \ \ e \ \ y \in J$$

Para se expressar: $x = f(y)$

- Todo elemento de J seja imagem de algum $x \in I$;
- Dois elementos distintos de I devem corresponder a dois elementos distintos de J.

Critérios para função ser inversível

Ou seja: $x_1 \neq x_2 \; em \; I \quad \Rightarrow \quad y_1 \neq y_2 \; em \; J$

$$x = g(y) \quad tal\ que: \quad f\big(g(y)\big) = y$$

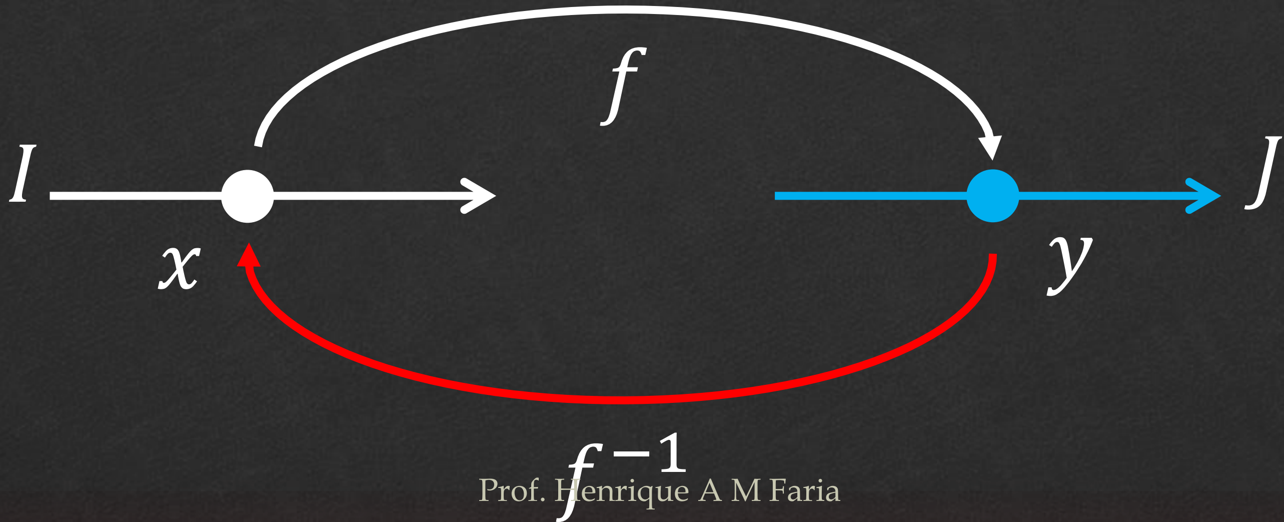
$$g(f(x) = x$$

- Logo, apenas as funções bijetoras podem ser invertidas.

Definição de função inversa

Seja f uma função bijetora com domínio I e imagem J. Então sua função inversa f^{-1} tem domínio J e imagem I, sendo definida por:

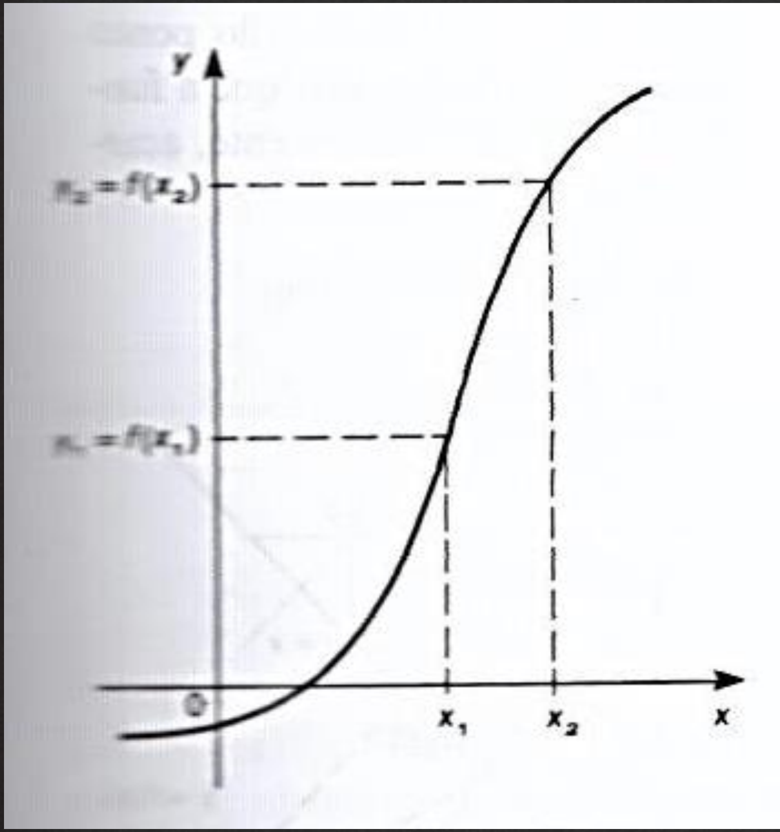
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \qquad \forall \;\; y \;\; em \;\; J$$



Estritamente crescente

Se: $x_1 < x_2$

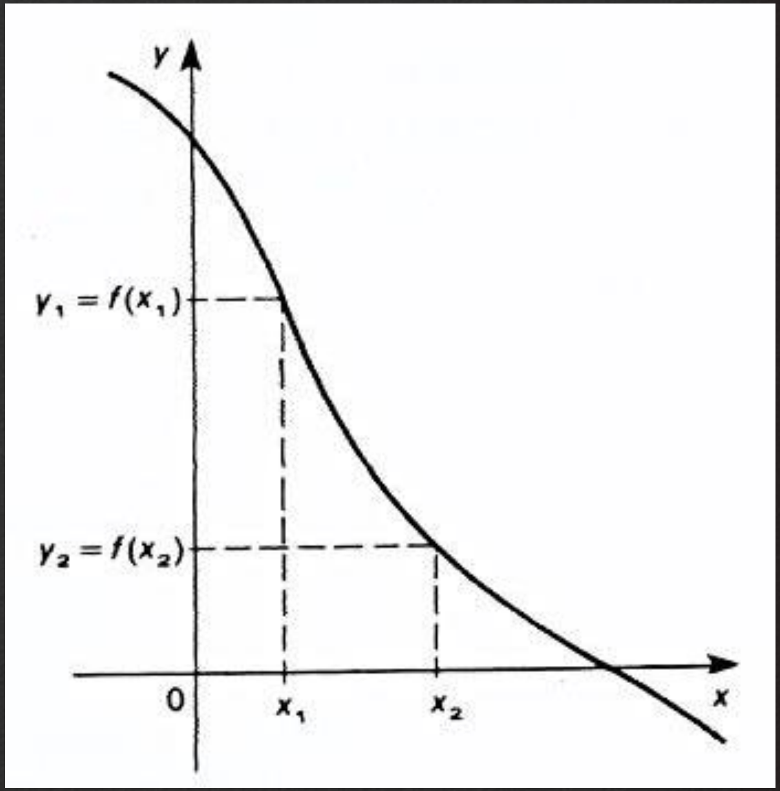
Então: $f(x_1) < f(x_2)$



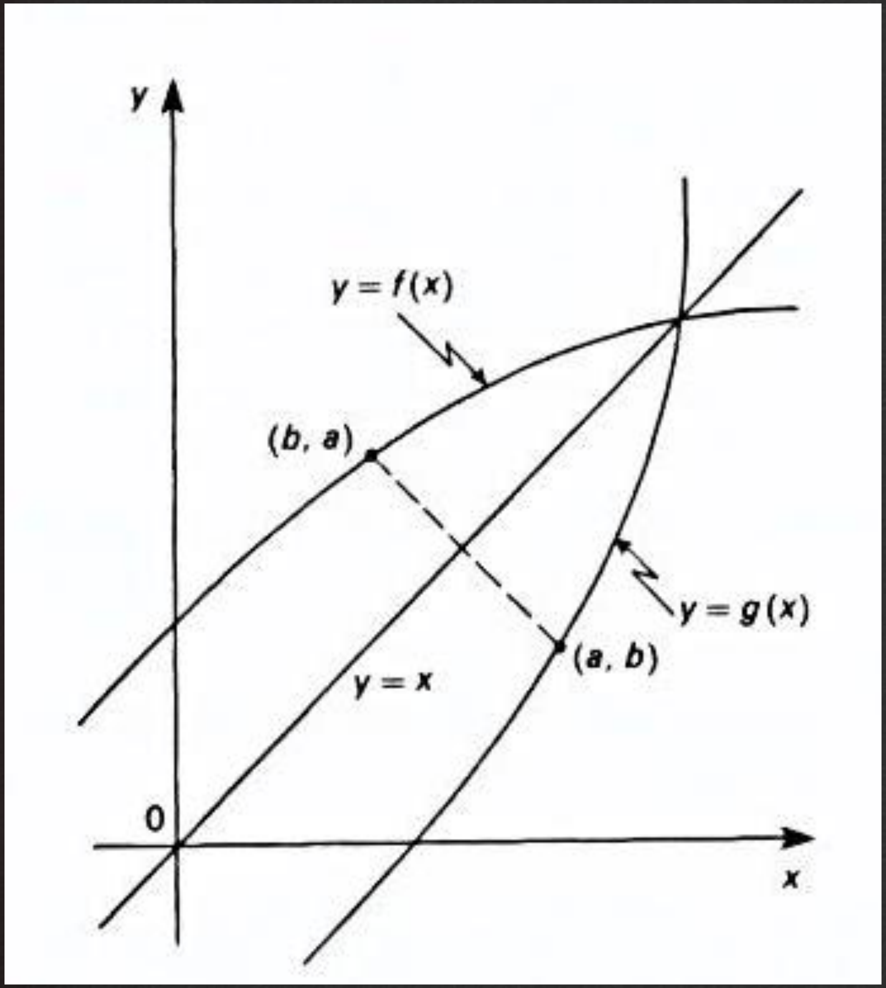
Estritamente decrescente

Se: $x_1 < x_2$

Então: $f(x_1) > f(x_2)$



Inversa a partir do gráfico



(a, b) *está no gráfico de* f *então*:
(b, a) *pertence ao gráfico de* g

(b, a) é a reflexão de (a, b)
Em relação à reta $y = x$

Exemplos 7

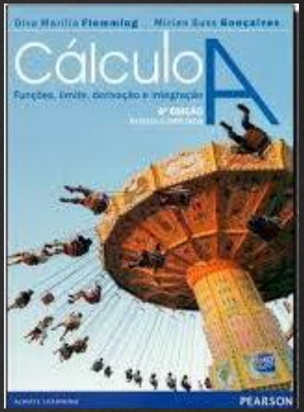
Seja n um inteiro positivo e $y = f(x) = x^n$ com $x > 0$. Obter a função inversa de f.

Próxima aula teórica:

- Funções trigonométricas;
- Funções exponenciais e logarítmicas

Bibliografia

3. GONÇALVES, Mirian B.; FLEMMING, Diva M. Cálculo A. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2007.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br