# Capítulo 2 - Produto escalar

## Geometria Analítica

Prof. Henrique A. M. Faria

# Definição algébrica

Sejam: $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \ e \ \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

O produto escalar, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é a operação:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

# Definição algébrica

Sejam: $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \ \ e \ \ \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

O produto escalar, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é a operação:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

**O resultado do produto escalar é um número real.**

# Exemplo 1

a) Sendo : $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ calcular o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

# Propriedades do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}),\ \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2}),$

$\vec{\boldsymbol{w}} = (\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{y_3}, \boldsymbol{z_3})$ e $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$

# Propriedades do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)

# Propriedades do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)

3. $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (distributiva)

4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$

# Propriedades do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)
3. $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (distributiva)
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

# Exemplo 2: demonstre a propriedade I

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

# Exercício: prove a propriedade V

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

# Exemplo 3:

Sendo $|\vec{u}| = 4$ ; $|\vec{v}| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ calcule:

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) =$$

# Exemplo 4 - Provar que:

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

# Exercício - Demonstre (Fazer em casa):

a) $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

# Definição geométrica do produto escalar

Seja um triângulo ABC definido pela soma de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, como na Figura 2.1.

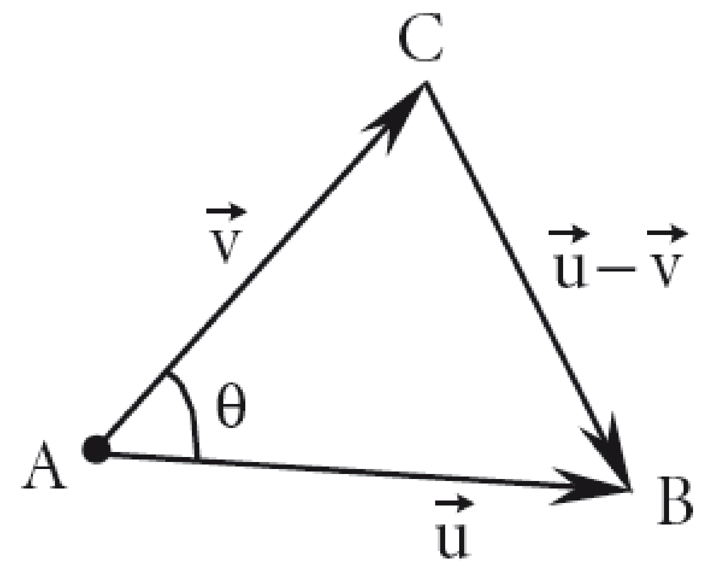



Figura 2.1

# Definição geométrica do produto escalar

Aplicando a propriedade do módulo:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

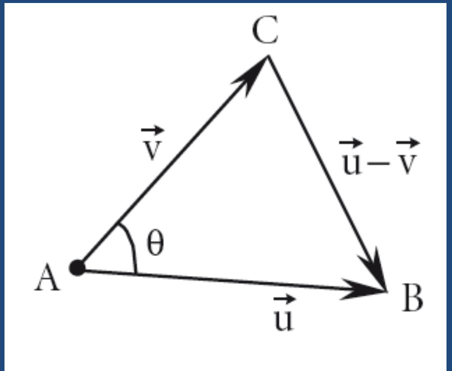


Figura 2.1

# Definição geométrica do produto escalar

Aplicando a propriedade do módulo:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

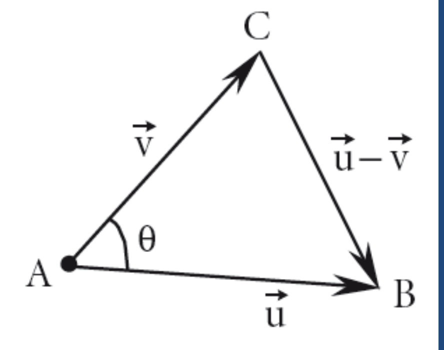


Figura 2.1

Por outro lado, da lei dos cossenos:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta + |\vec{v}|^2$$

# Definição geométrica do produto escalar

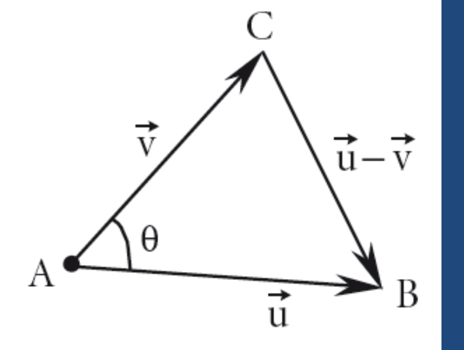


Figura 2.1

Aplicando a propriedade do módulo:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Por outro lado, da lei dos cossenos:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\,cos\theta + |\vec{v}|^2$$

Igualando as duas equações:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\,cos\theta}$$

$$0° < \theta \leq 180°$$

# Ângulo entre dois vetores

O cosseno do ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido pela razão entre o produto escalar e os módulos destes vetores.

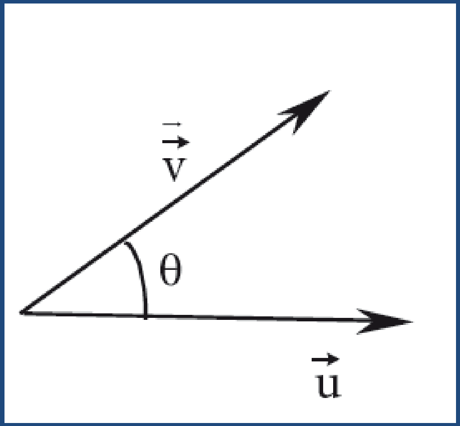
$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

# Ângulo notáveis

| $\theta$ (graus) | $\theta$ (rad) | $\mathrm{sen}\theta$ | $\cos\theta$ | $\mathrm{tg}\theta = \frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta}$ |
|---|---|---|---|---|
| 30 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 45 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ |
| 60 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |

# Casos para o produto escalar

$$cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



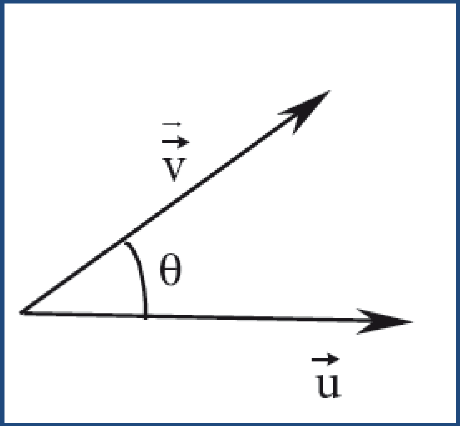

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$,

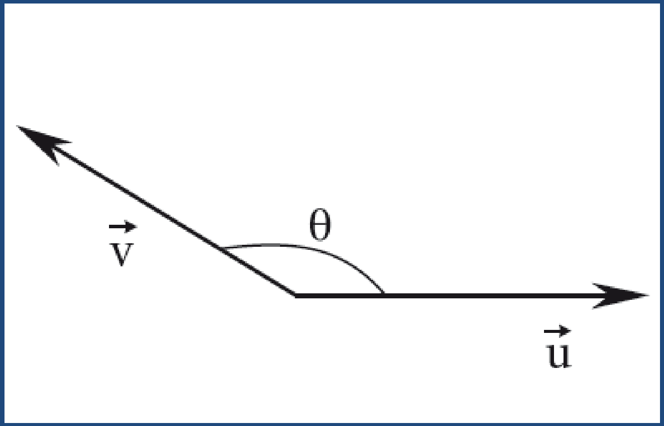
$\cos\theta > 0$

$\mathbf{0 \leq \theta < 90°}$

# Casos para o produto escalar

$$cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



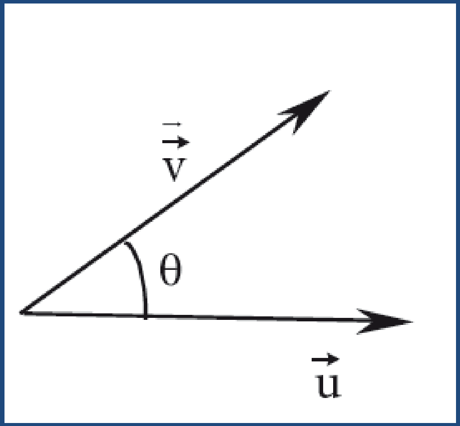



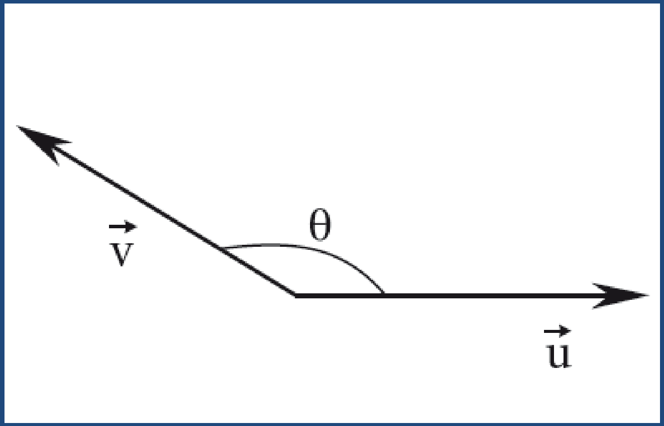

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$,
$\cos\theta > 0$
$\mathbf{0 \leq \theta < 90°}$

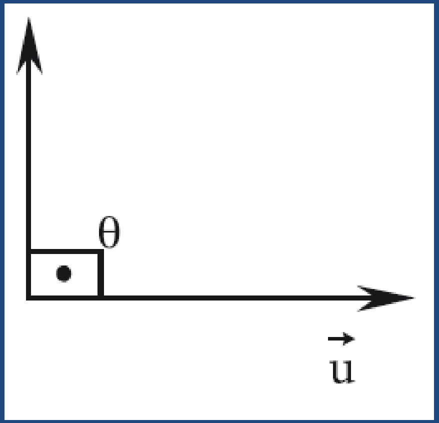
Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$,
$\cos\theta < 0$
$\mathbf{90° < \theta \leq 180°}$

# Casos para o produto escalar

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$




Se $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$,
$\cos\theta > 0$
$0 \leq \theta < 90°$

Se $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$,
$\cos\theta < 0$
$90° < \theta \leq 180°$

Se $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
$\cos\theta = 0$
$\theta = 90°$

# Ortogonalidade da base canônica $\mathbf{C} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$

$\vec{\imath} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$ e $\vec{\jmath} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = |\vec{\imath}||\vec{\jmath}|\boldsymbol{cos\theta}$ como: $|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = \mathbf{1}$

$$\boldsymbol{cos\theta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{90°}$$

# Exemplo 5 - Calcular o ângulo entre vetores

$\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{4})$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$.

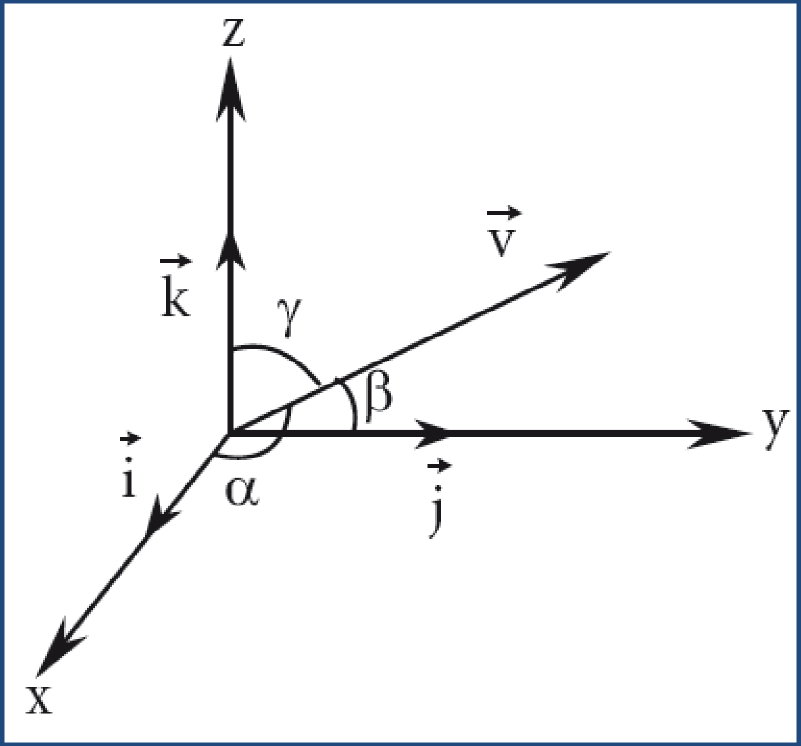
# Exercício

Sabendo que o vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{1})$ forma um ângulo de $\mathbf{60}°$ com o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, cujos pontos são **A**$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$ e **B**$(\mathbf{4}, \mathbf{0}, \boldsymbol{m})$, calcule o valor de $\boldsymbol{m}$.

Resp.: $\boldsymbol{m} = -\mathbf{4}$

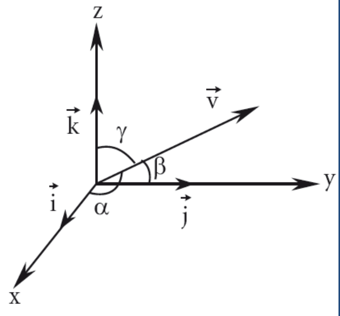
# Ângulos diretores

Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não nulo.




Os ângulos diretores de $\vec{v}$ são os ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ formados entre esse vetor e os vetores da base canônica $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

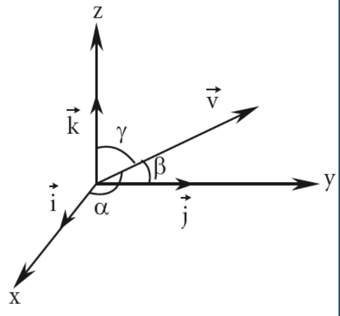
# Ângulos diretores




Da definição de ângulo entre vetores tem-se:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|1} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

# Ângulos diretores




Da definição de ângulo entre vetores tem-se:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}||\vec{i}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{|\vec{v}|1} = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}||\vec{j}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{|\vec{v}|1} = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}||\vec{k}|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{|\vec{v}|1} = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

# Ângulos diretores

Nota-se que o versor de $\vec{v}$ é expresso por:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y, z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right)$$

# Ângulos diretores

Nota-se que o versor de $\vec{v}$ é expresso por:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y, z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right)$$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$$

# Ângulos diretores

Nota-se que o versor de $\vec{v}$ é expresso por:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(x, y, z)}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|}, \frac{z}{|\vec{v}|}\right)$$

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$$

Como um versor é sempre unitário:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta, +cos^2\gamma = 1$$

# Exemplo 6 - Calcular o ângulo diretores

$$\vec{v} = (1, -1, 0)$$

# Exercício

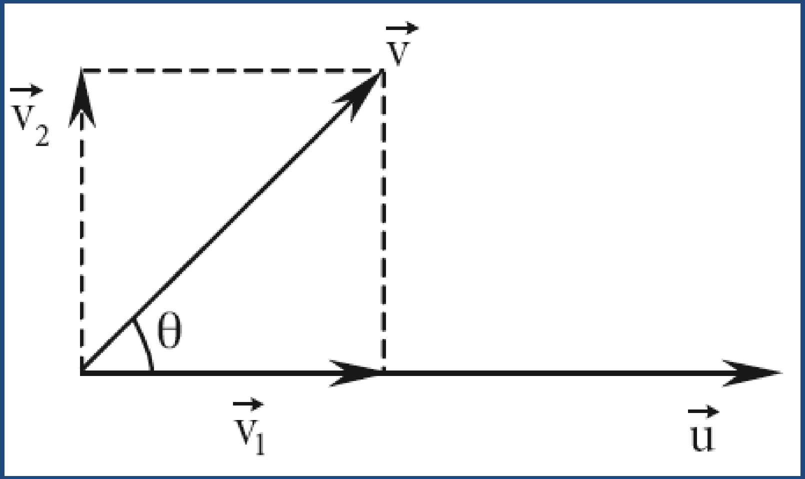
Os ângulos diretores de um vetor são $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{45°}$ $\boldsymbol{e}$ $\mathbf{60°}$. Determine o valor de $\boldsymbol{\alpha}$.

# Projeção de um vetor sobre outro

Sejam: $\vec{v}$ $e$ $\vec{u}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo entre eles. A projeção ($\overrightarrow{v_1}$) de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ permite duas situações:

# Projeção de um vetor sobre outro

Sejam: $\vec{v}$ $e$ $\vec{u}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo entre eles. A projeção ($\overrightarrow{v_1}$) de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ permite duas situações:

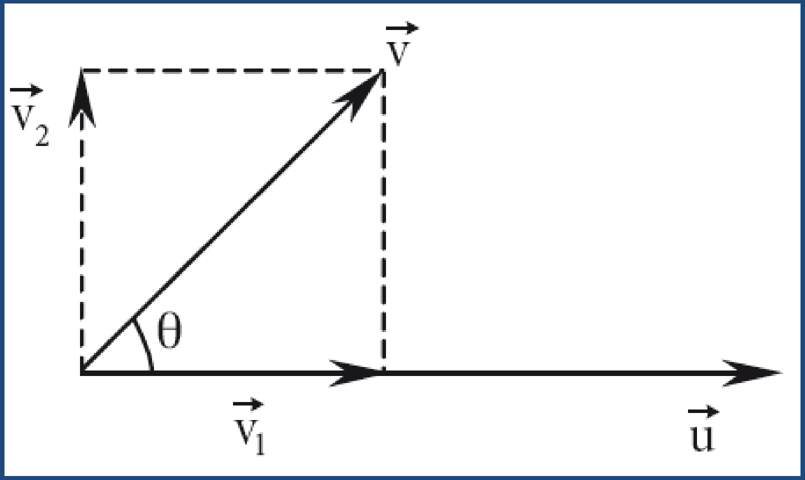


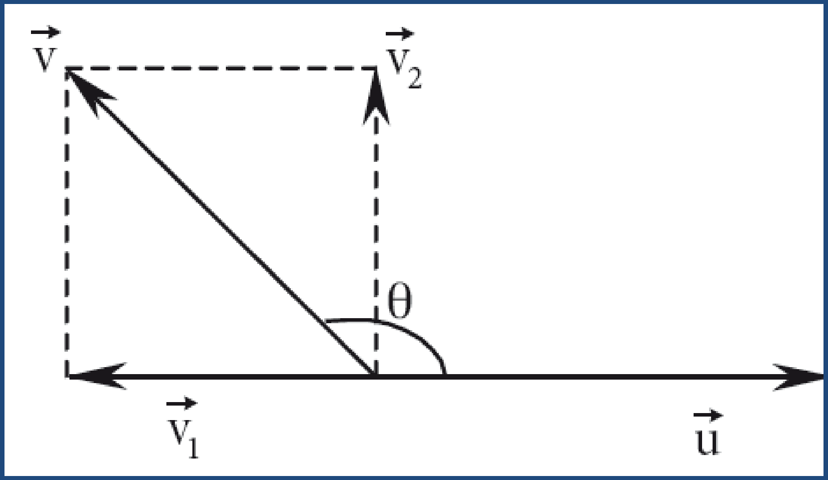

$$\boldsymbol{\theta < 90°}$$

ângulo agudo

# Projeção de um vetor sobre outro

Sejam: $\vec{v}$ $e$ $\vec{u}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo entre eles. A projeção ($\overrightarrow{v_1}$) de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ permite duas situações:




$\boldsymbol{\theta < 90°}$

ângulo agudo

$\boldsymbol{90° < \theta < 180°}$

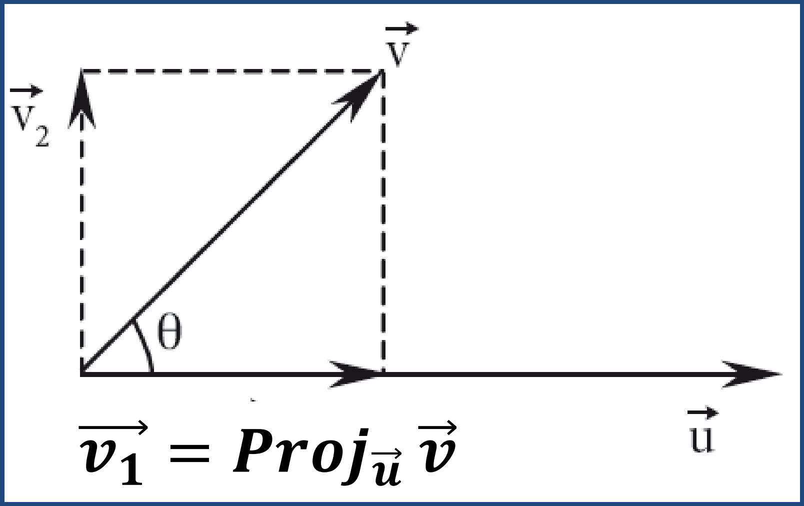
ângulo obtuso

# Projeção de um vetor sobre outro

A projeção ($\overrightarrow{v_1}$) de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é denotada por:

$$\overrightarrow{v_1} = Proj_{\vec{u}}\,\vec{v}$$

E calculada por:




$$Proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u}$$

# Exemplo 7

Determinar o vetor projeção de $\vec{v} = (2, 3, 4)$ sobre $\vec{u} = (1, -1, 0)$.

# Exercício em classe

Sejam os pontos $\boldsymbol{A}(\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{1})$, $\boldsymbol{B}(-\mathbf{1},\mathbf{0},-\mathbf{1})$ e $\boldsymbol{C}(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{2})$, vértices de um triângulo.

a) Mostrar que o triângulo $\boldsymbol{ABC}$ é retângulo em $\boldsymbol{A}$.

# Produto escalar no plano ($R^2$)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço ($R^3$) são válidas para o $R^2$ (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

# Produto escalar no plano ($R^2$)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço ($R^3$) são válidas para o $R^2$ (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (produto escalar);
- $|\vec{u}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$ (módulo do vetor);

# Produto escalar no plano ($R^2$)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço ($R^3$) são válidas para o $R^2$ (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (produto escalar);
- $|\vec{u}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$ (módulo do vetor);
- Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ o ângulo $\theta$ entre os vetores é:

$$cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

# Produto escalar no plano ($R^2$)

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $Proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$ (projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$);

# Produto escalar no plano ($R^2$)

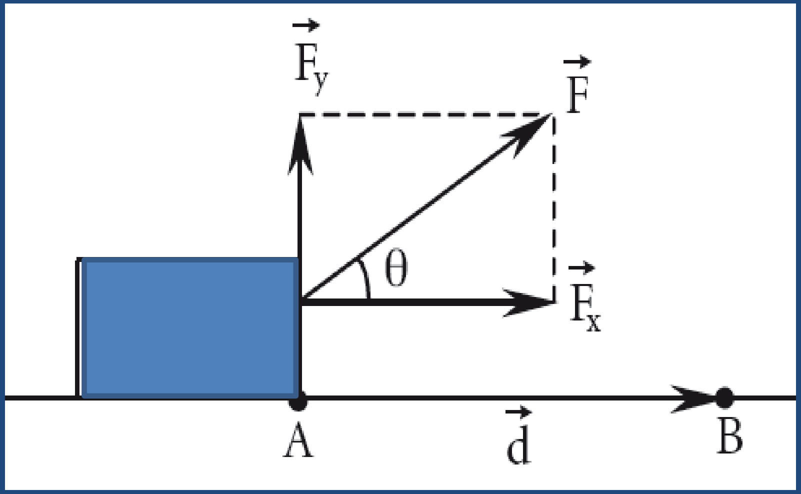
Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $Proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$ (projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$);
- Valem todas as propriedades do produto escalar (comutativa, distributivas e outras);
- $cos^2\alpha + cos^2\beta = 1$

# Aplicação do produto escalar na Física

- O trabalho W realizado por uma força constante $\vec{F}$

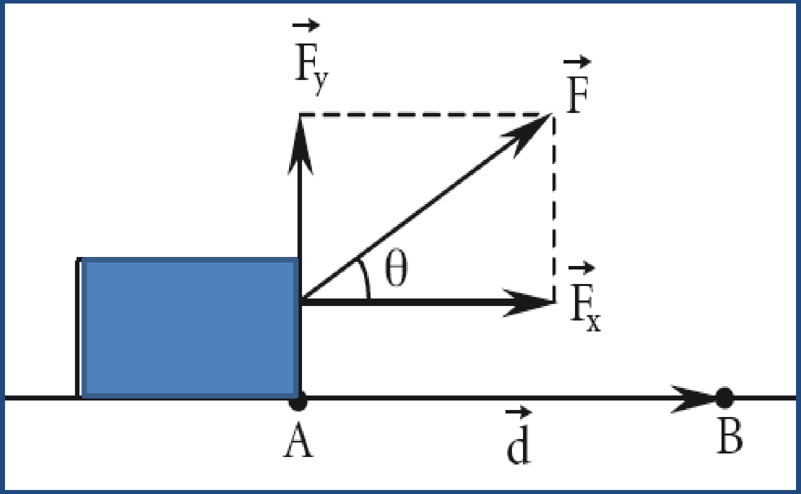
Ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar.



# Aplicação do produto escalar na Física

- O trabalho W realizado por uma força constante $\vec{F}$

Ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar.

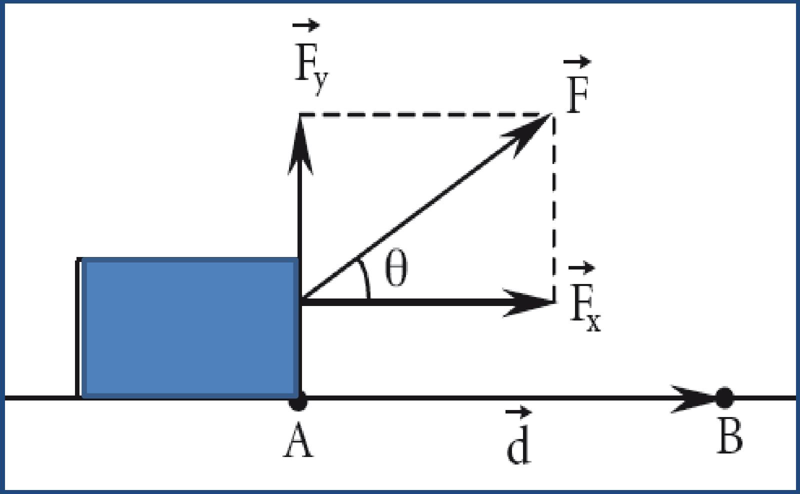



$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

# Aplicação do produto escalar na Física

- O trabalho W realizado por uma força constante $\vec{F}$

Ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto escalar.




$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d}}$$

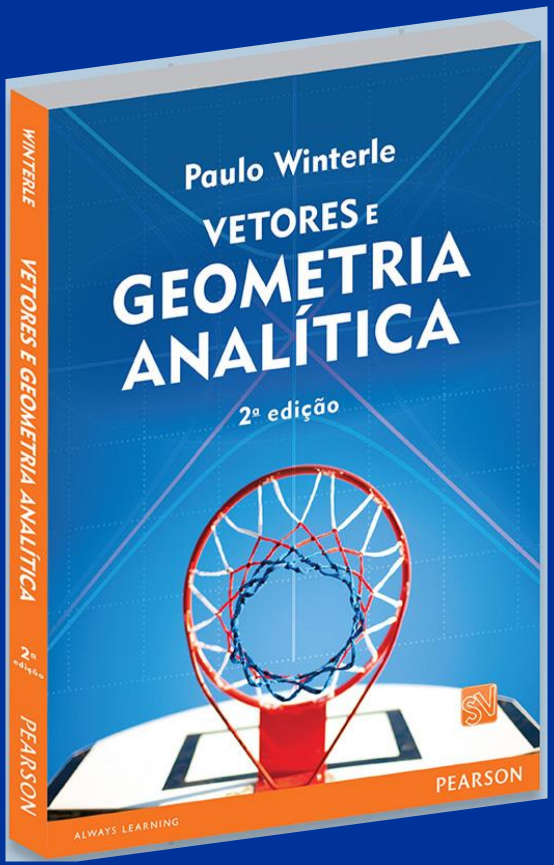
Como: $|\vec{F}_x| = |\vec{F}| cos\theta$

$$\boxed{W = |\vec{F}||\vec{d}| cos\theta}$$

# Exemplo 8

Calcular o trabalhor realizado pela força $\vec{F} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$ para deslocar um corpo de A até B, sabendo que $|\overrightarrow{AB}| = 20\ m$.

# Bibliografia




WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.