Cálculo I

Licenciatura em Química

Aula 03
Funções - B

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Funções Trigonométricas

Modelos periódicos

Muitos fenômenos da natureza se repetem após certo intervalo de tempo;

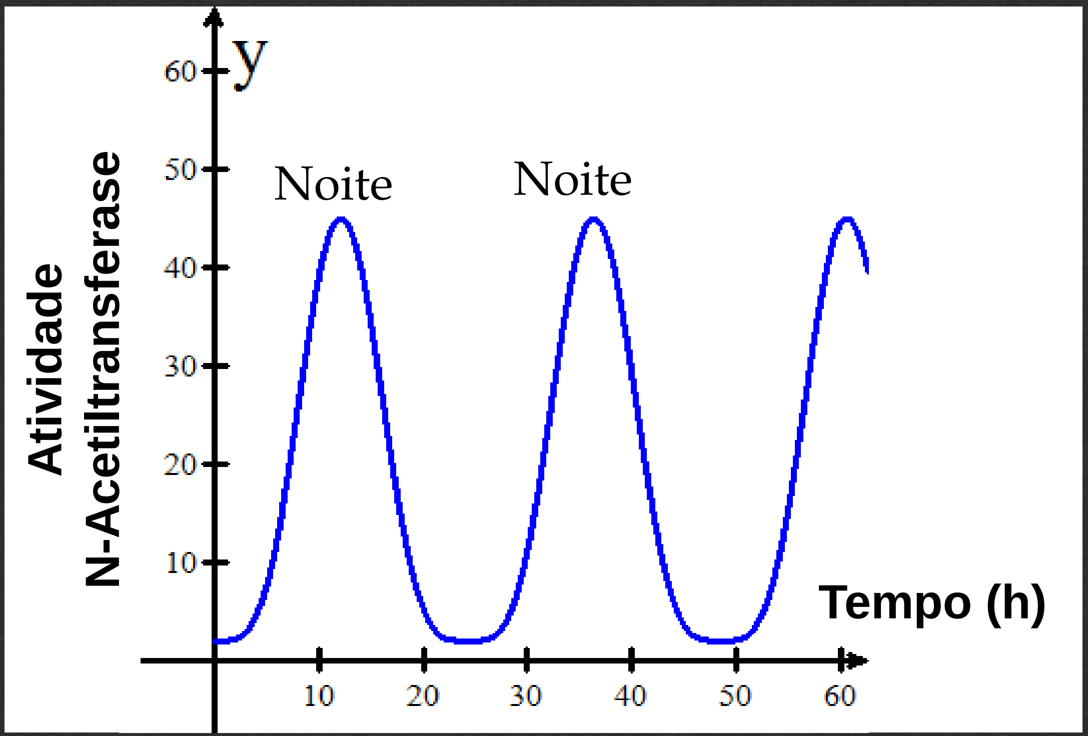
Exemplos:

- Rotação da terra em torno do seu eixo;
- Circunvolução dos planetas em torno do sol.

No campo biológico:

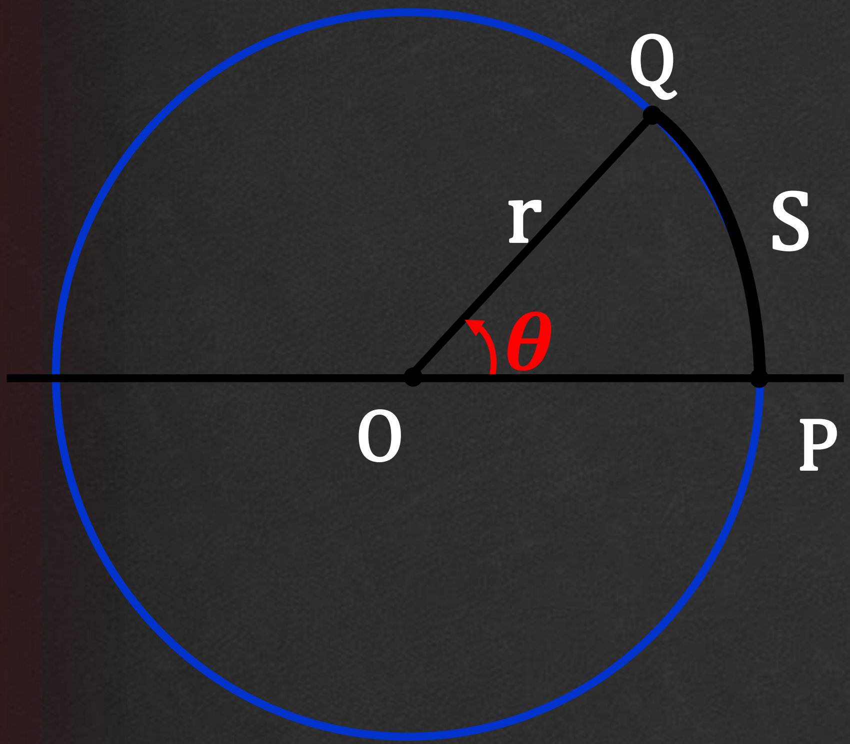
- Ciclos circadianos (se repetem no intervalo de 24 h);
- Ciclos circanuais (ritmos sazonais em um ano).

Atividade circadiana da glândula pineal



$$y = 18{,}125 + 21{,}5\ \left[\cos\frac{\pi}{12}(t+12) + \frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{6}(t+12)\right]$$

3.1 Medida angular

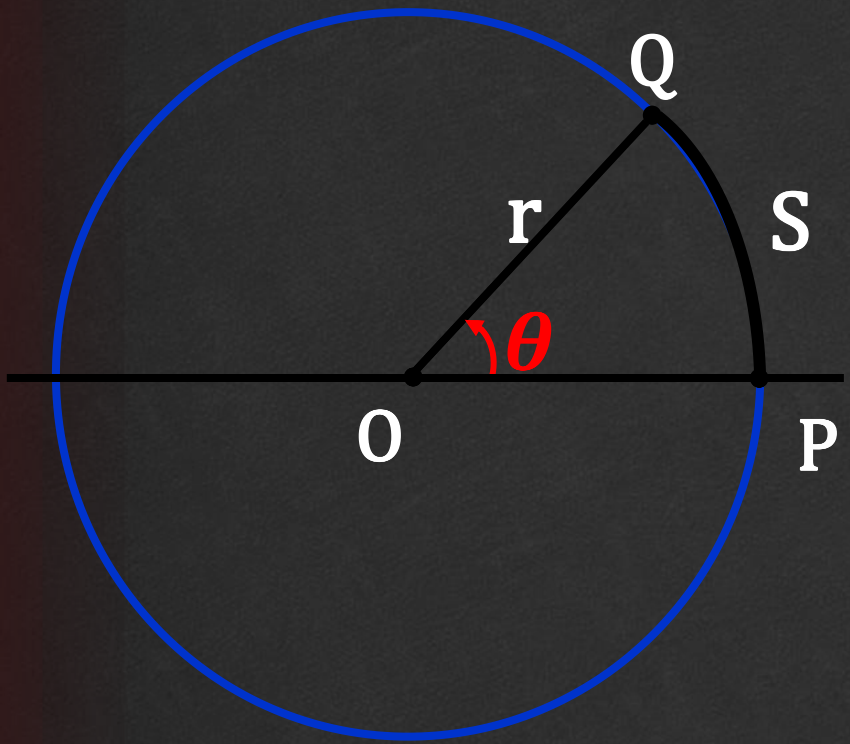


$$P\hat{O}Q = \theta = \frac{S}{r}\ (radianos)$$

$$Se\ S = r \quad \rightarrow \quad \theta = 1\ (rad)$$

$$Se\ S = \pi r \quad \rightarrow \quad \theta = \pi\ (rad)$$

3.1 Medida angular



$$P\hat{O}Q = \theta = \frac{S}{r}\ (radianos)$$

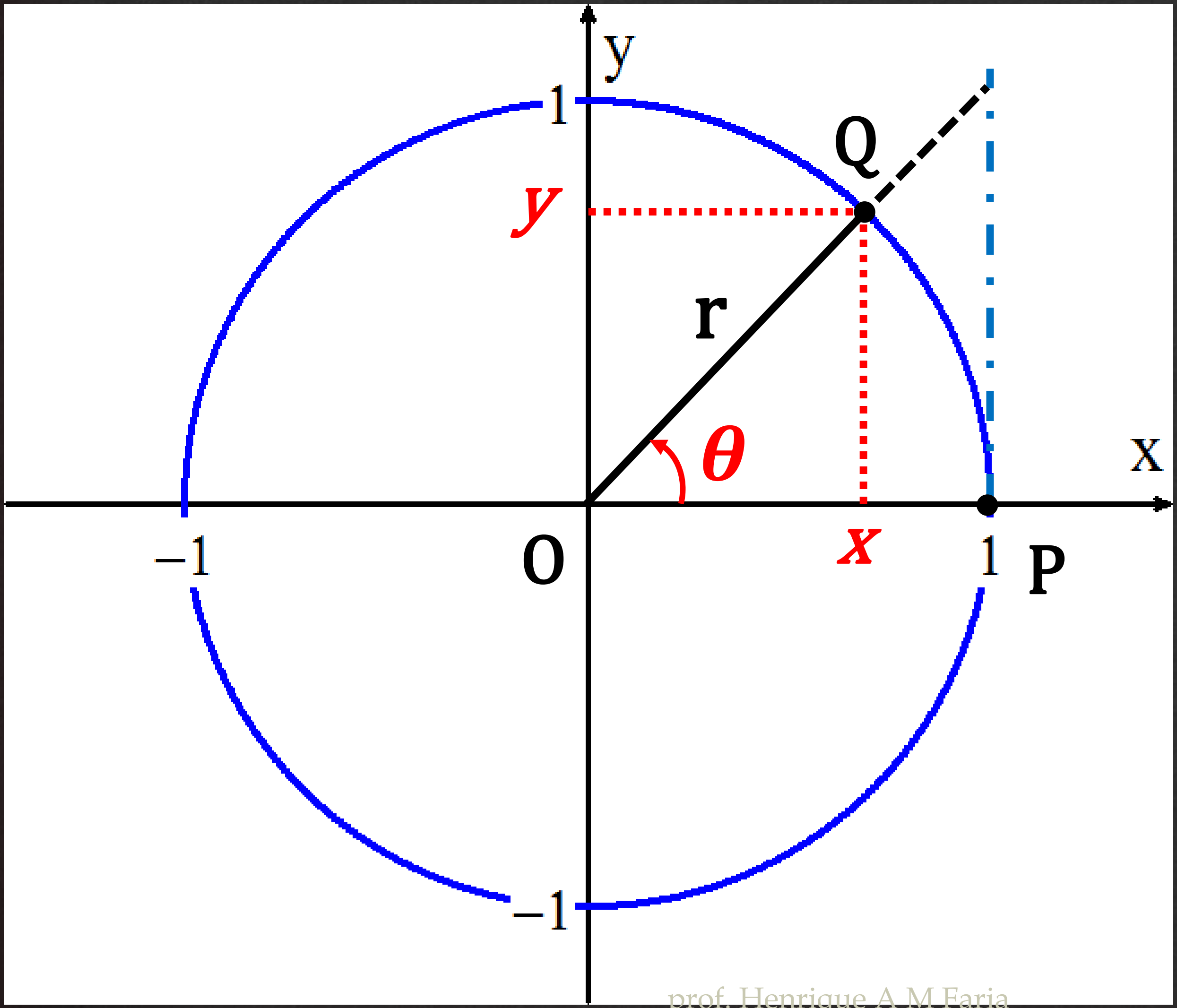
$$Se\ S = r \quad \rightarrow \quad \theta = 1\ (rad)$$

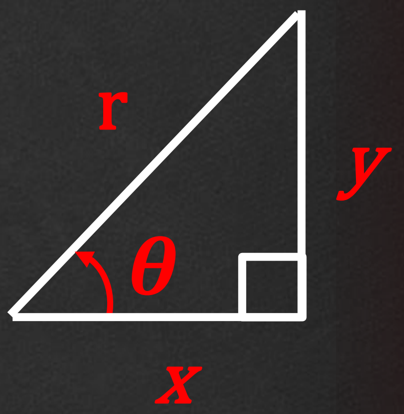
$$Se\ S = \pi r \quad \rightarrow \quad \theta = \pi\ (rad)$$

$$180° \ \rightarrow \ \pi\ (rad) \qquad então, 1\ rad = \frac{180°}{\pi} \cong 57{,}3°$$

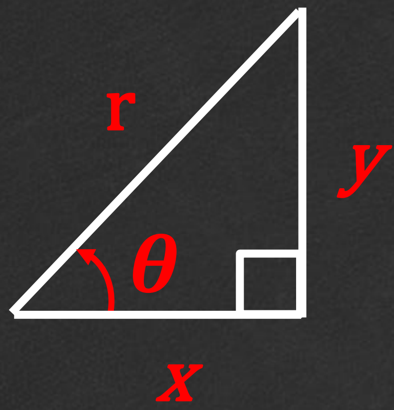
$$\theta' = \theta + 2k\pi \qquad\qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

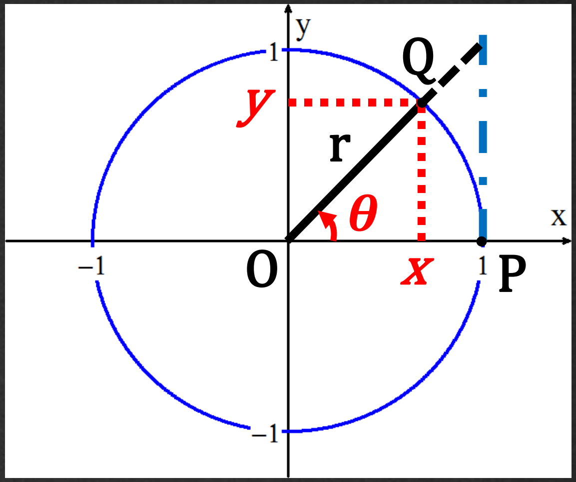
3.2 Funções trigonométricas





Da trigonometria:





$$\cos\theta = \frac{cat\ adjascente}{hipotenusa} = \frac{x}{r}$$

$$sen\theta = \frac{cat\ oposto}{hipotenusa} = \frac{y}{r}$$

$$tg\theta = \frac{cat\ oposto}{cat\ adjascente} = \frac{y}{x} = \frac{sen\theta}{\cos\theta} \qquad \forall\ x \neq 0\ (ou\ \theta \neq \frac{\pi}{2} \pm k\pi)$$

Para alguns valores especiais de θ

θ (graus)	θ (rad)	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
30	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Periodicidade das funções

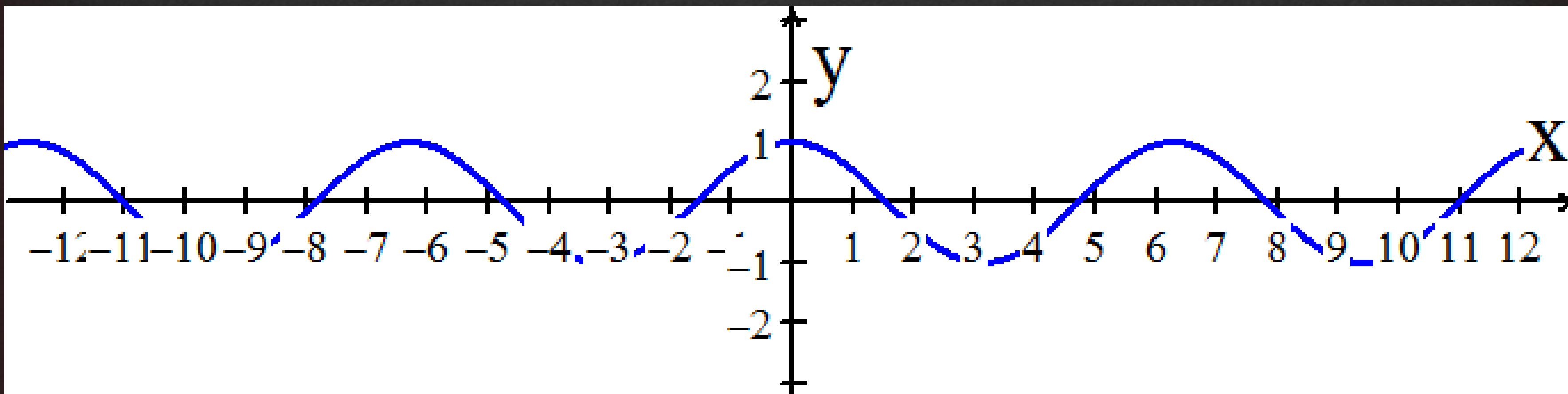
$$cos\theta = \cos(\theta + 2\pi)$$

$$sen\theta = \text{sen}(\theta + 2\pi)$$

$$tg\theta = \text{tg}(\theta + \pi)$$

Função Cosseno

$$y = f(x) = \cos(x) \quad ou \quad y = f(\theta) = \cos(\theta)$$

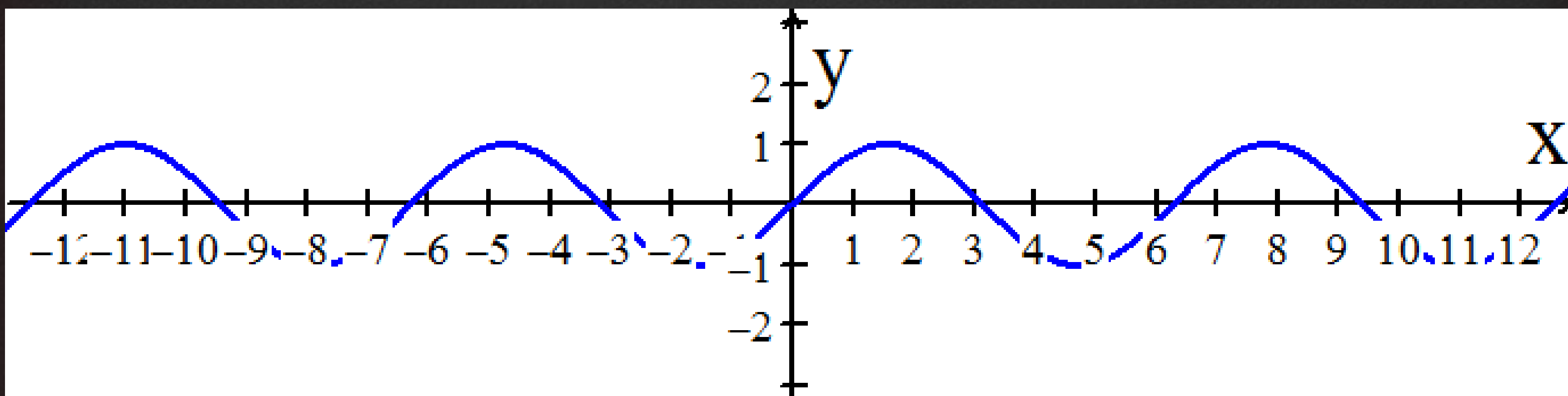


Domínio: $x \in \mathbb{R}$ ou $\theta \in \mathbb{R}$

Imagem: $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Função Seno

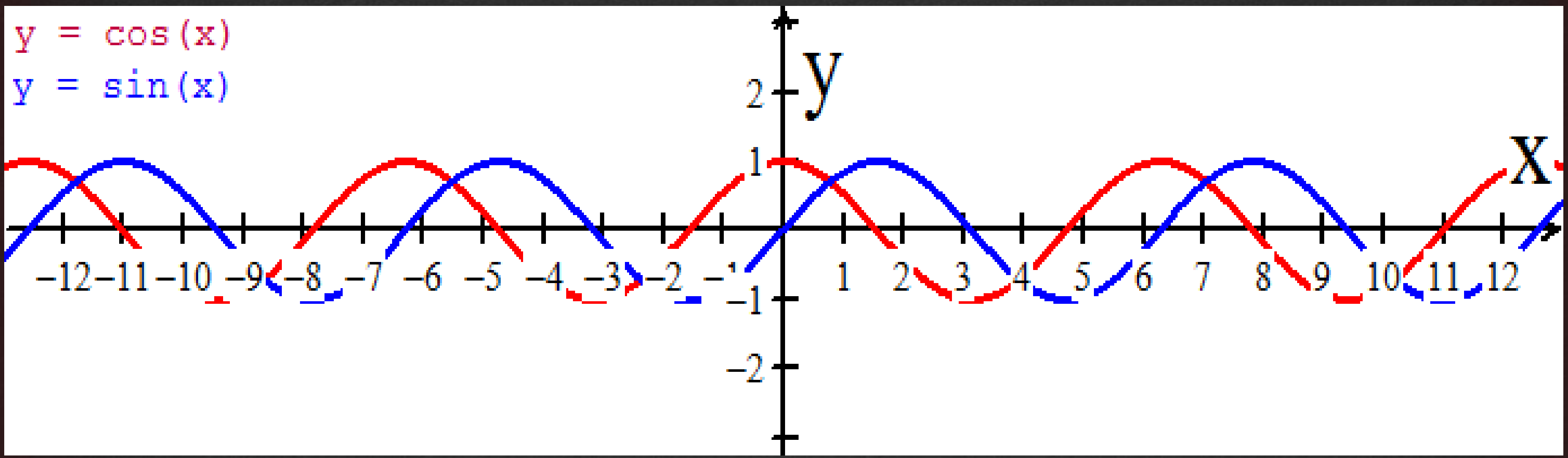
$$y = f(x) = \operatorname{sen}(x) \quad ou \quad y = f(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)$$



Domínio: $x \in \mathbb{R} \quad ou \quad \theta \in \mathbb{R}$

Imagem: $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Funções Cosseno e Seno

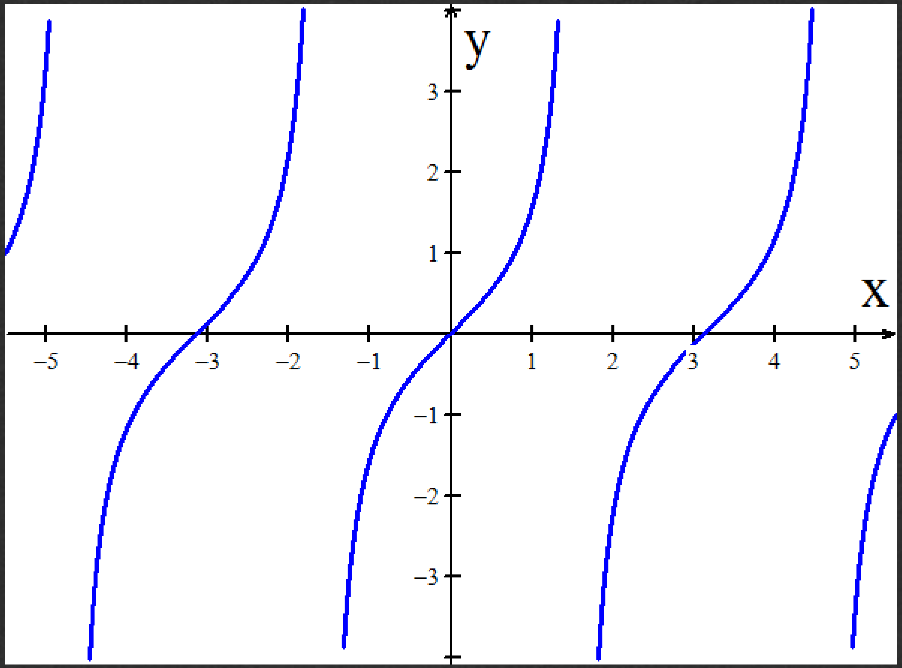


Domínio: $x \in \mathbb{R}$ *ou* $\theta \in \mathbb{R}$

$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad -1 \leq \mathrm{sen}(x) \leq 1$

Função Tangente

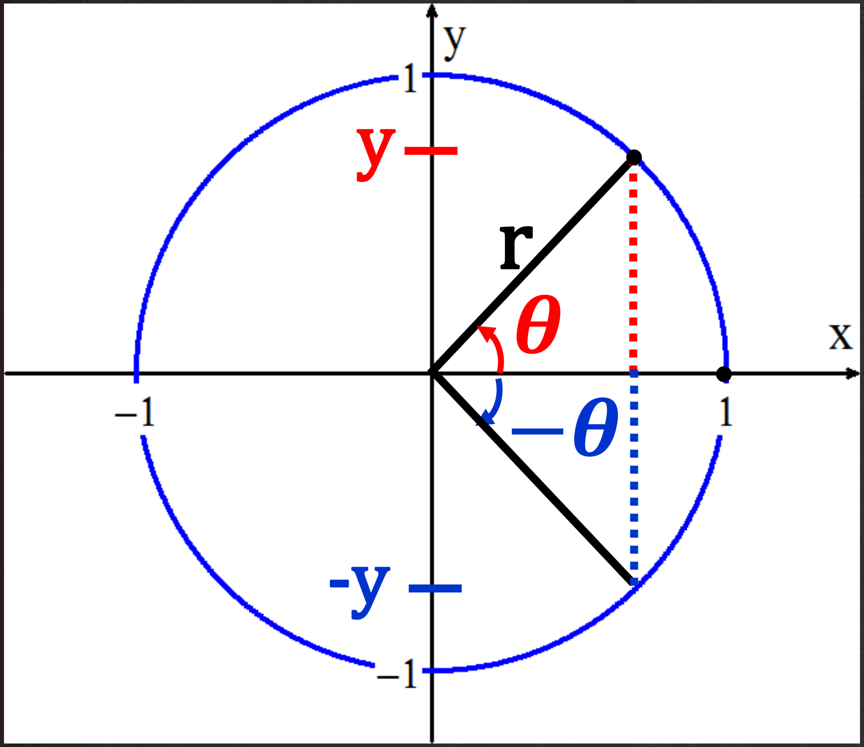
$$y = f(x) = \text{tg}(x) \quad ou \quad y = f(\theta) = \text{tg}(\theta)$$



Domínio: $\left\{x \in \mathbb{R}, \ \ x \neq 0 \ ou \ \ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

Imagem: $y \in \mathbb{R}$ $\qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

3.3 Identidades trigonométricas



$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$sen(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \text{sen}(\frac{\pi}{2} \pm \theta)$$

$$\text{sen}(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} \pm \theta)$$

$$\text{sen}(\theta_1 \pm \theta_2) = \text{sen}\theta_1 cos\theta_2 \pm cos\theta_1 sen\theta_2$$

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 cos\theta_2 \mp sen\theta_1 sen\theta_2$$

3.4 Período e frequência

O período T de uma função periódica $y = g(\theta)$
É um número real T tal que:

$$g(\theta + T) = g(\theta)$$

O recíproco do período é a frequência f:

$$f = \frac{1}{T}$$

3.4 Período e frequência

Período(T): tempo para completar um ciclo quando a função depende do tempo.

Frequência (f): números de ciclos completos por unidade de tempo transcorrido.

Nas funções trigonométricas

Função	Período angular
$seno$	2π
$cosseno$	2π
$tangente$	π

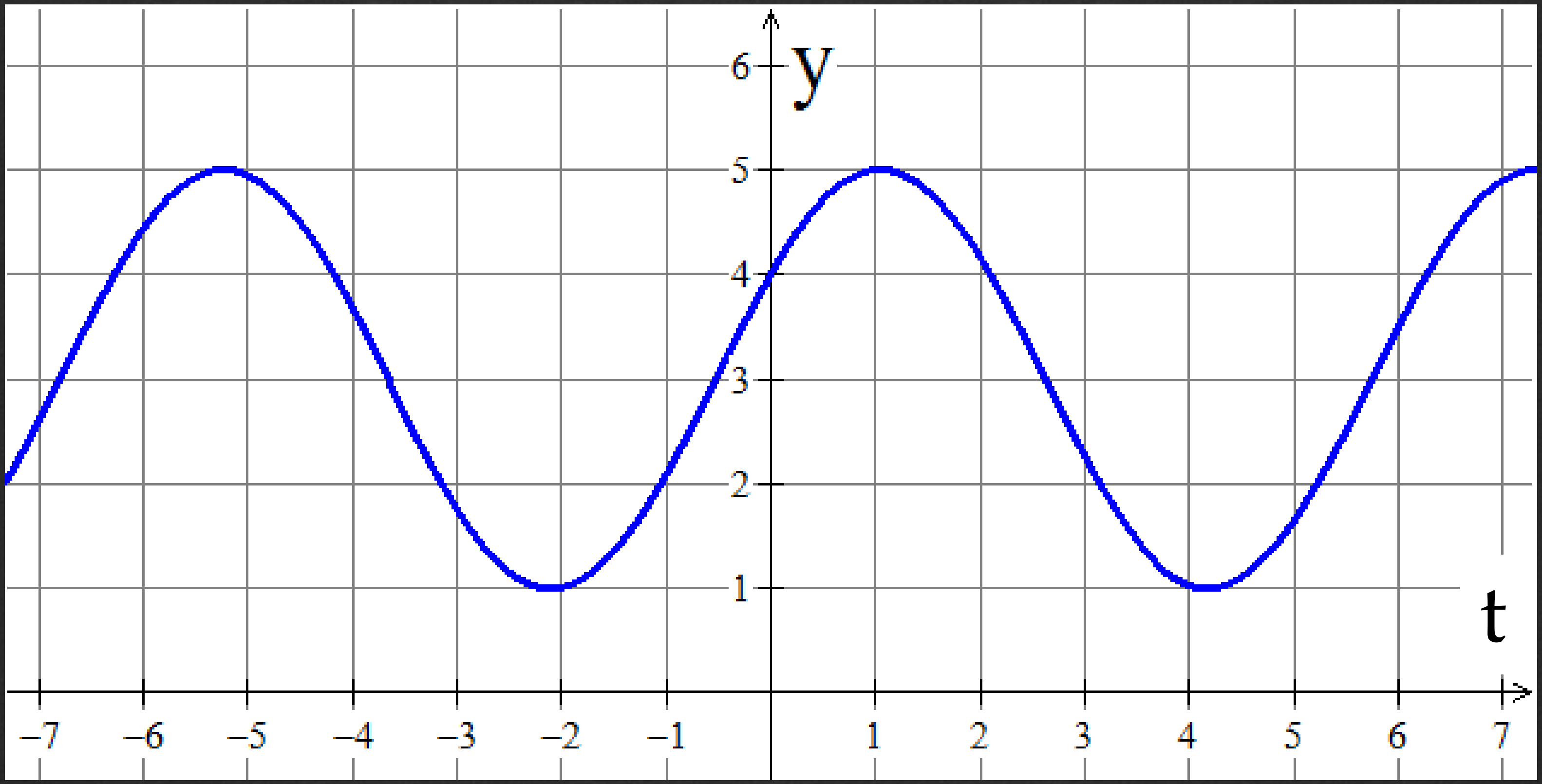
Exemplo 1

Determinar o período, a frequência, a amplitude, o valor máximo e esboçar o gráfico da função abaixo em que o tempo t está em segundos e y em cm.

$$y(t) = 3 + 2sen(t + \frac{\pi}{6})$$

Gráfico

$$y(t) = 3 + 2sen(t + \frac{\pi}{6})$$



Funções exponenciais e logarítmicas

Funções exponenciais e logarítmicas

- Crescimento de populações;
- Tempo de meia-vida de um elemento químico;
- Crescimento de células e organismos;
- Decaimento radiotivo;
- Curvas de aprendizagem.

5.1 Função exponencial

Funções da forma:

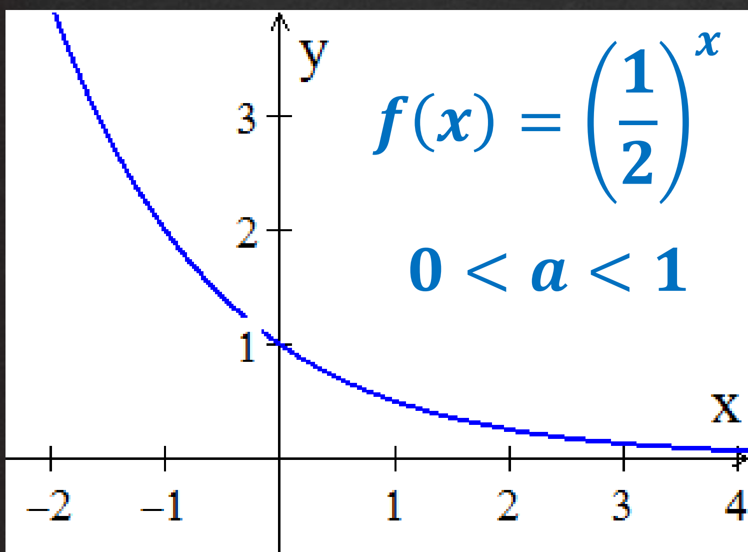
$$\boldsymbol{f}(x) = a^x \qquad a > 0\ (base)$$

Exemplo: $\boldsymbol{f}(x) = 2^x$

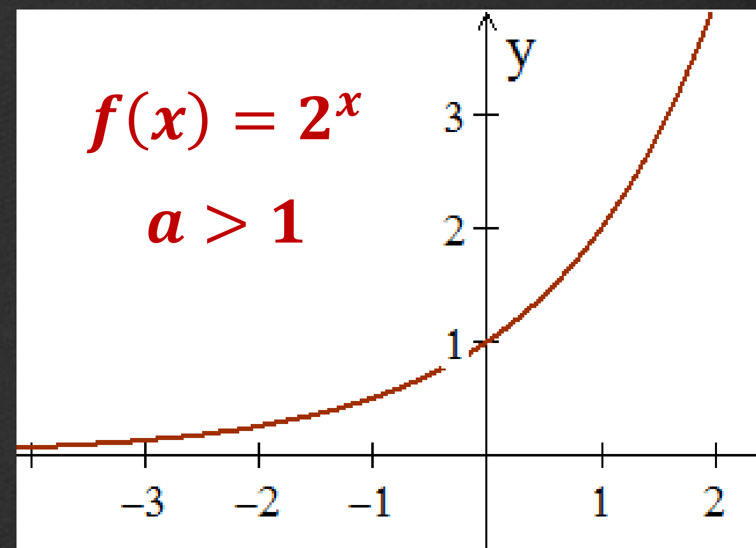
- Na função exponencial a variável $\boldsymbol{x}$ é o expoente;
- Não deve ser confundida com a função potência, do tipo $\boldsymbol{f}(x) = x^2$.

Função exponencial

Como a base a é sempre positiva, tem-se três tipos básicos de gráficos.



Decrescente



Crescente

O terceito tipo, constante, ocorre quando a base é igual a 1.

Exemplo de função exponencial

Encontrar o gráfico de: $y = f(x) = 2^x$

x	y
-3.0	0.1
-2.0	0.2
-1.0	0.5
0.0	1.0
1.0	2.0
2.0	4.0
3.0	8.0
4.0	16.0
5.0	32.0

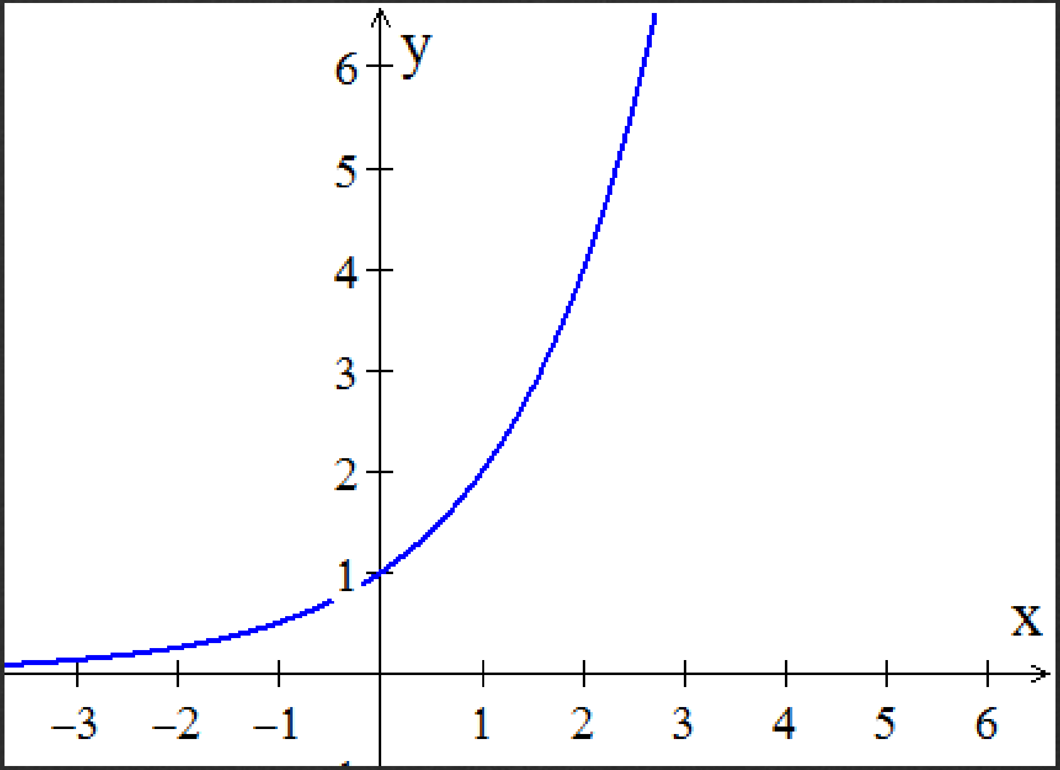


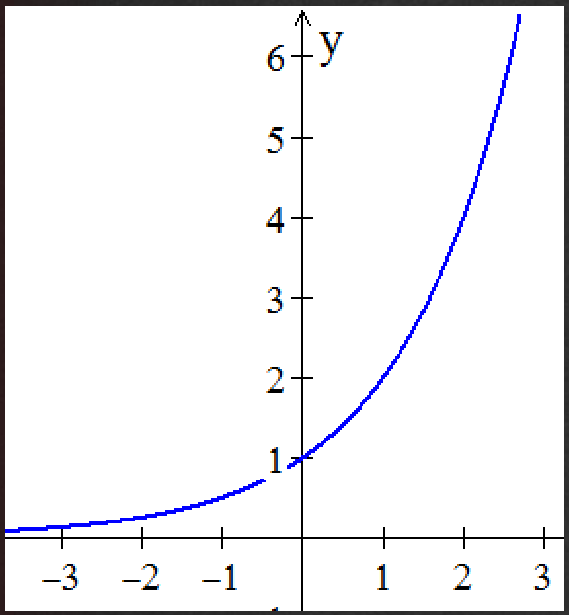
Imagem da função exponencial

Será sempre positiva, mesmo para $x < 0$, pois:

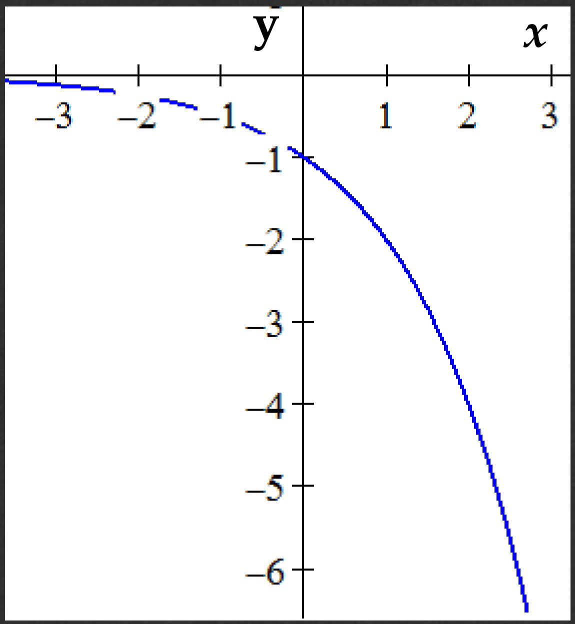
$$\boldsymbol{a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x > 0}$$

A menos que a exponencial seja combinada com outras funções.

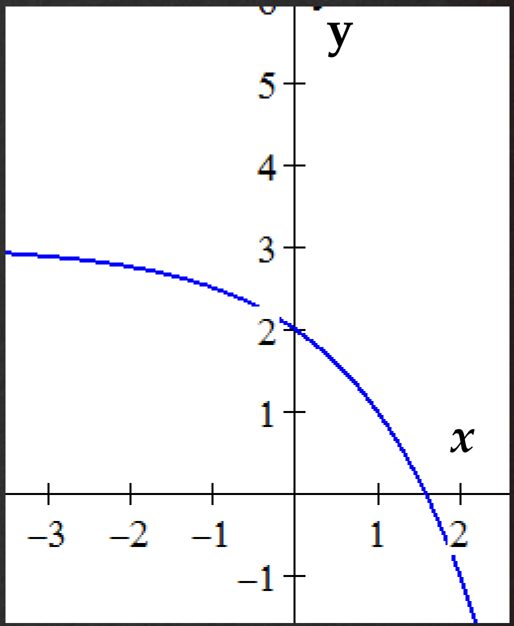
Combinações com a função exponencial



$f(x) = 2^x$

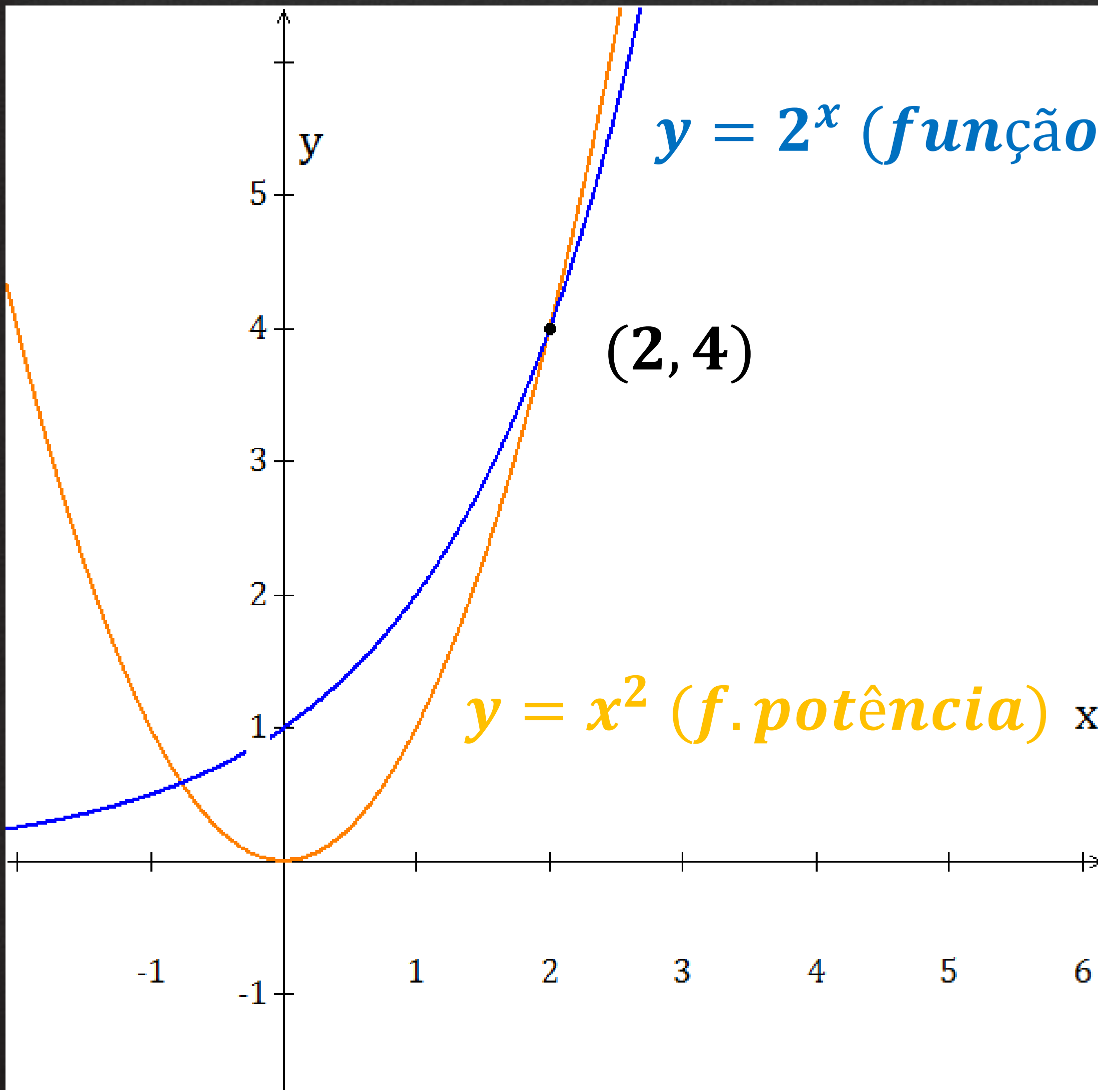


$f(x) = -\ 2^x$



$f(x) = 3 - \ 2^x$

Função exponencial e função potência



Para $x > 4$

$y = 2^x$ cresce

mais rápido do

que $y = x^2$.

Propriedades dos expoentes

Sejam $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ números positivos e $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{t}$ números reais arbitrários. Valem as seguintes propriedades:

1. $a^{x+t} = a^x \times a^t$
2. $a^{x-t} = \dfrac{a^x}{a^t}$
3. $(a^x)^t = a^{xt}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$

Exemplo 2

a. $y = 2^5 \quad \rightarrow \quad y = 2^{3+2} = 2^3 \times 2^2$

b. $y = (3.5)^2$

Número *e* (Constante de Euler)

- A escolha da base afeta a forma com que $\boldsymbol{f}(x) = a^x$ cruza o eixo y;

- Há enorme simplificação, no cálculo, quando a base a fornece uma reta tangente de inclinação $m = 1$ no ponto $(0, 1)$;

- Essa base existe e foi descoberta pelo matemático suíço Euler, em 1727.

Número *e* (Constante de Euler)

- A função $f(x) = e^x$ é chamada exponencial natural;

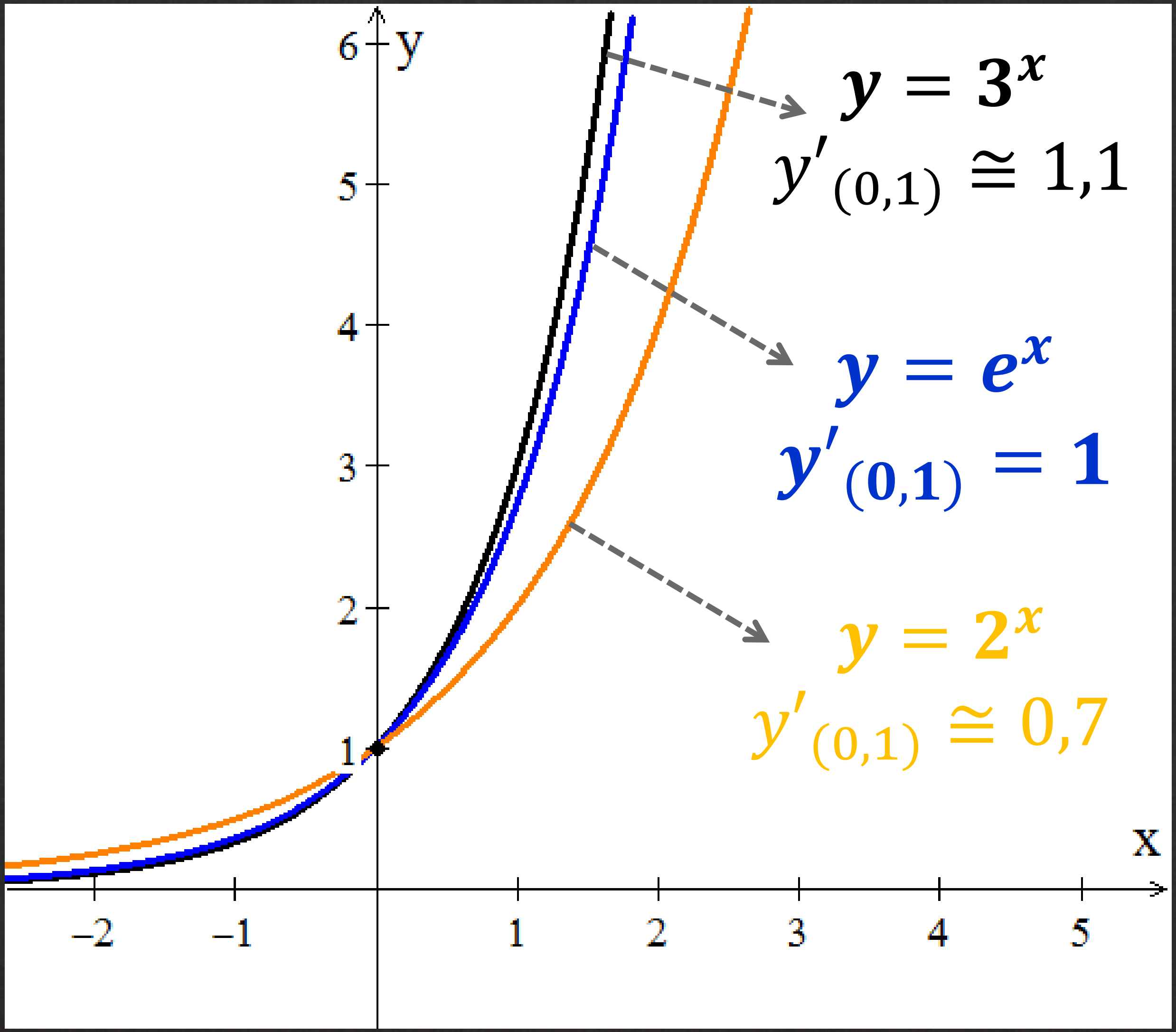
- A base e é um número irracional constante definido pelo limite:

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x = e \cong 2{,}71828\ldots$$

Número *e* (Constante de Euler)

x	$e = \lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^{x}$
1	2
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71827
1.000.000	2,71828

Gráficos comparativos



Função logarítmica

Função logarítmica

Funções da forma:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) = \log_a x \qquad com: \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

A função logarítmica é a inversa da exponencial:

$$\boldsymbol{y} = \log_a x \quad \Longleftrightarrow \quad x = a^y$$

Função logarítmica

Na base e (logarítimo natural ou neperiano):

$$\log_e x = \ln x \qquad com: \ x > 0$$

$$\boldsymbol{y} = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{y}$$

A função logarítmica natural será:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \ln x \qquad x > 0$$

Propriedades dos logaritmos

Sejam $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ números positivos, $\boldsymbol{x > 0}$ e $\boldsymbol{n > 0}$.

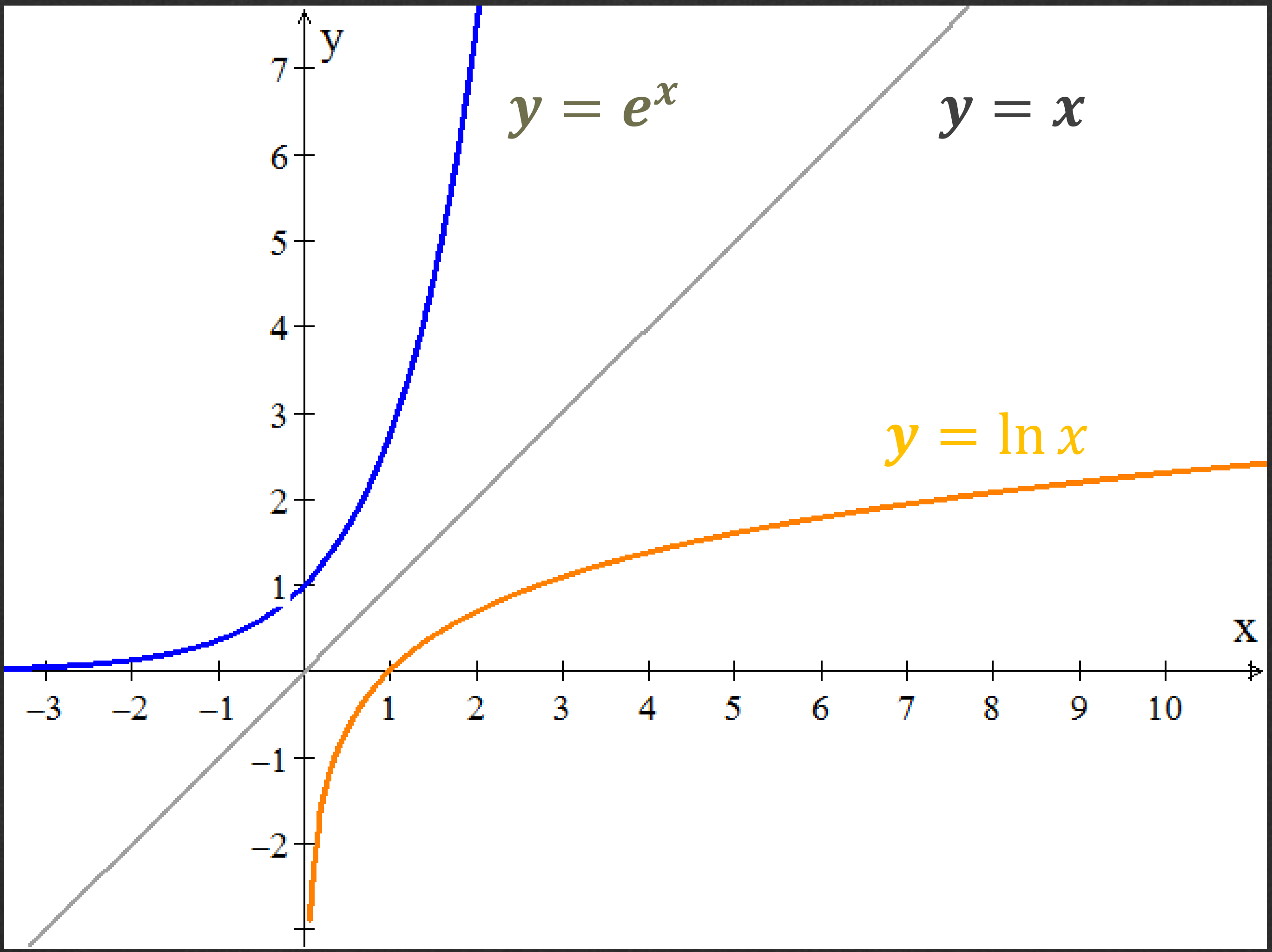
1. $\log_a \mathbf{1} = \mathbf{0}$
2. $\log_a \boldsymbol{a} = \mathbf{1}$
3. $\log_a(\boldsymbol{bc}) = \log_a \boldsymbol{b} + \log_a \boldsymbol{c}$
4. $\log_a \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}\right) = \log_a \boldsymbol{b} - \log_a \boldsymbol{c}$
5. $\log_a \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n} \log_a \boldsymbol{b}$

Propriedades dos logaritmos neperianos

Sejam $\boldsymbol{a, b, c}$ e $\boldsymbol{d}$ números positivos, $\boldsymbol{x > 0}$ e $\boldsymbol{n > 0}$.

1. $\boldsymbol{ln\,1 = 0}$
2. $\boldsymbol{ln\,e = 1}$
3. $\boldsymbol{ln\,(bc) = ln\,b + ln\,c}$
4. $\boldsymbol{ln\left(\frac{b}{c}\right) = ln\,b - ln\,c}$
5. $\boldsymbol{ln\,b^n = n\,ln\,b}$
6. $\boldsymbol{ln\,e^x = x}$
7. $\boldsymbol{e^{ln\,x} = x}$

Gráfico da função logarítmica

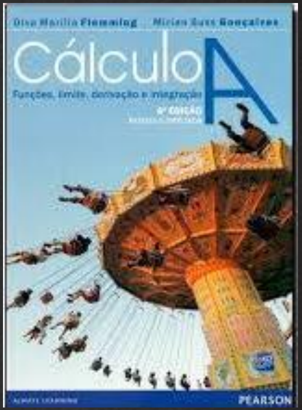


Próxima aula teórica:

- Conceito de Limites;

Bibliografia

3. GONÇALVES, Mirian B.; FLEMMING, Diva M. Cálculo A. 6. ed. São Paulo: Pearson, 2007.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br