Capítulo 3 - Produto Vetorial

Geometria Analítica

Prof. Henrique A. M. Faria

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

Propriedade (a): permutação de linhas inverte o sinal

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right| =$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \mathrm{a} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{array}\right| =$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

Definição de produto Vetorial

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}), \quad \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$

- Expresso pela forma: $\vec{u}$^$\vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$;
- O resultado é um terceiro vetor, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
- Para calculá-lo utiliza-se o determinante:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = VETOR$$

Exemplo

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

$$\vec{u} \times \vec{v} =$$

Exercícios em sala

Sejam $\vec{u} = (3, -1, -2)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, 1)$

1) $\vec{u} \times \vec{u}$

2) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$

3) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$

4) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

5) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Dispositivo prático para o cálculo

Sejam $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{5}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (\ 4,\ \ -2,\ \ -4\ )$$

As três componentes de $\vec{u} \times \vec{v}$ são dadas pelos três determinantes da coordenadas dos dois vetores.

Característica do produto escalar

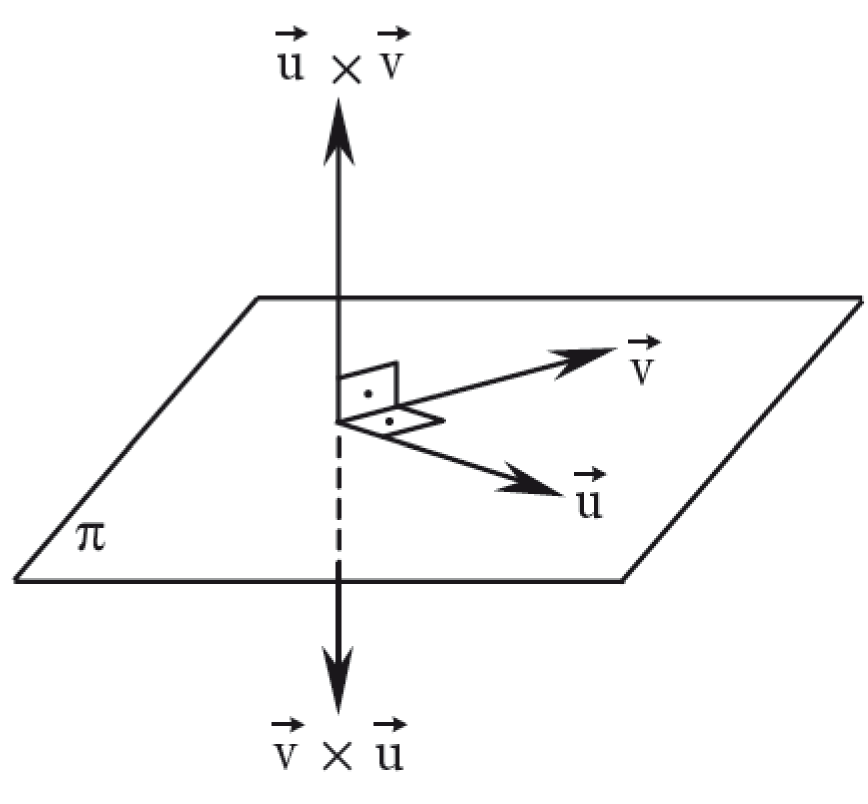


Figura 3.2

- O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortotogonal a $\vec{u}\ e\ \vec{v}$.
- O comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,sen\theta$

Regra da mão direita

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido pela regra da mão direita.

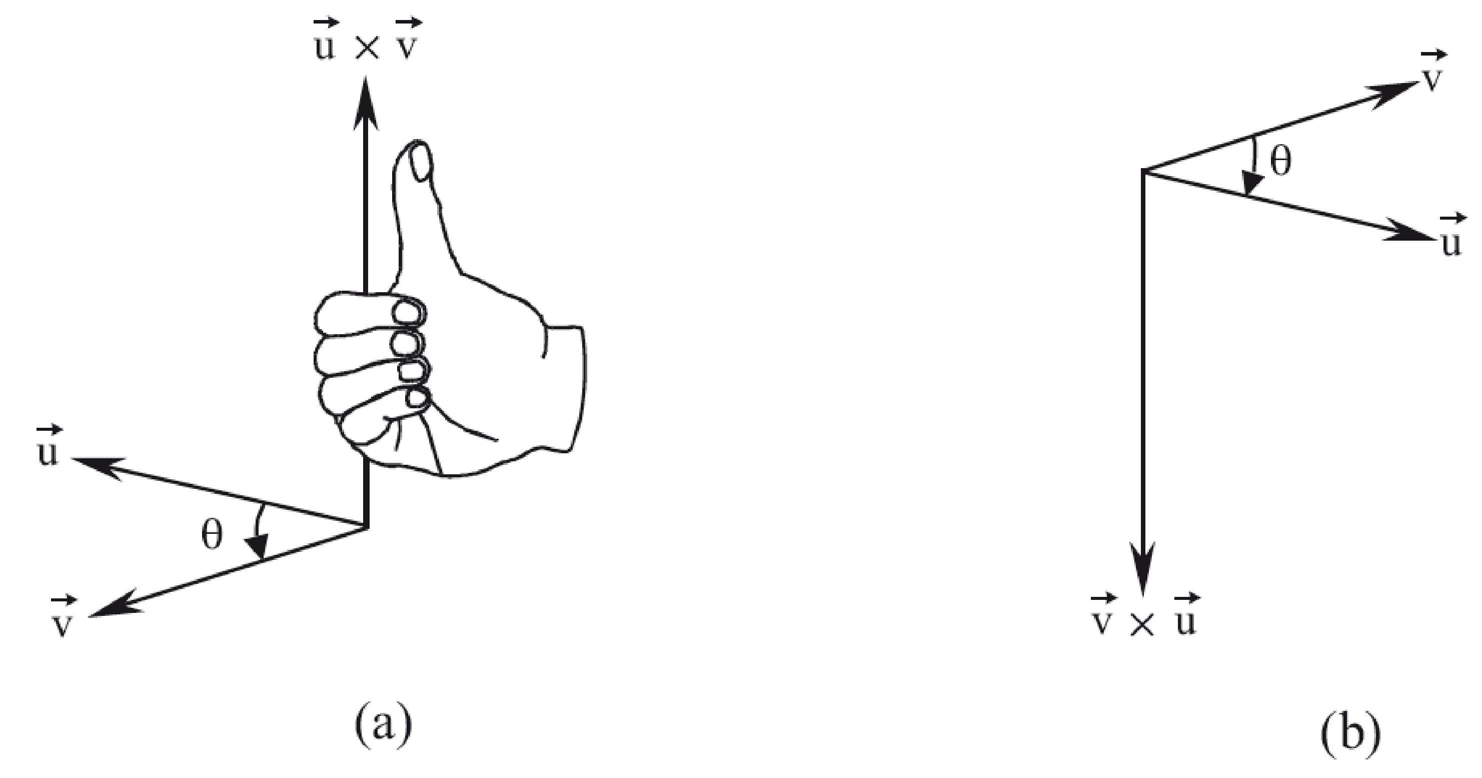


Figura 3.3

Regra para os vetores da base

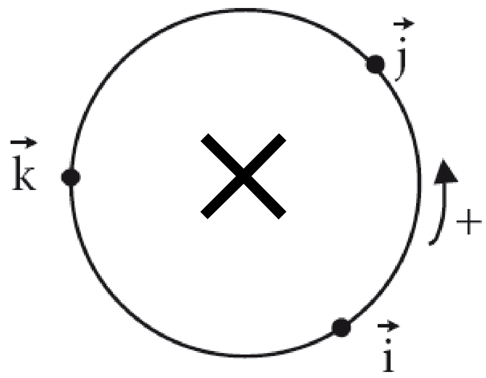


Figura 3.4

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Regra para os vetores da base

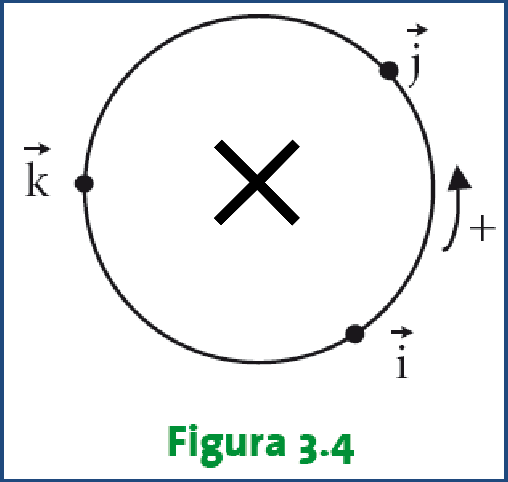
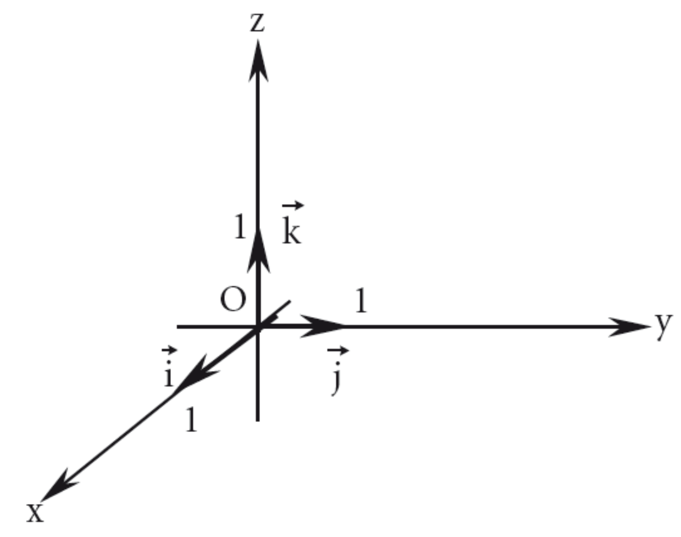


Figura 3.4

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



Exemplo

Determine o vetor $\vec{\boldsymbol{x}}$ ortogonal ao eixo y de maneira que $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$, sendo: $\vec{u} = (1,1,-1)$, $\vec{v} = (2,-1,1)$.

Interpretação geométrica para o produto vetorial

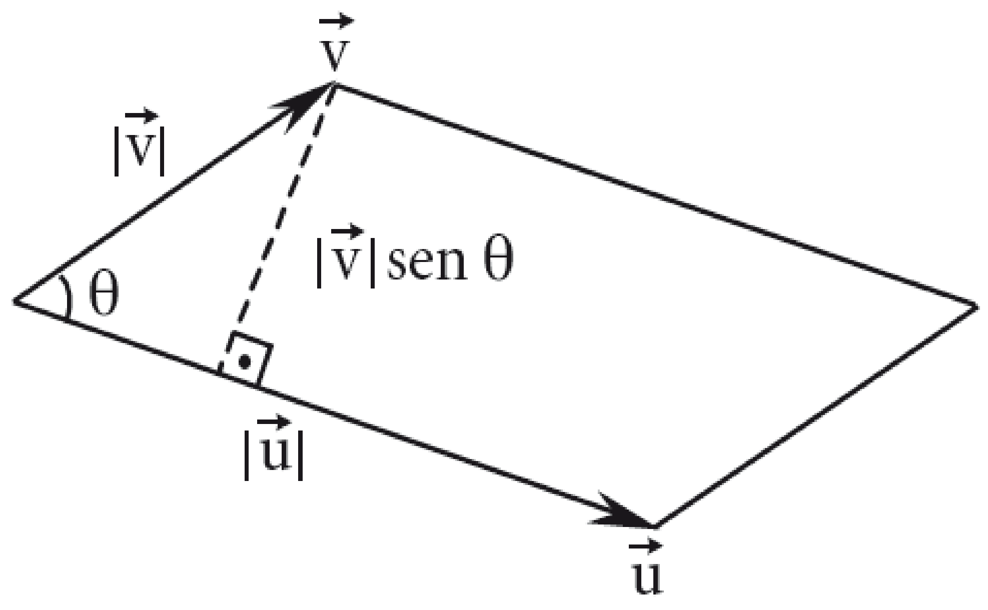


Figura 3.5

Área do paralelogramo

$$A = Base \times altura$$

$$A = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta$$

Interpretação geométrica

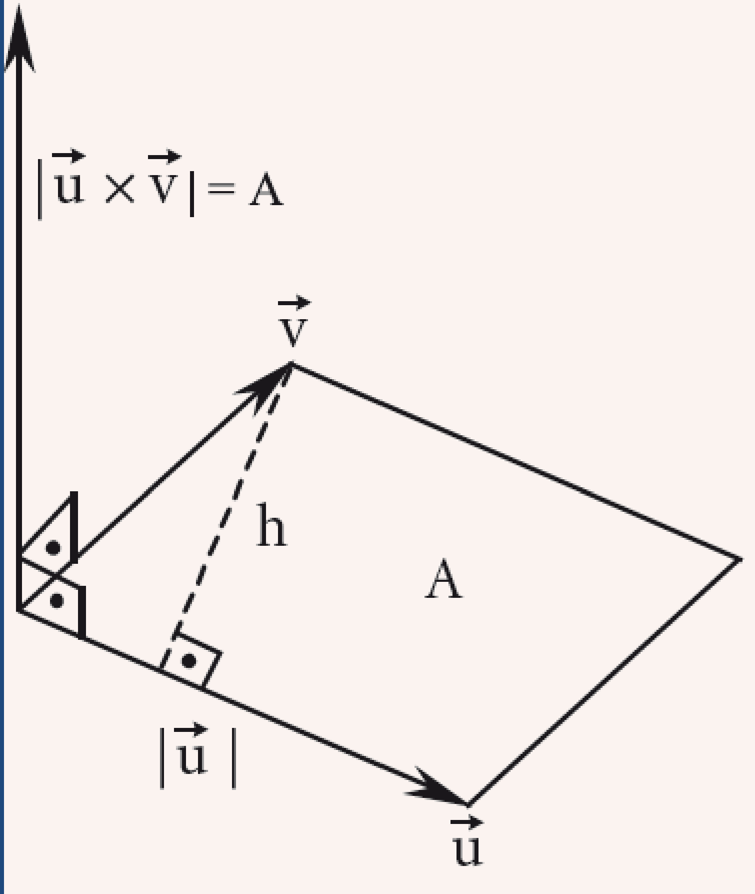


Figura 3.8

Identidade de Lagrange

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta = A$$

Exemplo

Determine o $|\vec{u} \times \ \vec{v}|$, sendo:

$\vec{u} = (2{,}0{,}0), \quad \vec{v} = (0{,}3{,}0).$

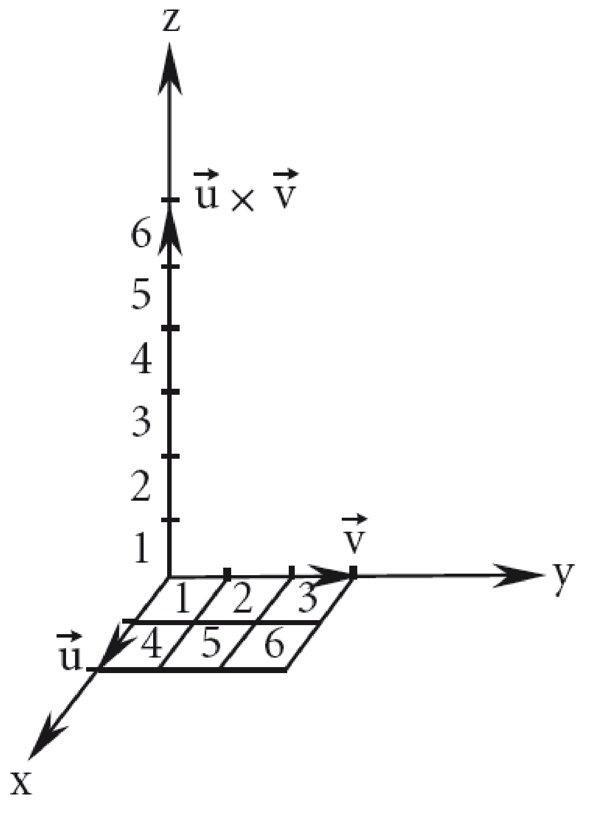


Figura 3.6

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores e $\propto$ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Nota: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer e ∝ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

~~**Nota**:~~ $\xcancel{(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})}$ Não Associativo

Exemplo 4

Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1{,}1), \quad \vec{v} = (2, -3{,}4)$, calcular:

a) A área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) A altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{u}$.

Aplicação na Física: Torque ($\vec{\tau}$)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad\qquad |\vec{\tau}| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right| sen\theta$$

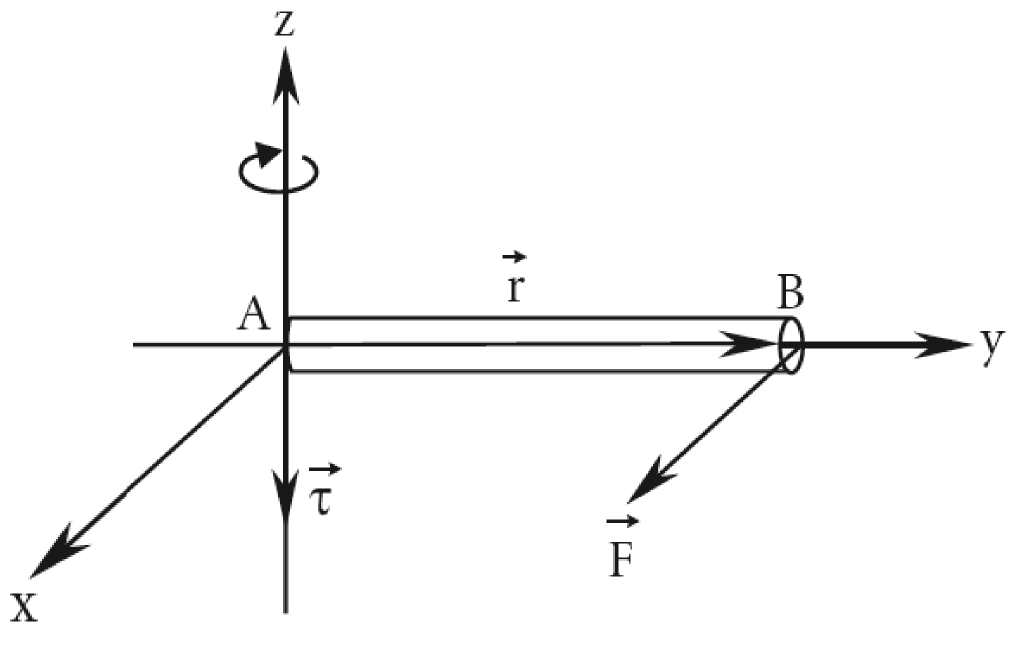


Figura 3.11

Aplicação na Física

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

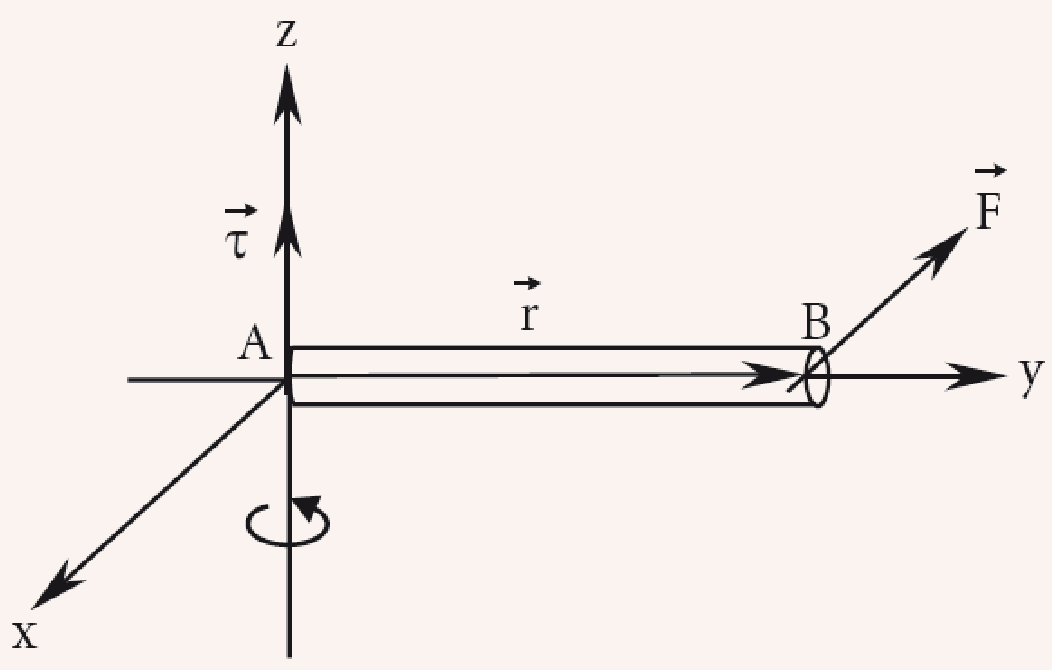


Figura 3.12

Exemplo

Calcular o torque sobre uma barra de comprimento

$\vec{\boldsymbol{r}} = 2\vec{\boldsymbol{j}}\,[\mathrm{m}]$ sujeita a uma força $\vec{\boldsymbol{F}} = \mathbf{10}\vec{\boldsymbol{\imath}}\,[\boldsymbol{N}]$.

Indicar o sentido de rotação.

Capítulo 4 – Produto Mixto

Definição do Produto Mixto

Sejam:

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$

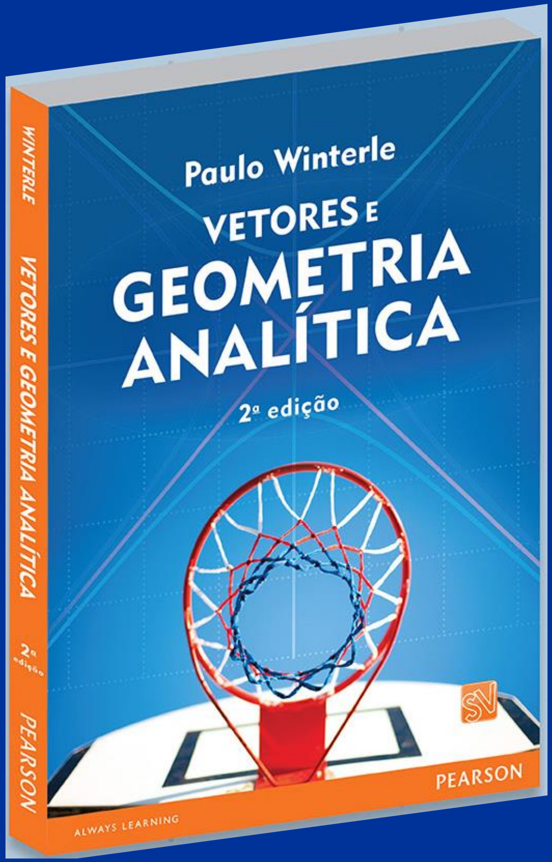
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = Escalar$$

Exemplo

Calcular o produto misto entre os vetores

$\vec{u} = (2,3,5), \quad \vec{v} = (-1,3,3)$ e $\vec{w} = (4,-3,2)$.

Bibliografia



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.