Geometria Analítica
Engenharias

Semana 03 – Aula 1
Produto escalar

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Definição algébrica

Sejam: $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{x_1}\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{y_1}\vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{z_1}\vec{\boldsymbol{k}}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x_2}\vec{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{y_2}\vec{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{z_2}\vec{\boldsymbol{k}}$

Definição algébrica

Sejam: $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

O produto escalar, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é a operação:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Definição algébrica

Sejam: $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

O produto escalar, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é a operação:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

O resultado do produto escalar é um número real.

Exemplo 1

a) Sendo : $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ calcular o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Propriedades do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Propriedades do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)

Propriedades do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)
3. $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (distributiva)
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ $\quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$

Propriedades do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)
3. $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$ (distributiva)
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Exemplo 2: demonstre a propriedade I

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Exercício: prove a propriedade V

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$$

Exemplo 3:

Sendo $|\vec{u}| = 4$; $|\vec{v}| = 2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ calcule:

$$(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 4\vec{v}) =$$

Exemplo 4 - Provar que:

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

Exercício - Demonstre (Fazer em casa):

a) $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

Definição geométrica do produto escalar

Seja um triângulo ABC definido pela soma de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, como na Figura 2.1.

Definição geométrica do produto escalar

Seja um triângulo ABC definido pela soma de dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, como na Figura 2.1.

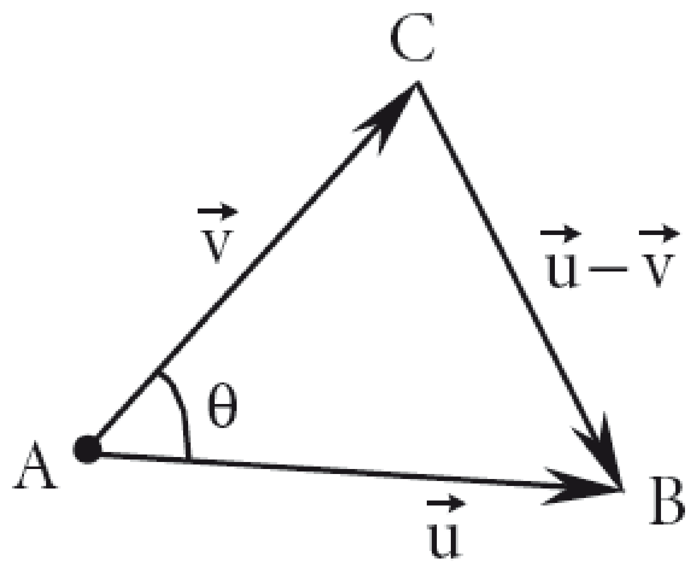


Figura 2.1

Definição geométrica do produto escalar

Aplicando a propriedade do módulo:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

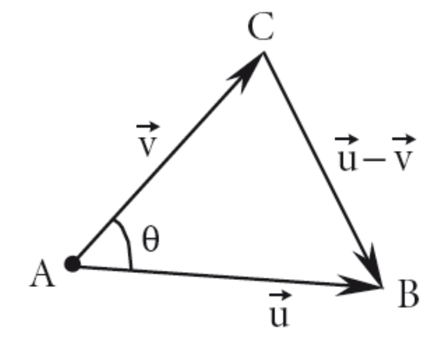


Figura 2.1

Definição geométrica do produto escalar

Aplicando a propriedade do módulo:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

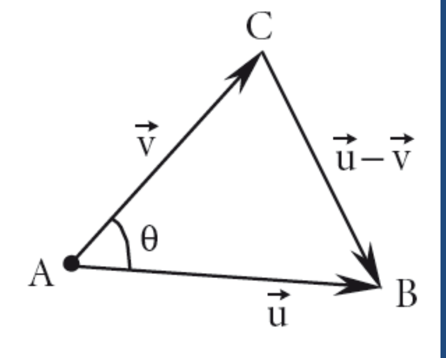


Figura 2.1

Por outro lado, da lei dos cossenos:

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\ cos\theta + |\vec{v}|^2$$

Definição geométrica do produto escalar

Aplicando a propriedade do módulo:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$$

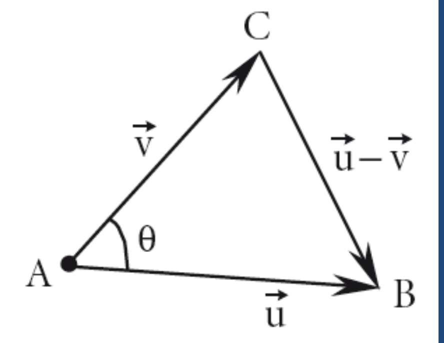


Figura 2.1

Por outro lado, da lei dos cossenos:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\,cos\theta + |\vec{v}|^2$$

Igualando as duas equações:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\,cos\theta}$$

$$0° < \theta \leq 180°$$

Ângulo entre dois vetores

O cosseno do ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido pela razão entre o produto escalar e os módulos destes vetores.

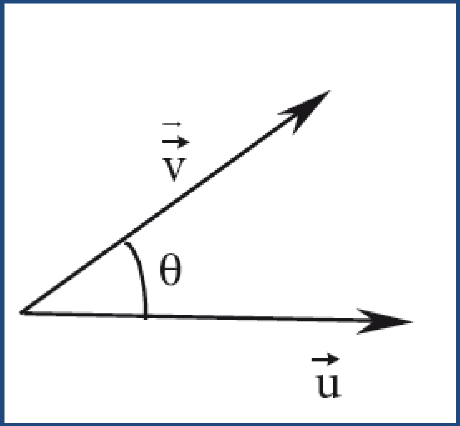
$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Ângulo notáveis

θ (graus)	θ (rad)	senθ	cosθ	tg$\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Casos para o produto escalar

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



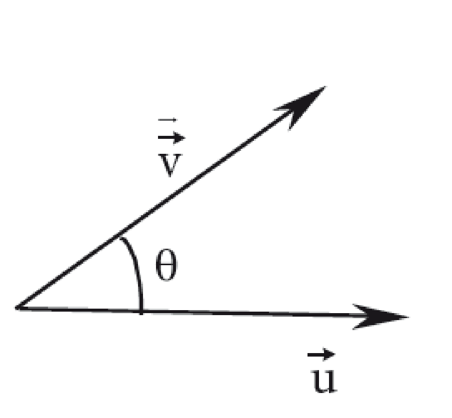
Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$,

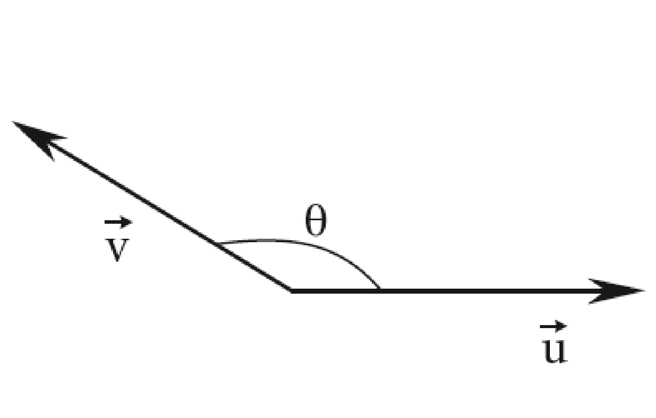
$\cos\theta > 0$

$0 \leq \theta < 90°$

Casos para o produto escalar

$$cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$



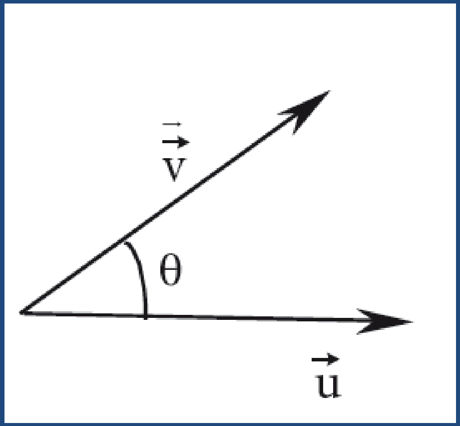


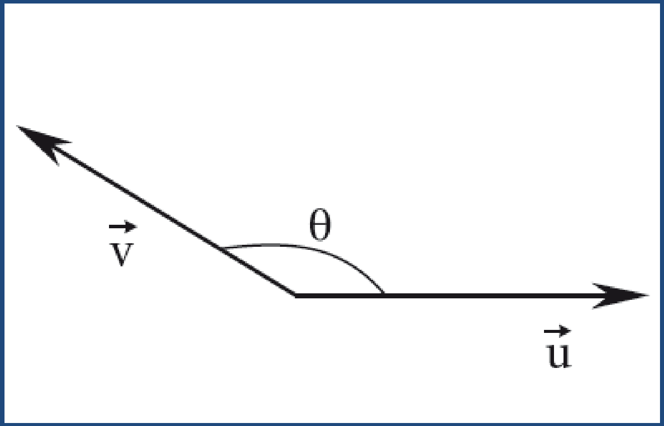
Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$,
$\cos\theta > 0$
$\mathbf{0 \leq \theta < 90°}$

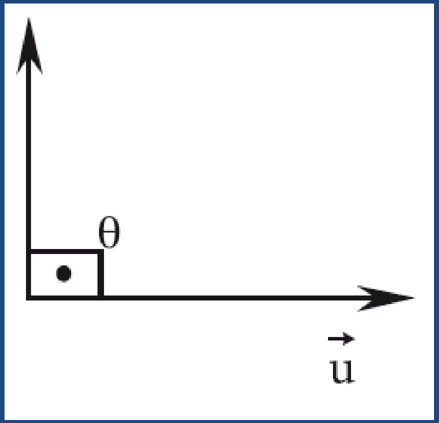
Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$,
$\cos\theta < 0$
$\mathbf{90° < \theta \leq 180°}$

Casos para o produto escalar

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$







Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$,
$\cos\theta > 0$
$0 \leq \theta < 90°$

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$,
$\cos\theta < 0$
$90° < \theta \leq 180°$

Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
$\cos\theta = 0$
$\theta = 90°$

Ortogonalidade da base canônica $\mathbf{C} = \{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$

$\vec{\boldsymbol{i}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$ e $\vec{\boldsymbol{j}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$

$$\vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \mathbf{1} \times \mathbf{0} + \mathbf{0} \times \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

$\vec{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} = |\vec{\boldsymbol{i}}||\vec{\boldsymbol{j}}|\boldsymbol{cos\theta}$ como: $|\vec{\boldsymbol{i}}| = |\vec{\boldsymbol{j}}| = \mathbf{1}$

$$\boldsymbol{cos\theta} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{90°}$$

Exemplo 5 - Calcular o ângulo entre vetores

$\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.

Exercício

Sabendo que o vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{1})$ forma um ângulo de $\mathbf{60}°$ com o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, cujos pontos são **A**$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$ e **B**$(\mathbf{4}, \mathbf{0}, \boldsymbol{m})$, calcule o valor de $\boldsymbol{m}$.

Resp.: $\boldsymbol{m} = -\mathbf{4}$

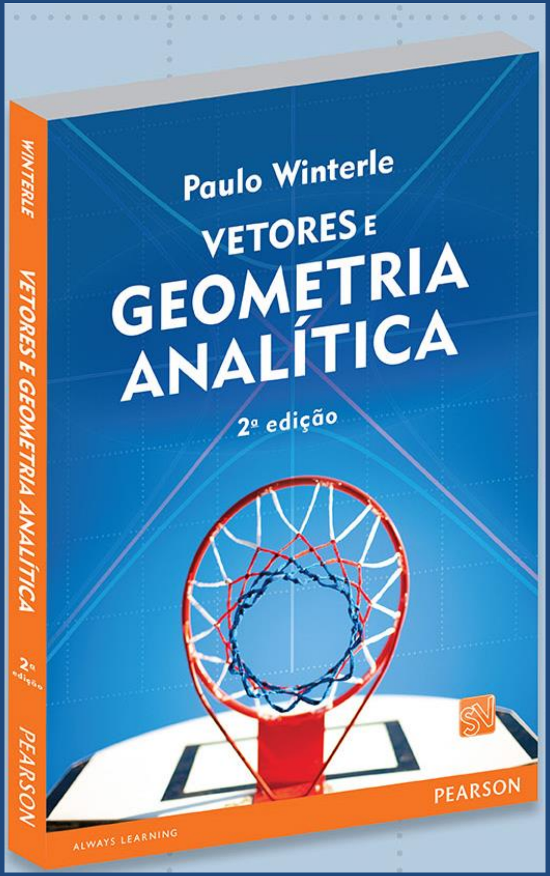
Para depois da aula

- Reler o capítulo 2 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios.

Próxima aula

- Ângulos diretores e projeção de vetor.

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenrique.com

henrique.faria@unesp.br