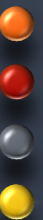


Prática 3 – Gráficos de funções potência e exponencial

{ Física Experimental I

Prof. Dr. Henrique A. M. Faria



Funções quadráticas do tipo $y = Ax^2$

Funções do tipo $y = Ax^2$

- Por exemplo movimento retilíneo uniforme variado, partindo do repouso.

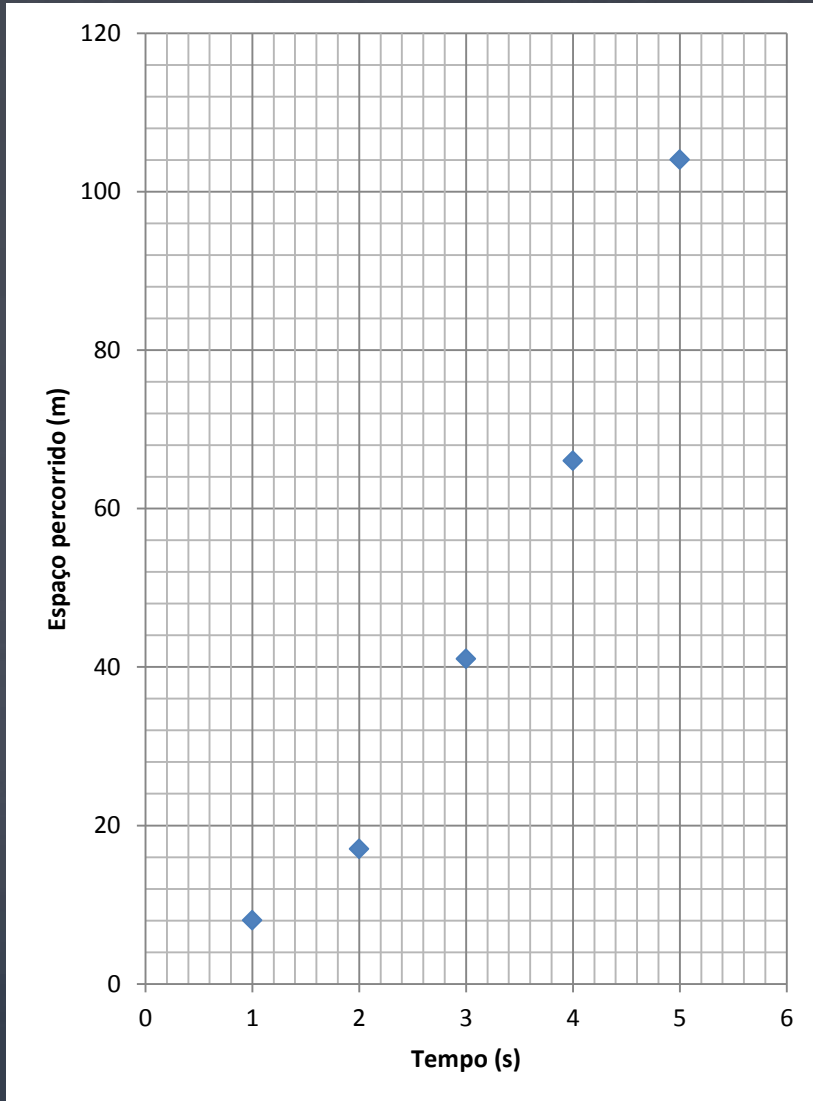
$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5

$$S = S_0 + \frac{a}{2}t^2$$

- Inicialmente plotamos os pontos em um papel milimetrado.
- Contudo, não obtemos um comportamento linear.
- Podemos linearizar a função para obter uma relação funcional que forneça uma reta.

Funções do tipo $y = Ax^2$

$$S = S_0 + \frac{a}{2}t^2$$

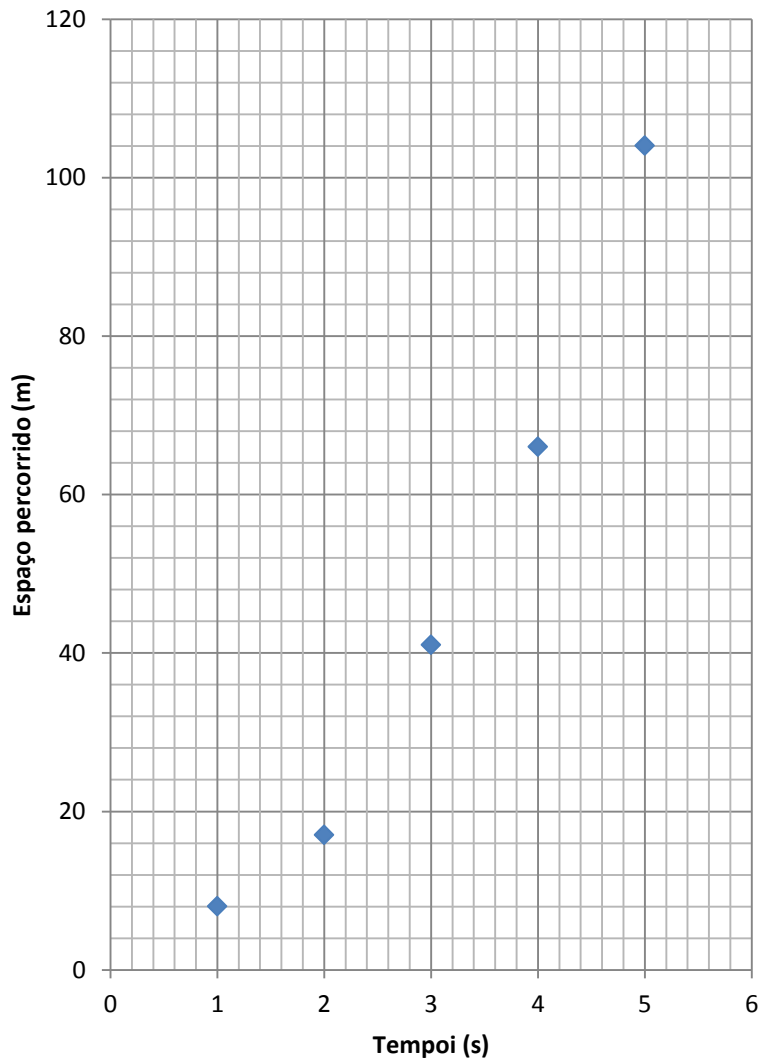


Funções do tipo $y = Ax^2$

$$S = S_0 + \frac{a}{2}t^2$$

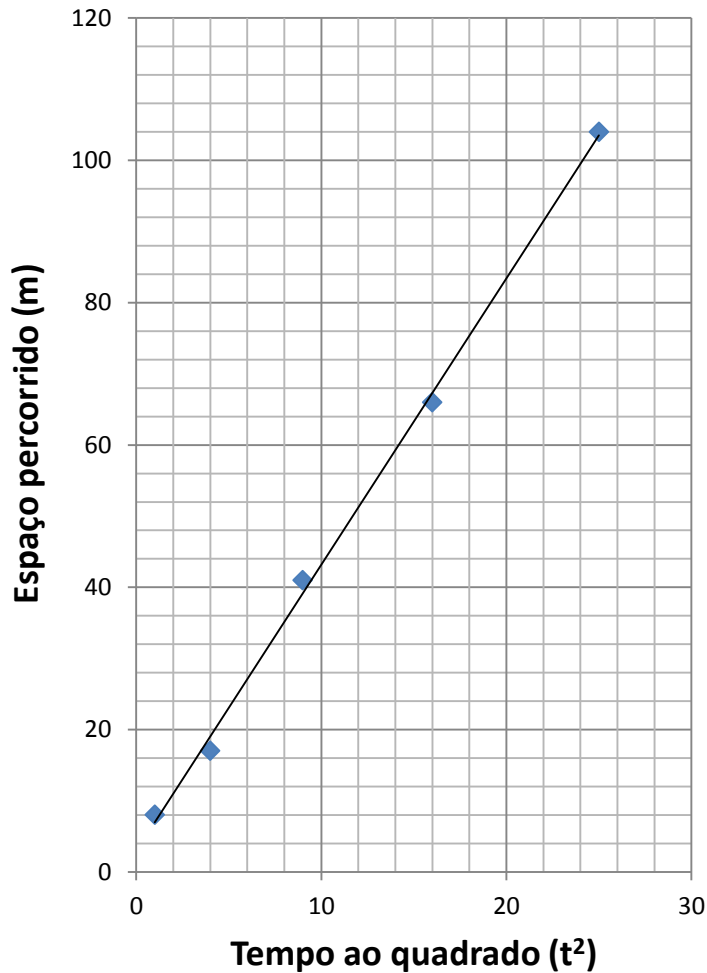
Linearização

- Gráfico S versus t^2



$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5
t^2	1	4	9	16	25

Funções do tipo $y = Ax^2$

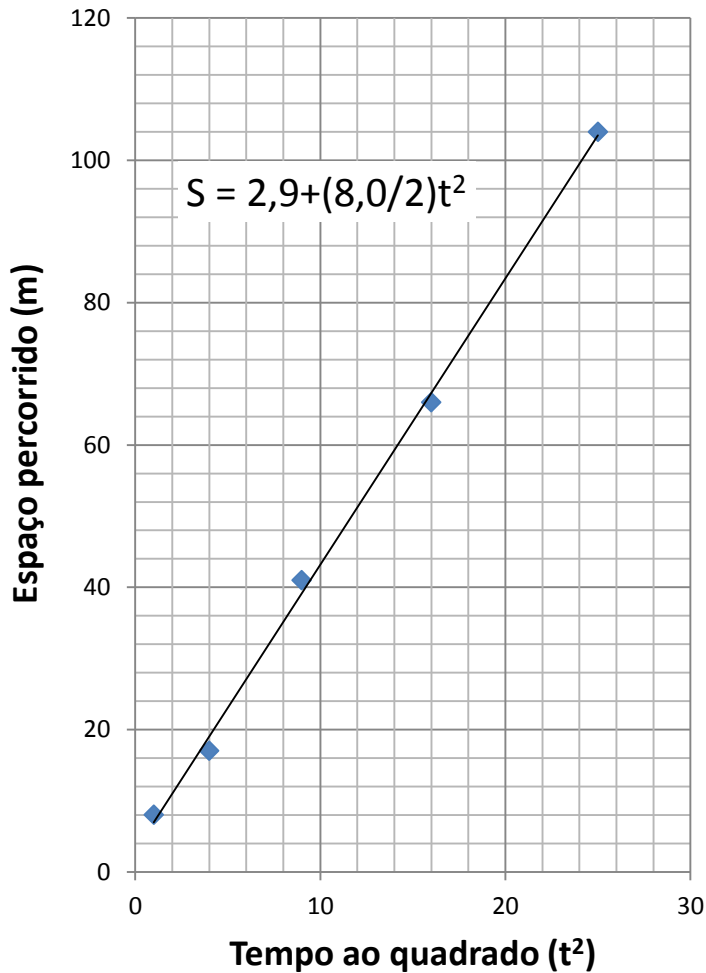


$S(m)$	8	17	41	66	104
--------	---	----	----	----	-----

$t(s)$	1	2	3	4	5
--------	---	---	---	---	---

t^2	1	4	9	16	25
-------	---	---	---	----	----

Funções do tipo $y = Ax^2$



$S(m)$	8	17	41	66	104
--------	---	----	----	----	-----

$t(s)$	1	2	3	4	5
--------	---	---	---	---	---

t^2	1	4	9	16	25
-------	---	---	---	----	----

$$a = \frac{\Delta S}{\Delta t^2} = 4,0$$

$$b = 2,9 \text{ (do gráfico)}$$

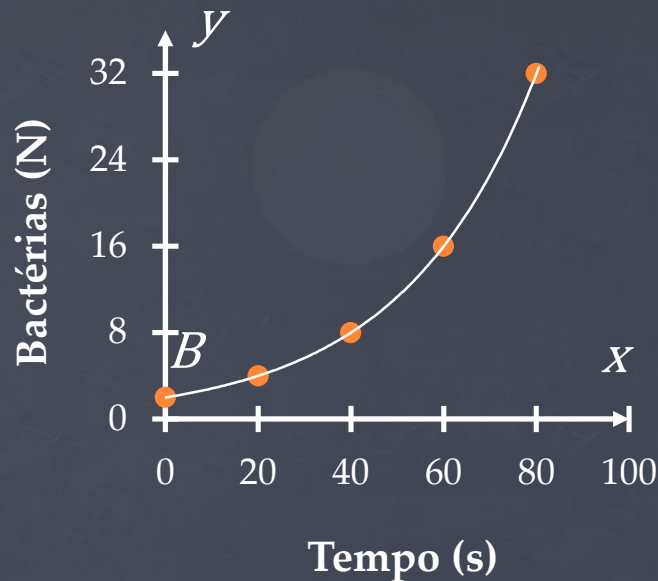
$$S = 2,9 + \frac{8,0}{2} t^2$$

Funções do tipo
 $y = Ax^n$ e $y = Ae^{hn}$

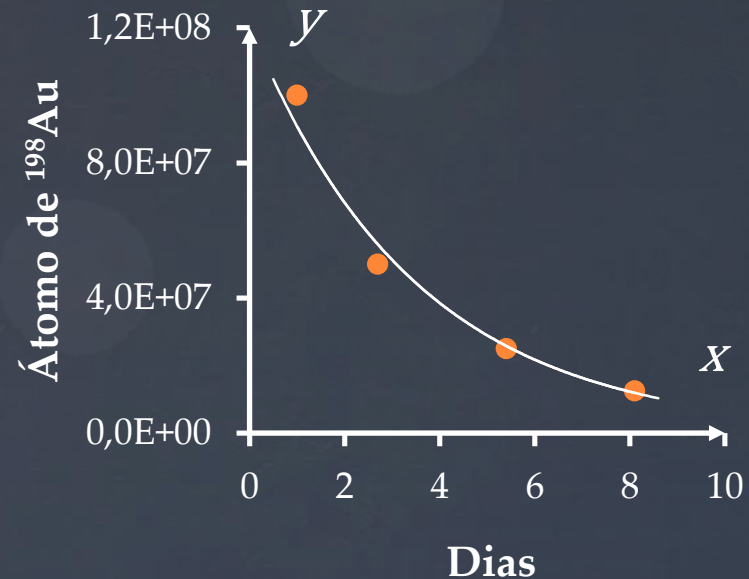
Gráficos em Escala
logarítmica
Mono-log e Di-log

Decaimento e crescimento exponencial ($y = Ae^{hn}$)

Ao construirmos um gráfico na escala linear poderemos obter um dos comportamentos:

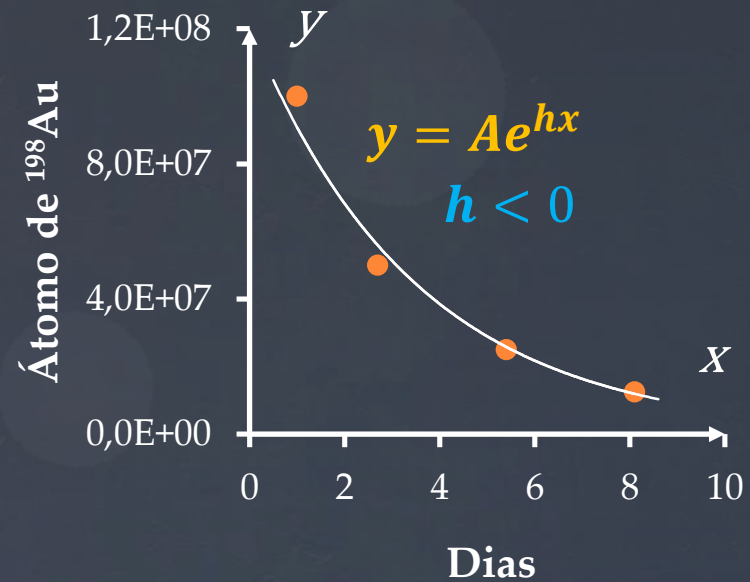
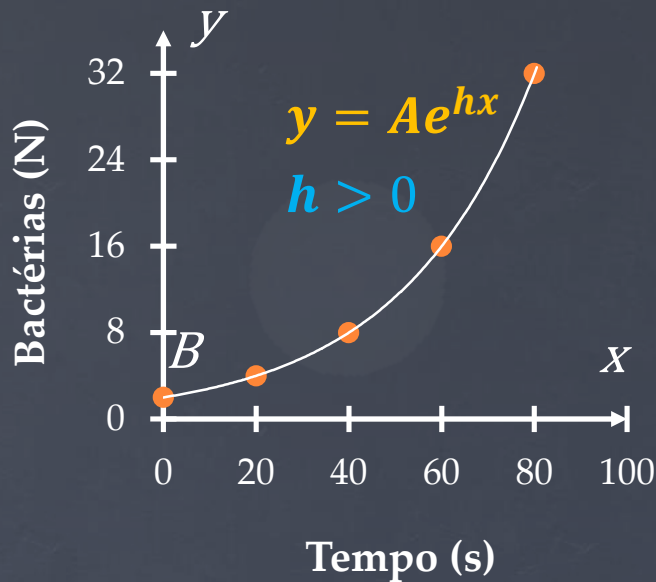


Crescimento



Decrescimento

Decaimento e crescimento exponencial



y : variável dependente; x : variável independente; h : constante

A : contante (interseção de y em $x = 0$); e : 2,71 ... (base do \ln)

Exemplo

Um organismo unicelular se reproduz por divisão binária a uma taxa constante. Se inicialmente há duas bactérias e cada uma se divide em duas a cada 20 minutos teremos a seguinte taxa de crescimento:

Número de bactérias (N)	2	4	8	16	32
Tempo t (minutos)	0	20	40	60	80

a) Determinar, a partir do gráfico de N versus t , uma relação funcional entre as grandezas;

b) Calcular o número de bactérias em $t = 2\text{h}$ (não medida).



a) Gráfico na escala linear do crescimento de bactérias no tempo.

Ao utilizar as cinco primeiras etapas descritas no exemplo da coluna de destilação obtemos o gráfico:

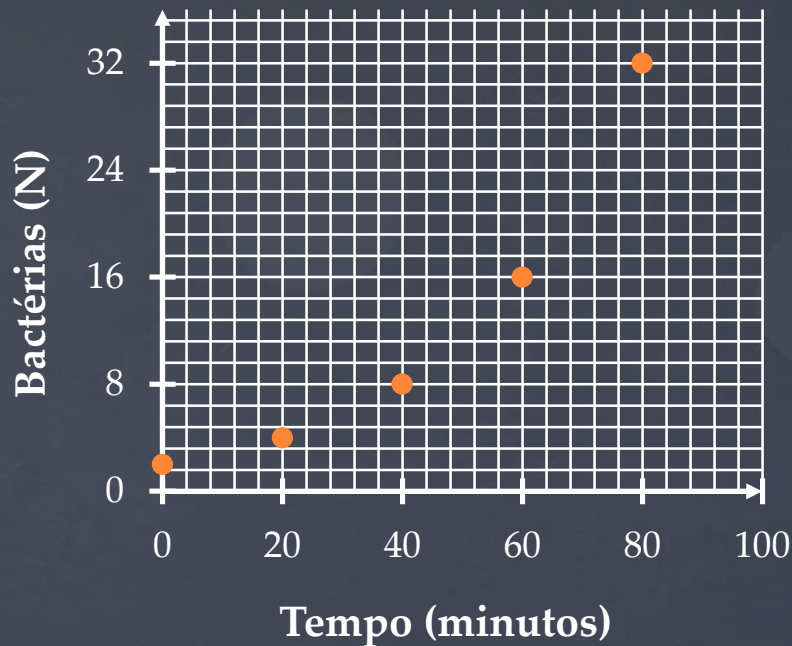


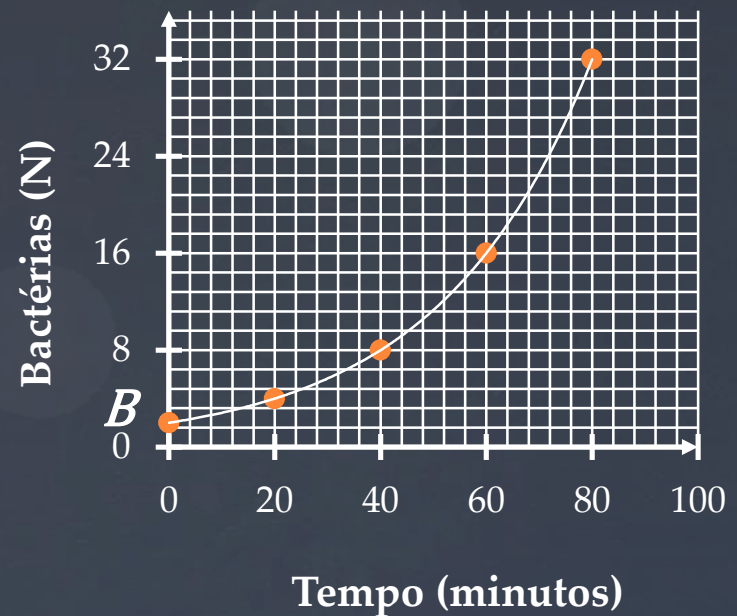
Gráfico linear

Poderá ser feito em papel milimetrado ou em softwares para traçar gráficos.

Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{ht} \quad \text{sendo } e = 2,71 \dots$$



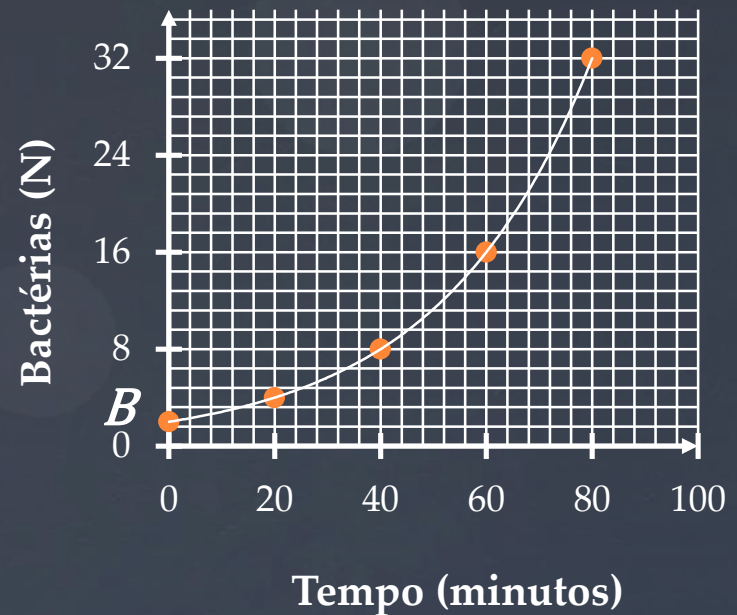
Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{ht} \quad \text{sendo } e = 2,71 \dots$$

Determinação de A:

$$\text{Se } t = 0 \Rightarrow N = A = 2$$



Relação funcional

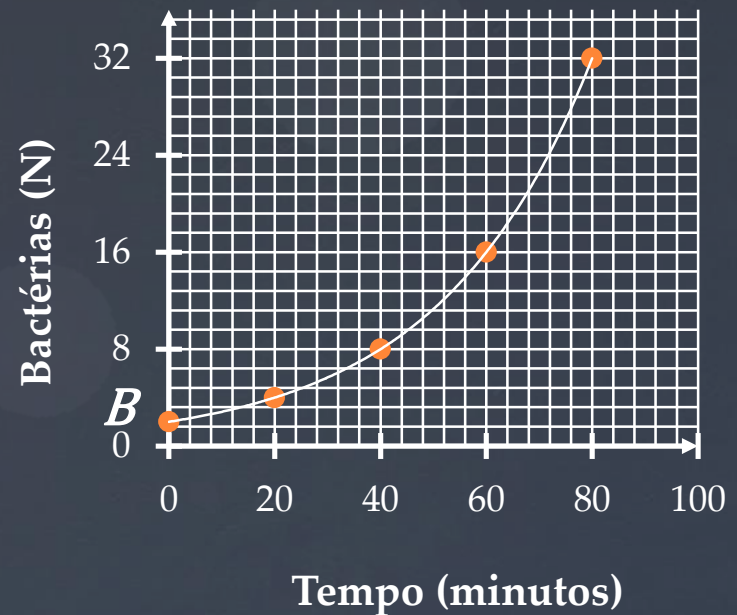
O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{ht} \quad \text{sendo } e = 2,71 \dots$$

Determinação de A:

$$\text{Se } t = 0 \Rightarrow N = A = 2$$

Para encontrar o parâmetro h devemos linearizar a função:



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

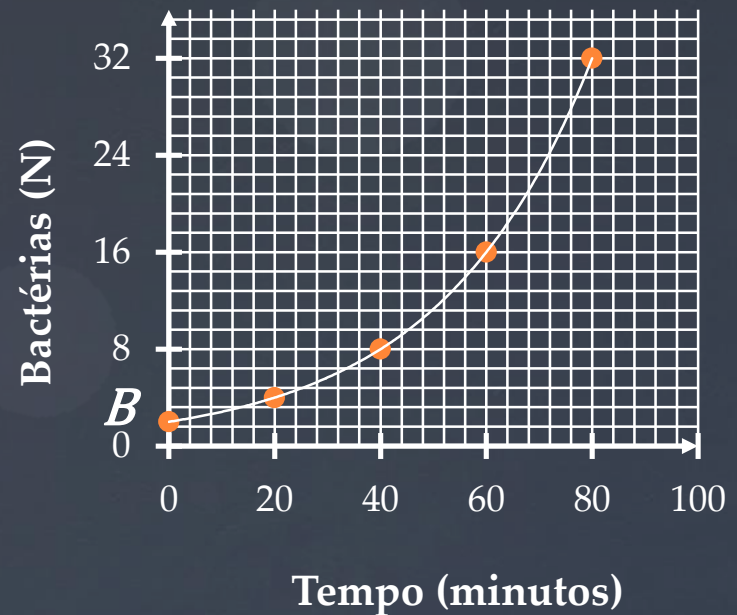
$$N = Ae^{ht} \quad \text{sendo } e = 2,71 \dots$$

Determinação de A:

$$\text{Se } t = 0 \Rightarrow N = A = 2$$

Para encontrar o parâmetro h devemos linearizar a função:

$$\log N = \log Ae^{ht}$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{ht} \quad \text{sendo } e = 2,71 \dots$$

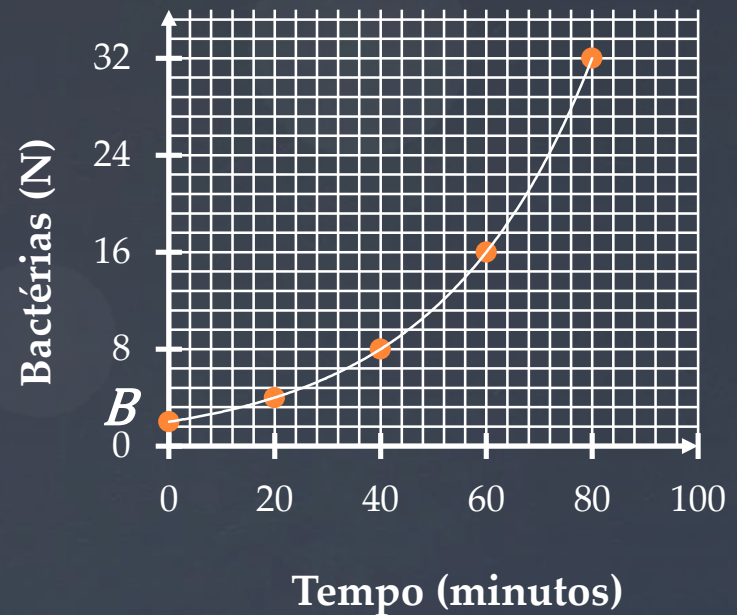
Determinação de A:

$$\text{Se } t = 0 \Rightarrow N = A = 2$$

Para encontrar o parâmetro h devemos linearizar a função:

$$\log N = \log Ae^{ht}$$

$$\log N = \log A + \log e^{ht}$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{at} \quad \text{sendo } e = 2,71 \dots$$

Determinação de A:

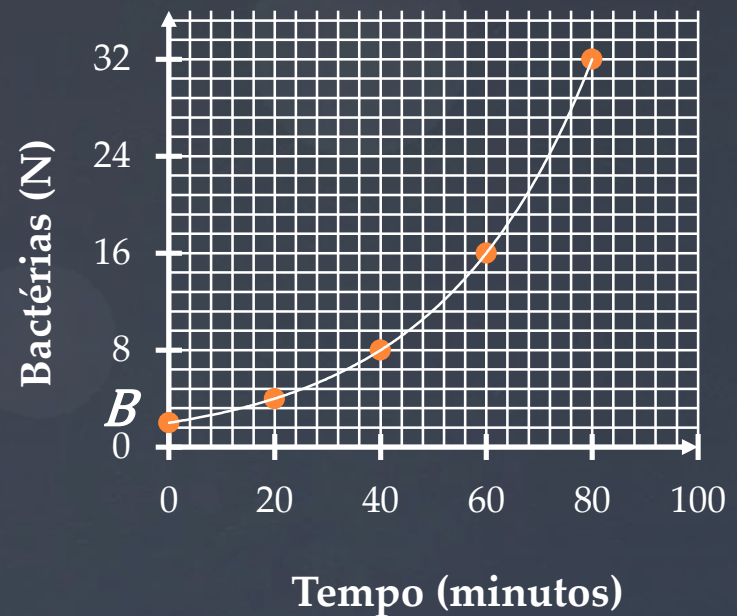
$$\text{Se } t = 0 \Rightarrow N = A = 2$$

Para encontrar o parâmetro h devemos linearizar a função:

$$\log N = \log Ae^{ht}$$

$$\log N = \log A + \log e^{ht}$$

$$\log N = \log A + h \cdot t \cdot \log e$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{at} \quad \text{sendo } e = 2,71 \dots$$

Determinação de A:

$$\text{Se } t = 0 \Rightarrow N = A = 2$$

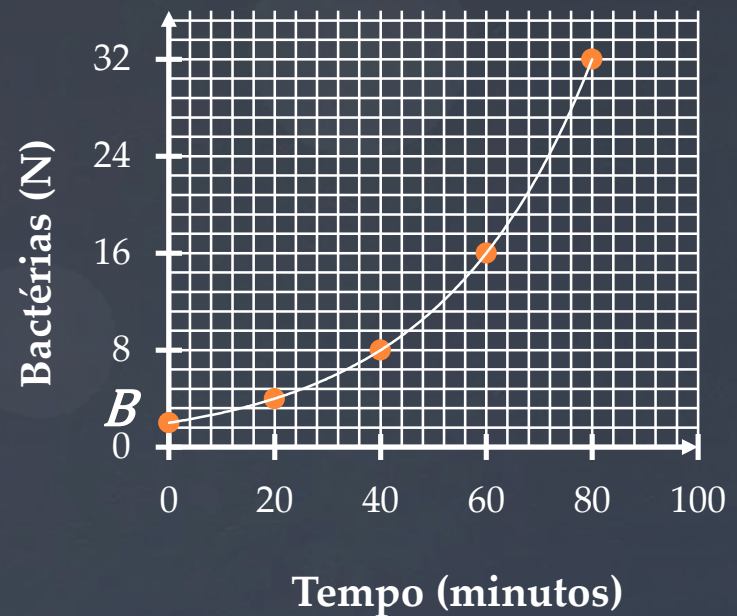
Para encontrar o parâmetro h devemos linearizar a função:

$$\log N = \log Ae^{ht}$$

$$\log N = \log A + \log e^{ht}$$

$$\log N = \log A + h \cdot t \cdot \log e$$

$$\log N = \log A + (h \cdot \log e)t$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{at} \quad \text{sendo } e = 2,71 \dots$$

Determinação de A:

$$\text{Se } t = 0 \Rightarrow N = A = 2$$

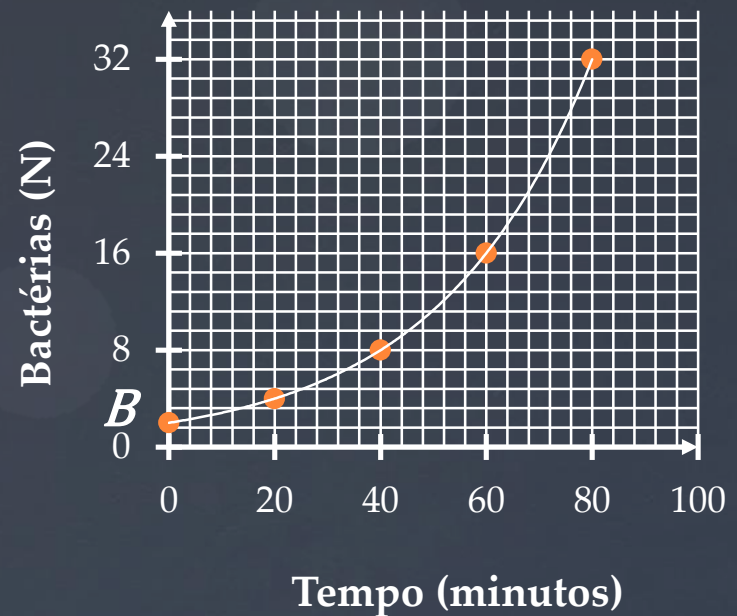
Para encontrar o parâmetro h devemos linearizar a função:

$$\log N = \log Ae^{ht}$$

$$\log N = \log A + \log e^{ht}$$

$$\log N = \log A + h \cdot t \cdot \log e$$

$$\log N = \log A + (h \cdot \log e)t$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{at} \quad \text{sendo } e = 2,71 \dots$$

Determinação de A:

$$\text{Se } t = 0 \Rightarrow N = A = 2$$

Para encontrar o parâmetro h devemos linearizar a função:

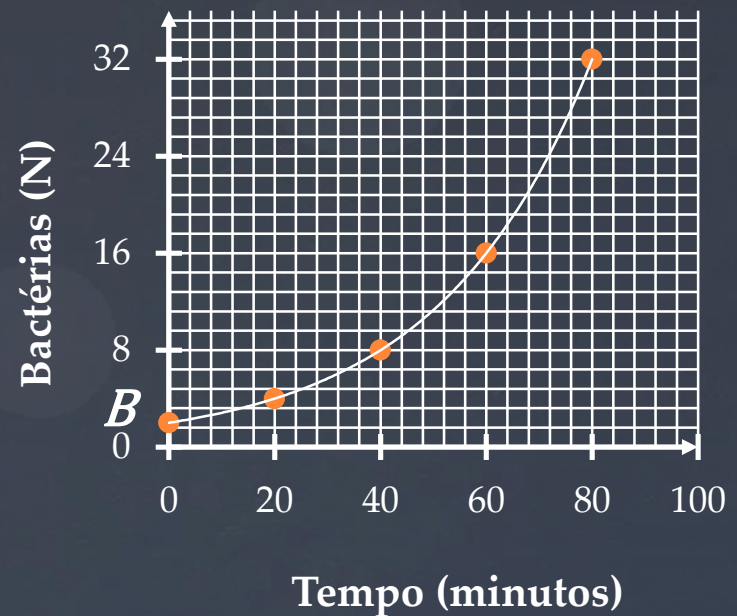
$$\log N = \log Ae^{ht}$$

$$\log N = \log A + \log e^{ht}$$

$$\log N = \log A + h \cdot t \cdot \log e$$

$$\log N = \log A + (h \cdot \log e)t$$

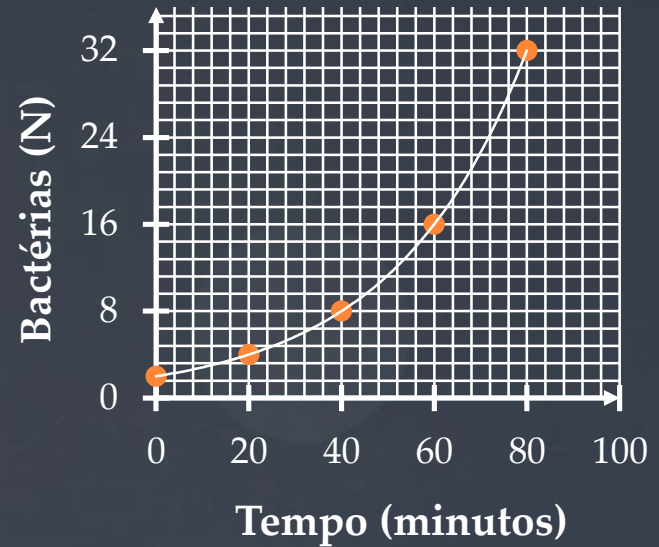
$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ (y = b + mx) \end{array}$$



Em consequência:

$$m = h \cdot \log e$$

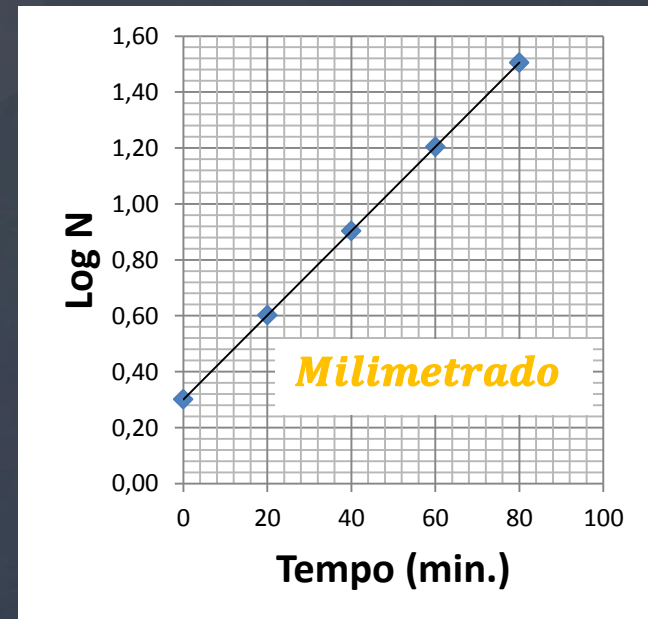
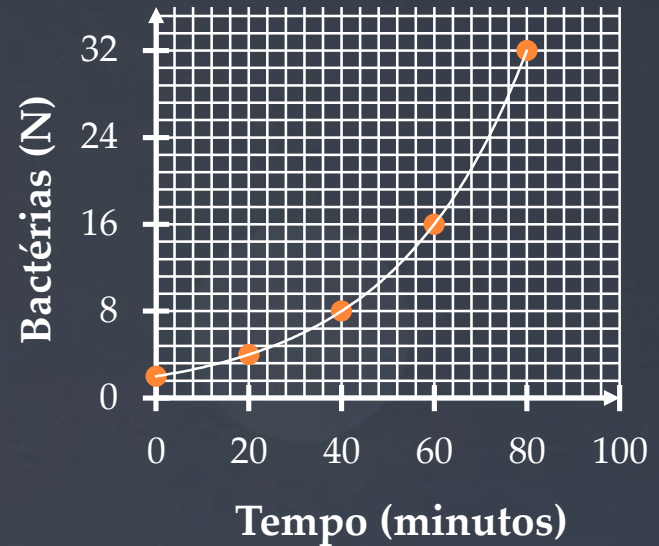
A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o *log* somente na variável dependente (N).



Em consequência:

$$m = h \cdot \log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o *log* somente na variável dependente (N).



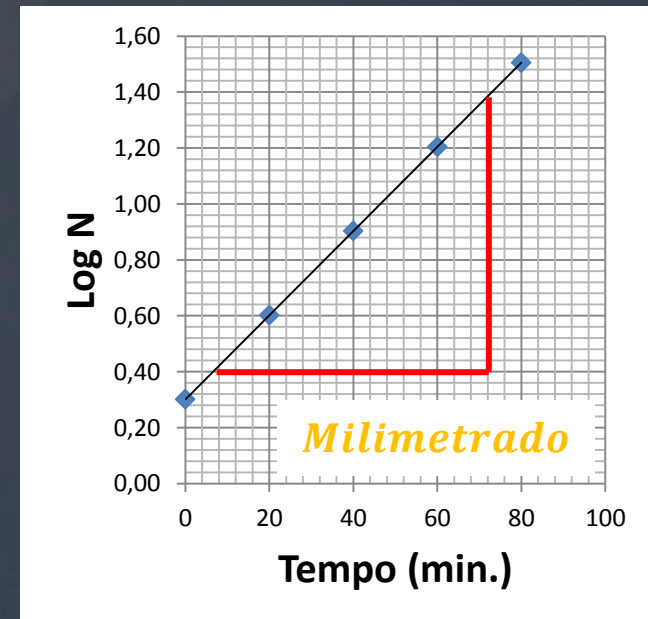
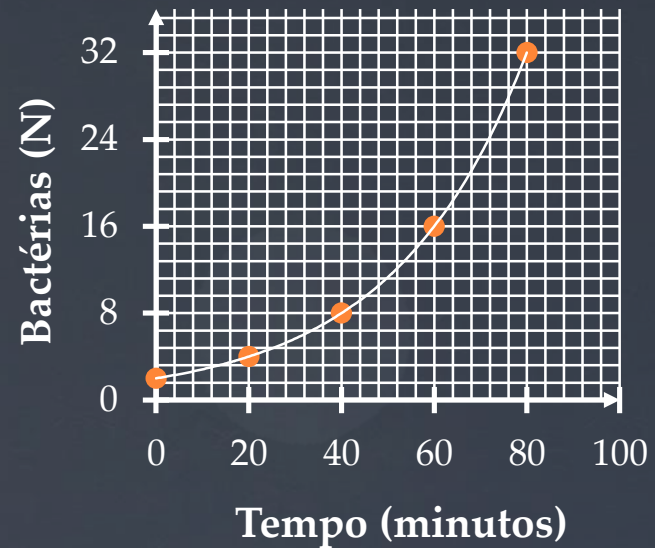
Em consequência:

$$m = h \cdot \log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o *log* somente na variável dependente (*N*).

A inclinação *m* será então:

$$m = \frac{1,36 - 0,40}{72 - 8} = 0,015$$



Em consequência:

$$m = h \cdot \log e$$

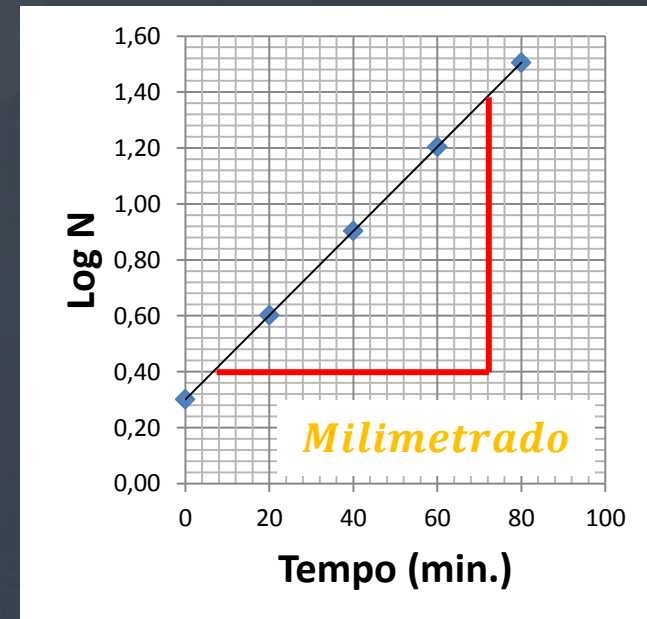
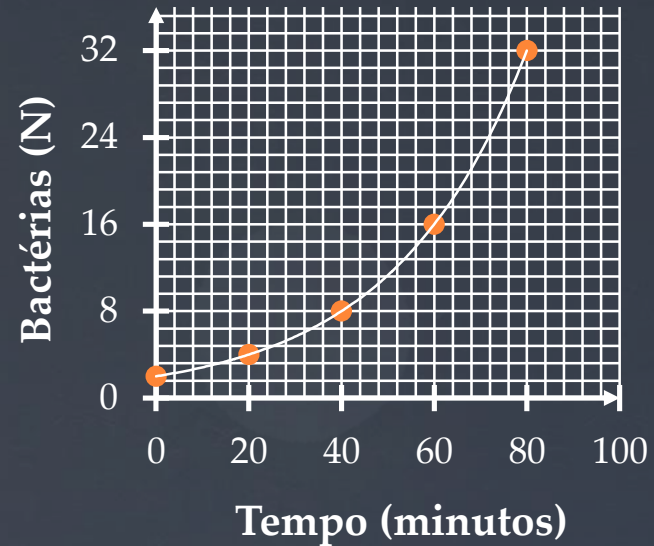
A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o *log* somente na variável dependente (*N*).

A inclinação *m* será então:

$$m = \frac{1,36 - 0,40}{72 - 8} = 0,015$$

Então calcula-se o coeficiente *h*:

$$h = \frac{m}{\log e} = \frac{0,015}{\log 2,71} = 0,035$$



Em consequência:

$$m = h \cdot \log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o *log* somente na variável dependente (N).

A inclinação m será então:

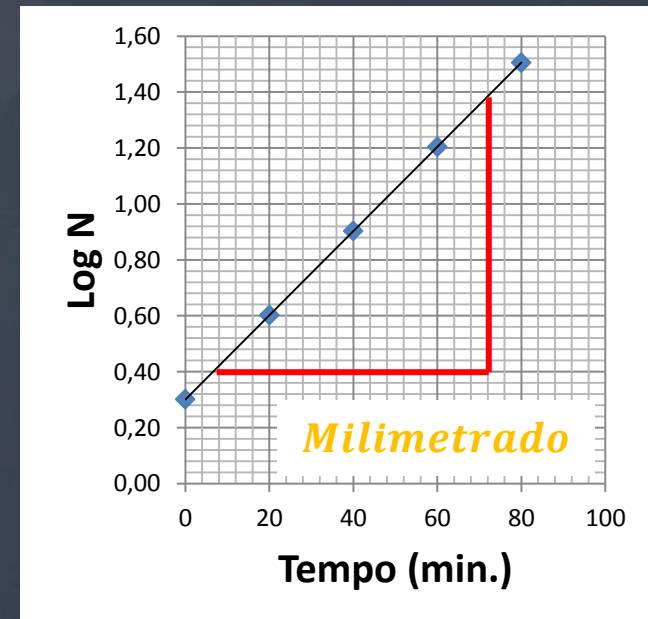
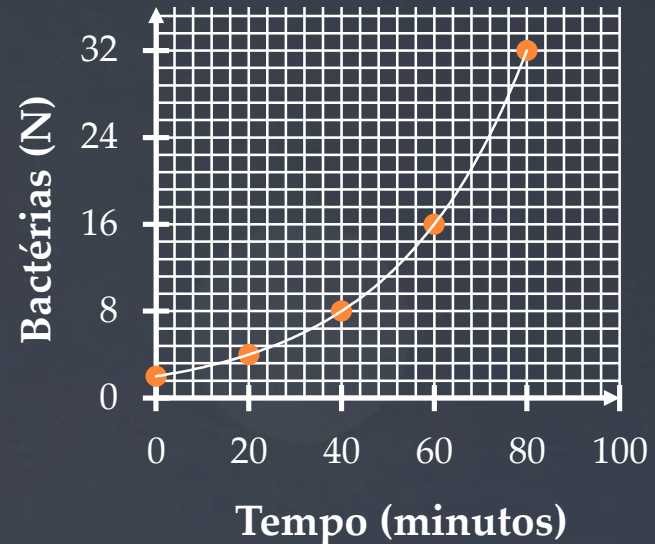
$$m = \frac{1,36 - 0,40}{72 - 8} = 0,015$$

Então calcula-se o coeficiente h :

$$h = \frac{m}{\log e} = \frac{0,015}{\log 2,71} = 0,035$$

A relação funcional será:

$$N = 2e^{0,035.t}$$



Em consequência:

$$m = h \cdot \log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o *log* somente na variável dependente (N).

A inclinação m será então:

$$m = \frac{1,36 - 0,40}{72 - 8} = 0,015$$

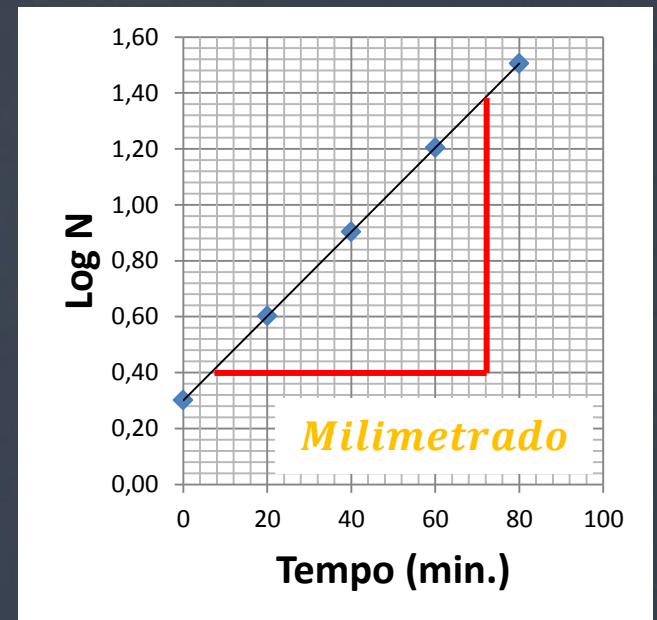
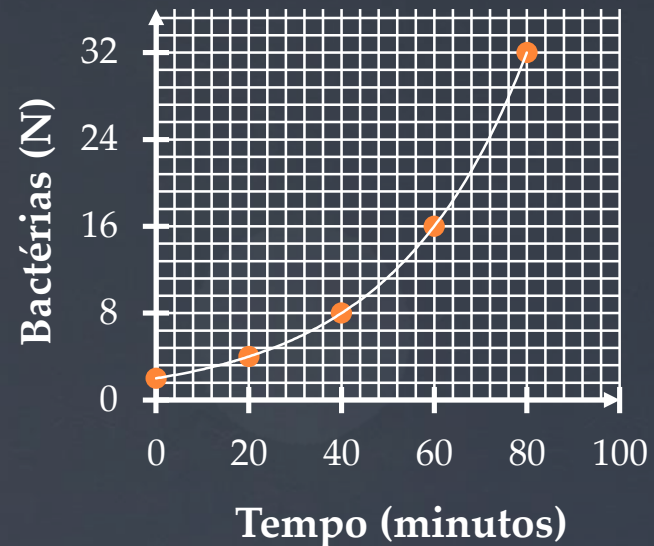
Então calcula-se o coeficiente h :

$$h = \frac{m}{\log e} = \frac{0,015}{\log 2,71} = 0,035$$

A relação funcional será:

$$N = 2e^{0,035.t}$$

b) Em $t = 120$ min $N = 128$ Bactérias

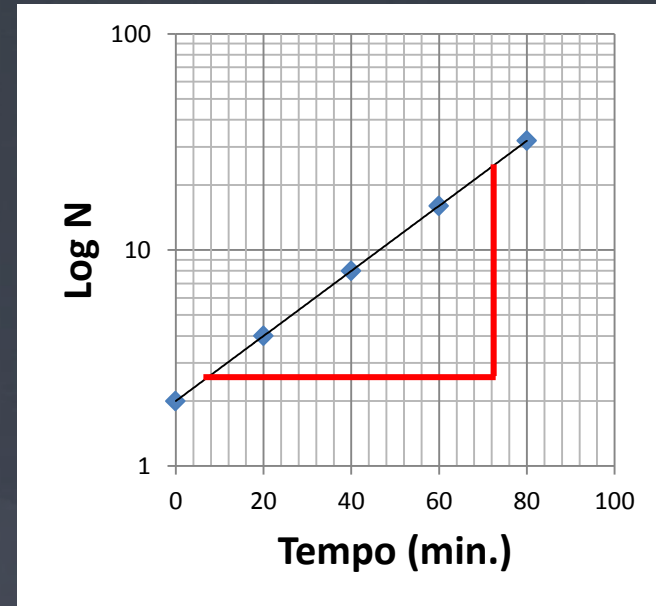


Segunda opção papel Mono-log

$$m = h \cdot \log e$$

A inclinação m será então:

$$m = \frac{\log 25 - \log 2,5}{72 - 8} = 0,015$$



Segunda opção papel Mono-log

$$m = h \cdot \log e$$

A inclinação m será então:

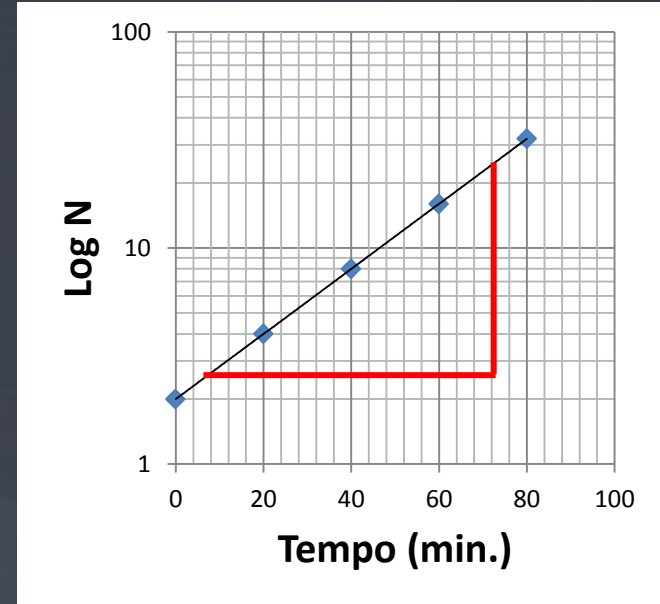
$$m = \frac{\log 25 - \log 2,5}{72 - 8} = 0,015$$

Então calcula-se o coeficiente h :

$$h = \frac{m}{\log e} = \frac{0,015}{\log 2,71} = 0,035$$

A relação funcional será:

$$N = 2e^{0,035 \cdot t}$$



Funções do tipo $y = Ax^n$

Relação funcional

$$Y = Ax^n$$

Linearização da função:

$$\log Y = \log Ax^n$$

$$\log N = \log A + \log x^n$$

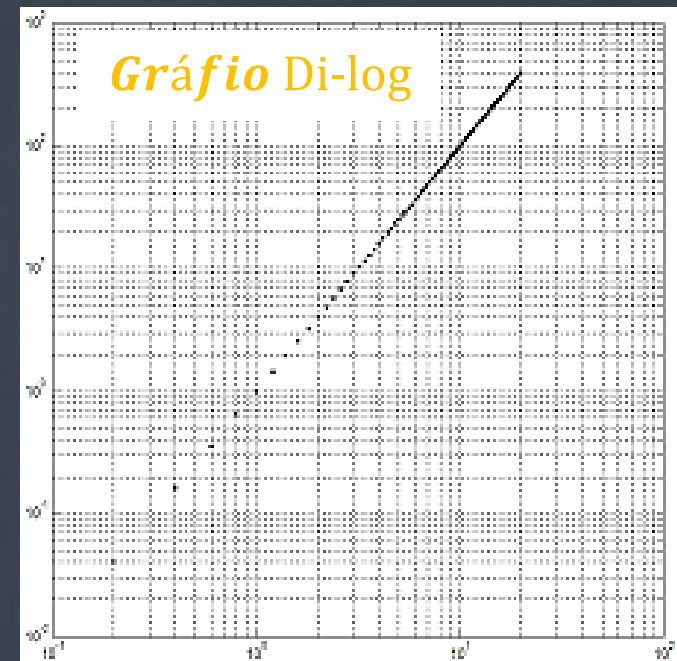
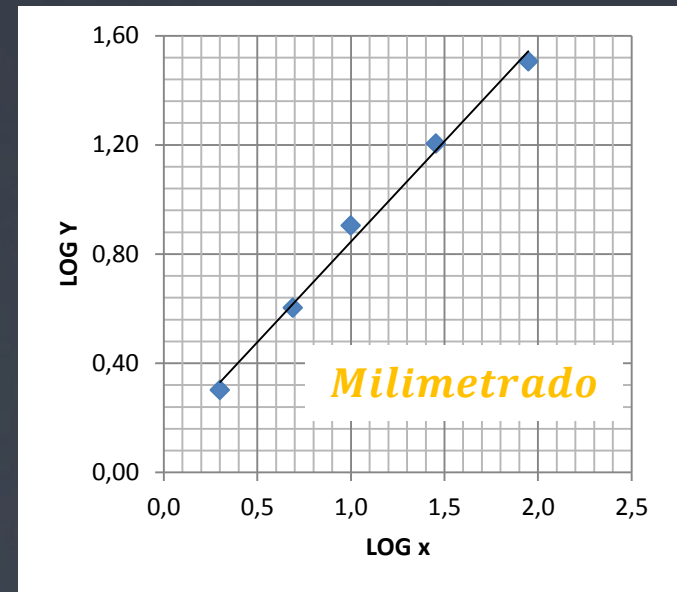
$$\log N = \log A + n \log x$$

$$\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ y \\ \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ b \\ \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow \\ nx \\ \end{array} \right)$$

Coefficiente angular $a(n)$ e b serão:

$$a = \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{\log Y_1 - \log Y_2}{\log x_1 - \log x_2}$$

b: substituir dois valores da reta na relação funcional.



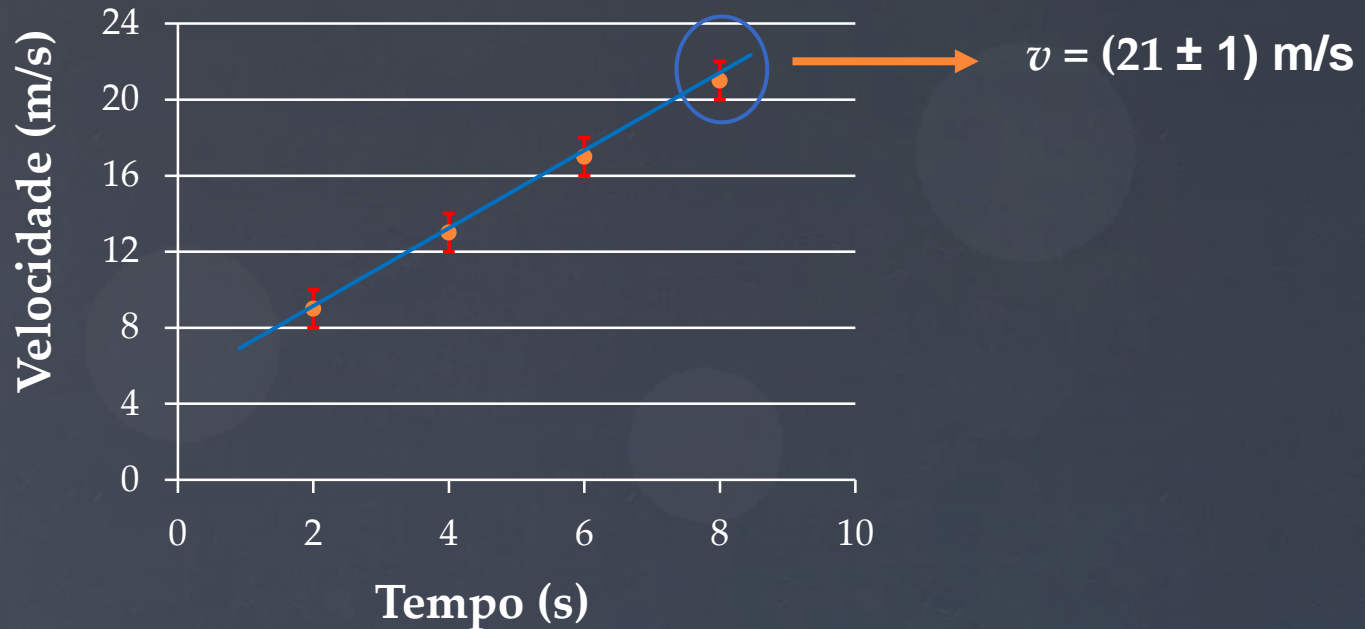
Representação de incertezas em gráficos

- Exemplo da velocidade de um corpo no tempo;
- Foram tomadas três medidas de velocidade que resultaram em um valor mais provável e uma incerteza;

v (m/s)	9 ± 1	13 ± 1	17 ± 1	21 ± 1
t (s)	2	4	6	8

- Representar o gráfico da velocidade em função do tempo com as incertezas nas ordenadas (v).

Gráfico linear da velocidade no tempo



A reta de ajuste obtida pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) considera as barras de incertezas.

Referências

1. VUOLO, J. H.; Fundamentos da Teoria de Erros. 2nd ed., São Paulo: Edgar Blücher Ltda., 1996.

