Prática 3 - Gráficos

Física Experimental I

Prof. Dr. Henrique A. M. Faria

Introdução

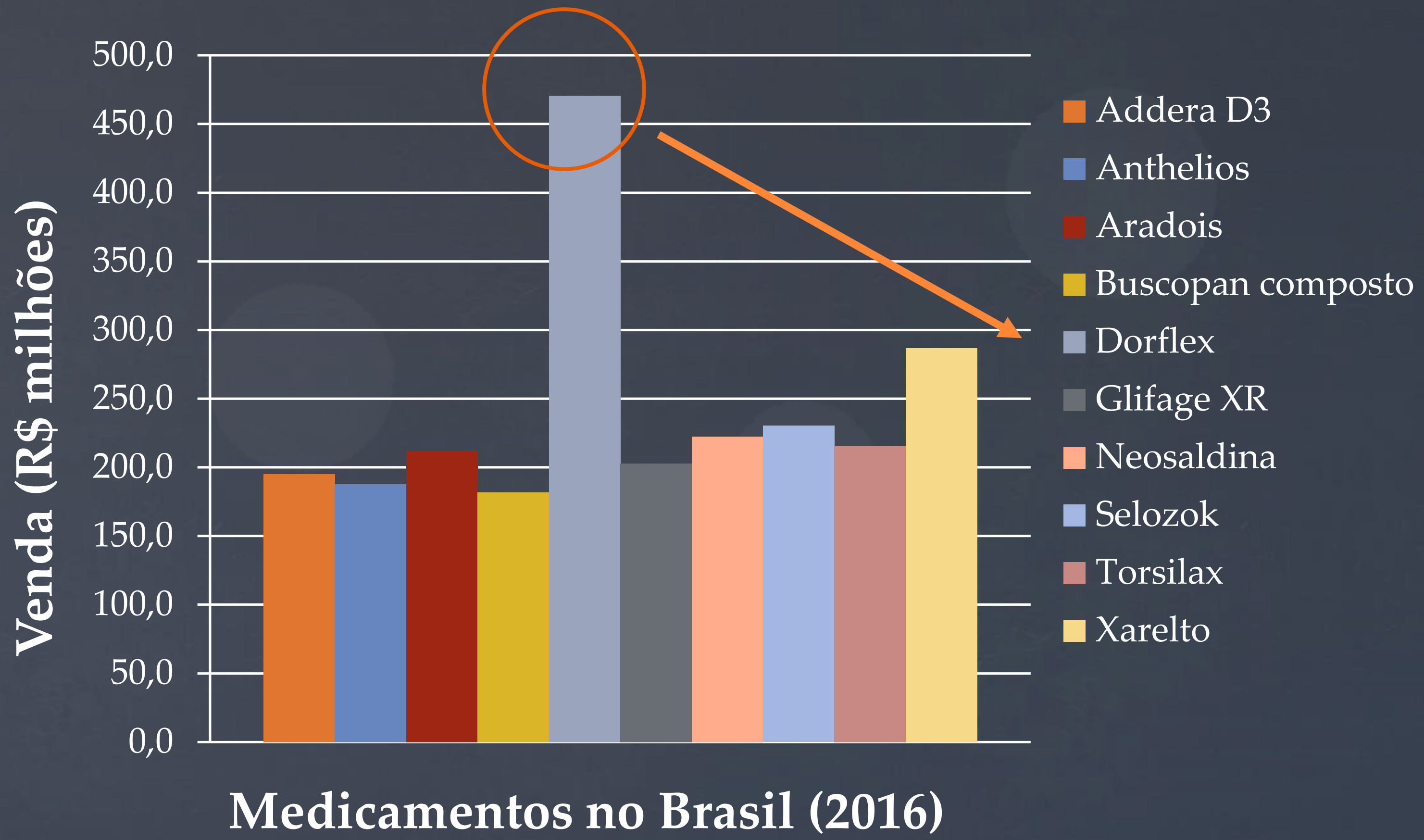
- O gráfico é a forma mais conveniente para visualizar e interpretar um conjunto de dados.
- A análise matemática de um gráfico permite extrair uma relação funcional.
- Valores não medidos podem ser calculados através da relação funcional.

Medicamentos mais vendidos no Brasil em 2016

Produto	Laboratório	Venda (R$ milhões, 2016)
Addera D3	Farmasa	195,0
Anthelios	La Roche Posay	187,7
Aradois	Biolab-Sanus Farma	212,2
Buscopan composto	Boehringer Ing.	181,7
Dorflex	Sanofi	470,7
Glifage XR	Merck	202,8
Neosaldina	Takeda Pharma	222,4
Selozok	Astrazeneca Brasil	230,3
Torsilax	Neo Química	215,3
Xarelto	Bayer Pharma	286,8

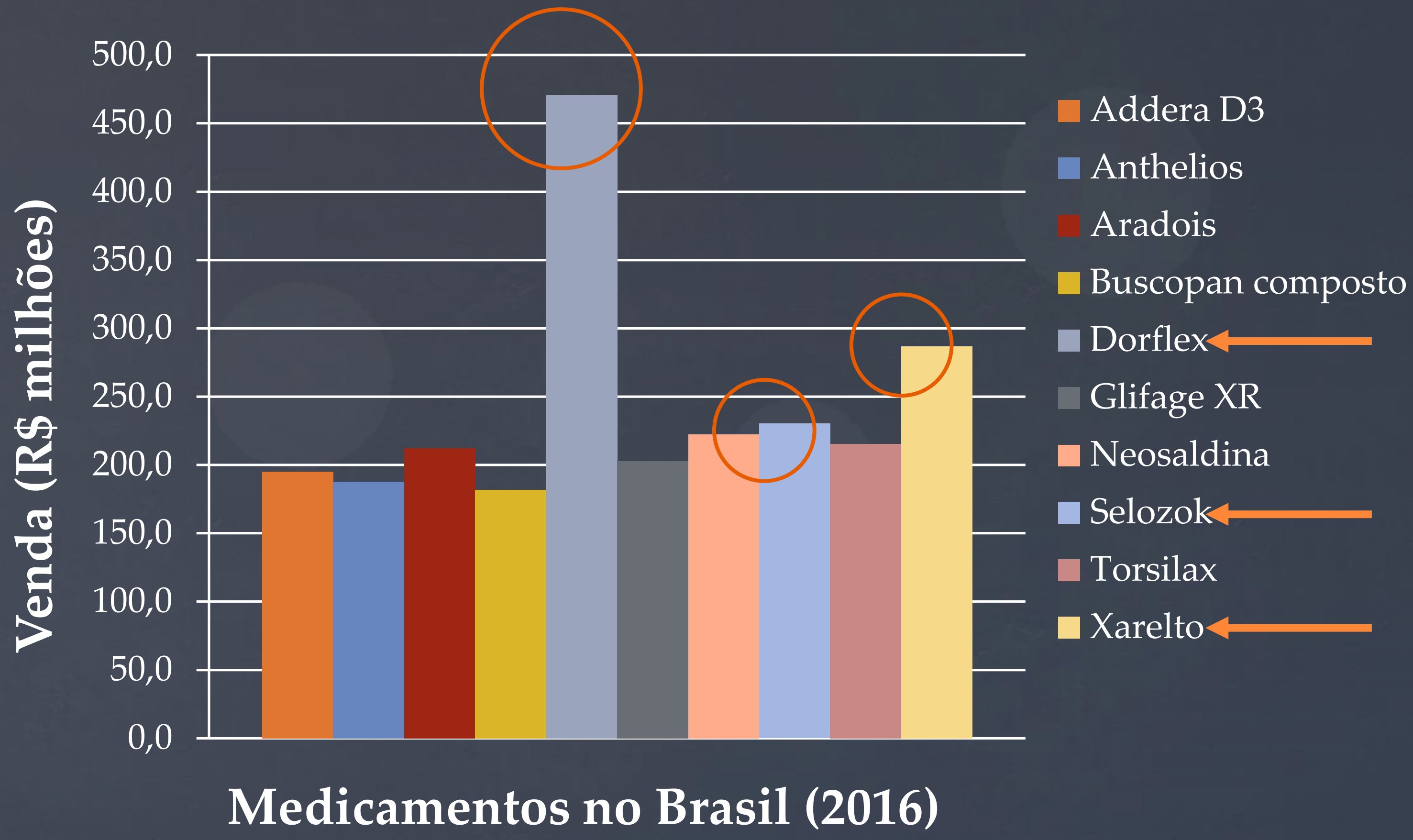
Fonte: Interfarma, acesso em 26/08/2017.

Gráfico de Barras

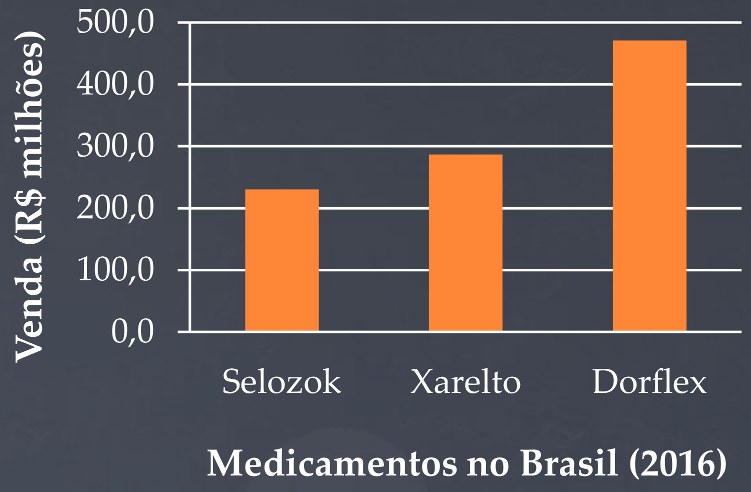


Fonte: Interfarma, acesso em 26/08/2017.

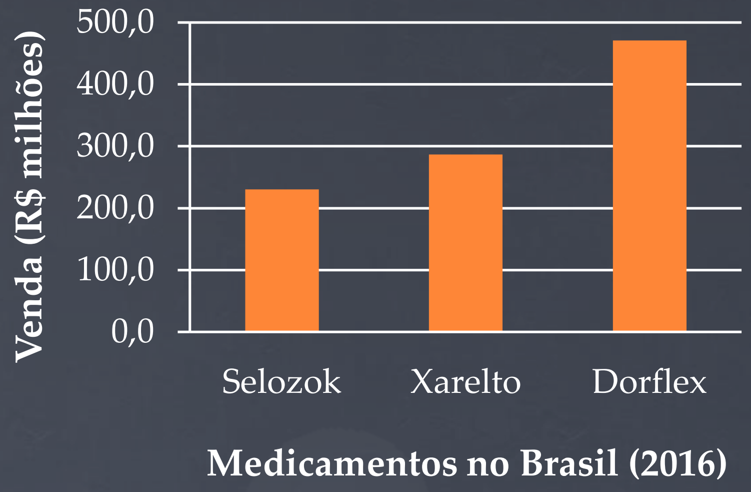
Gráfico de Barras



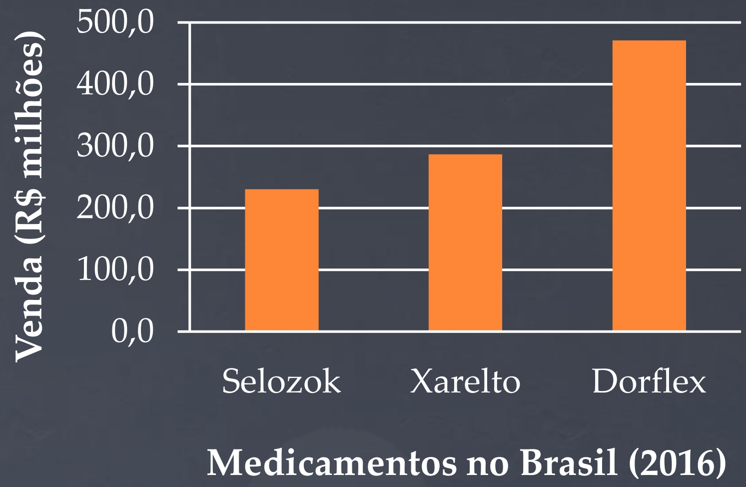
Fonte: Interfarma, acesso em 26/08/2017.

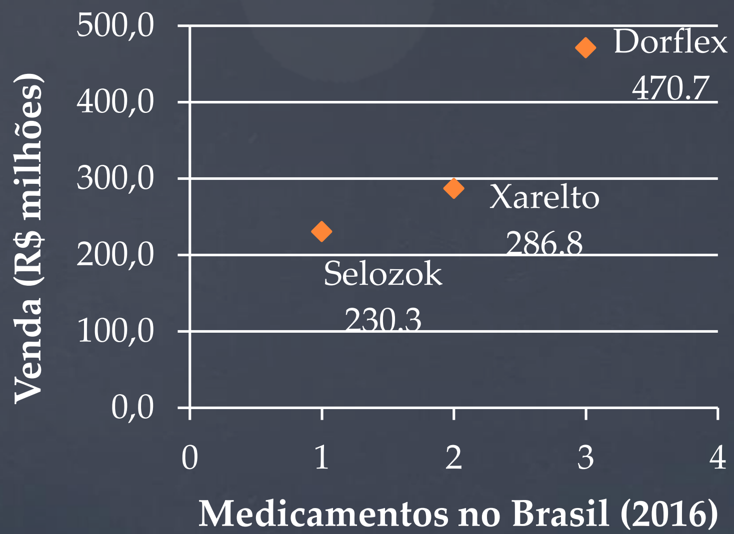


Fonte: Interfarma, acesso em 26/08/2017.



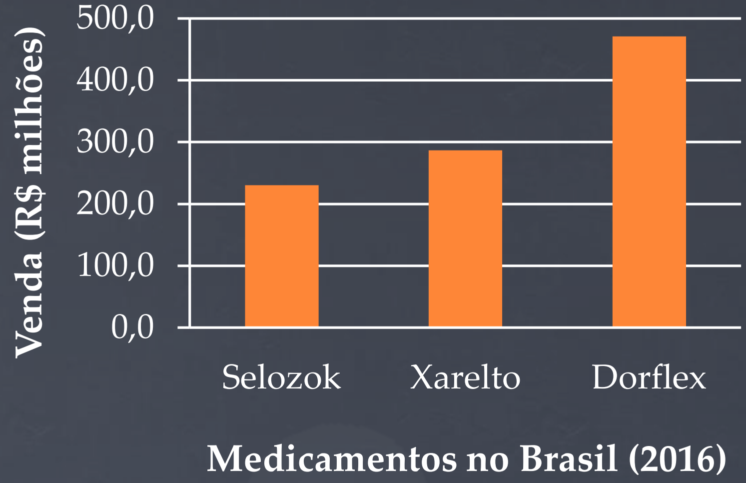
Fonte: Interfarma, acesso em 26/08/2017.



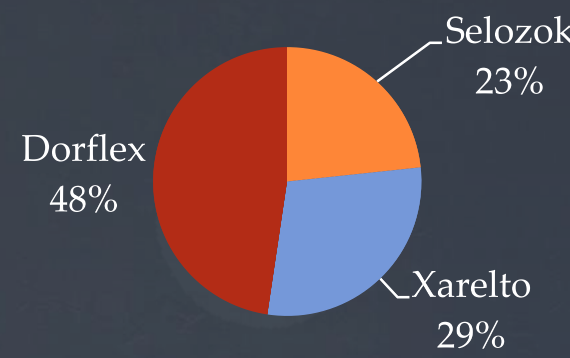


prof. Henrique Faria

Fonte: Interfarma, acesso em 26/08/2017.



Os três medicamentos mais vendidos no Brasil em 2016



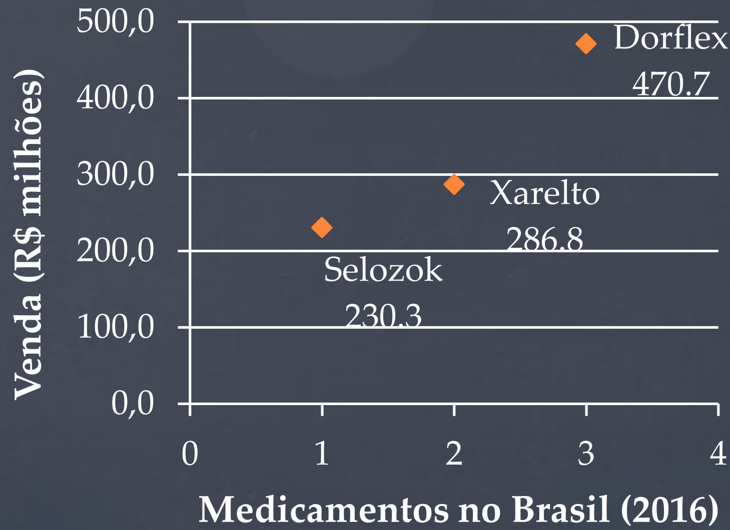
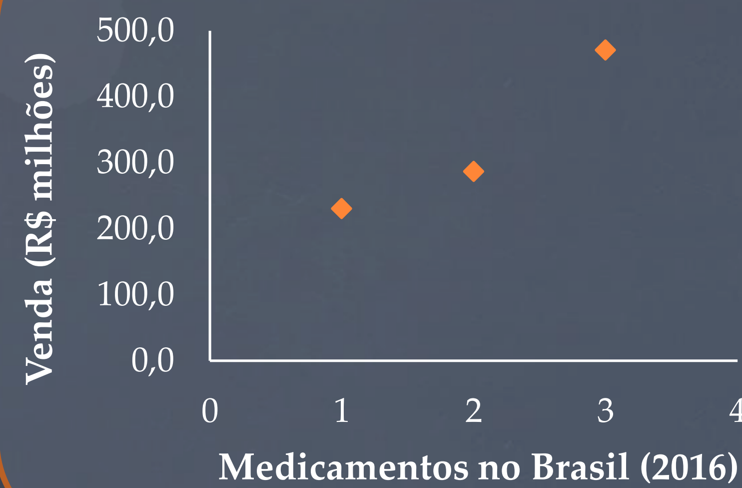
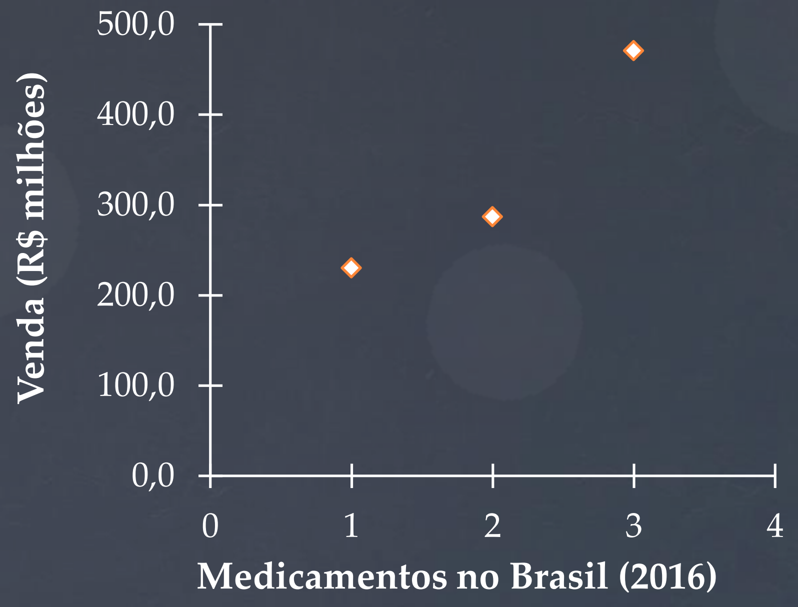


Gráfico de dispersão



Fonte: Interfarma, acesso em 26/08/2017.

Elementos do gráfico

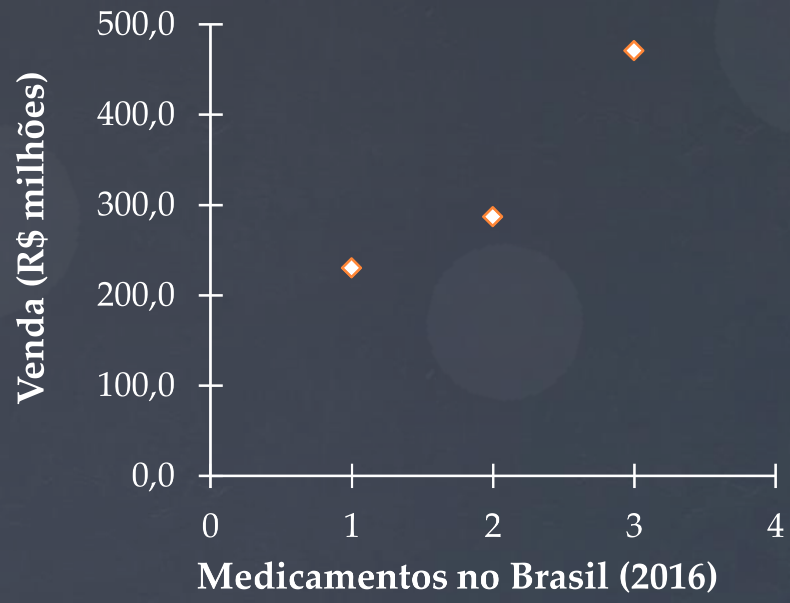


prof. Henrique Faria

Fonte: Interfarma

Elementos do gráfico

Variável dependente



Variável independente

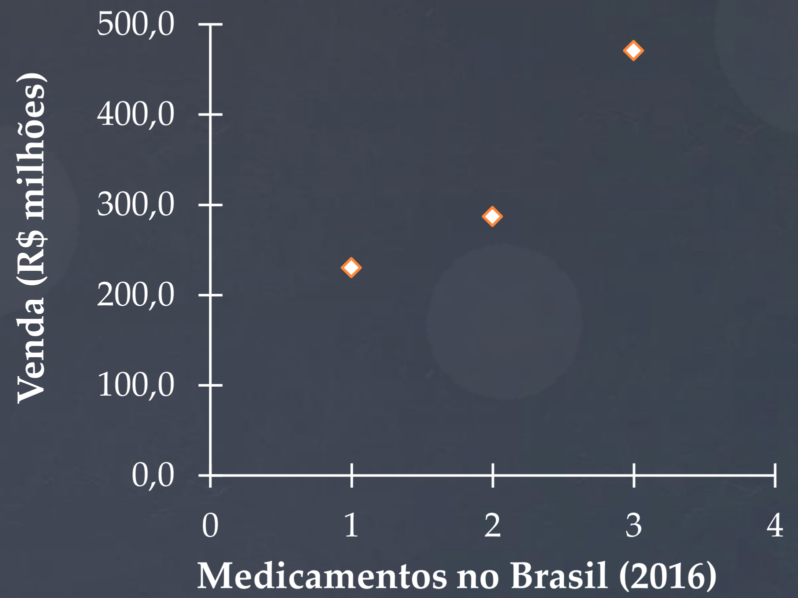
prof. Henrique Faria

Fonte: Interfarma

Elementos do gráfico

Unidades

Variável dependente



Variável independente

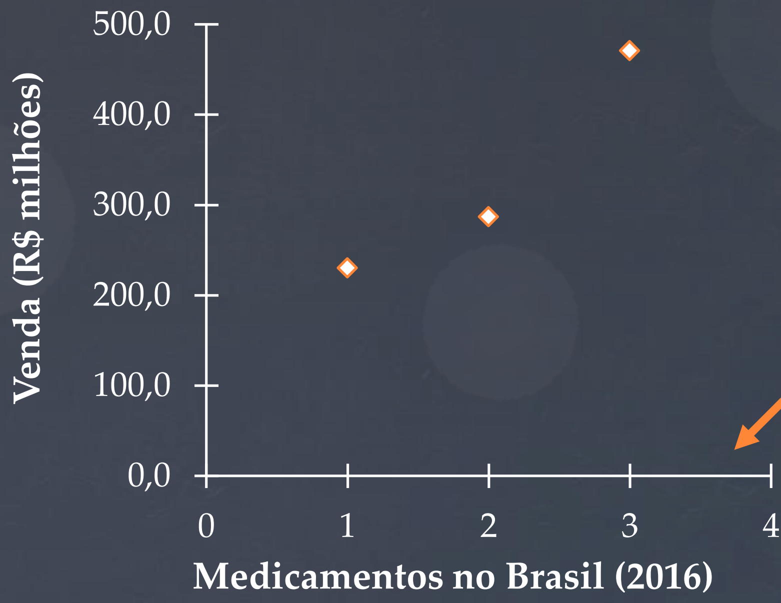
prof. Henrique Faria

Fonte: Interfarma

Elementos do gráfico

Unidades

Variável dependente

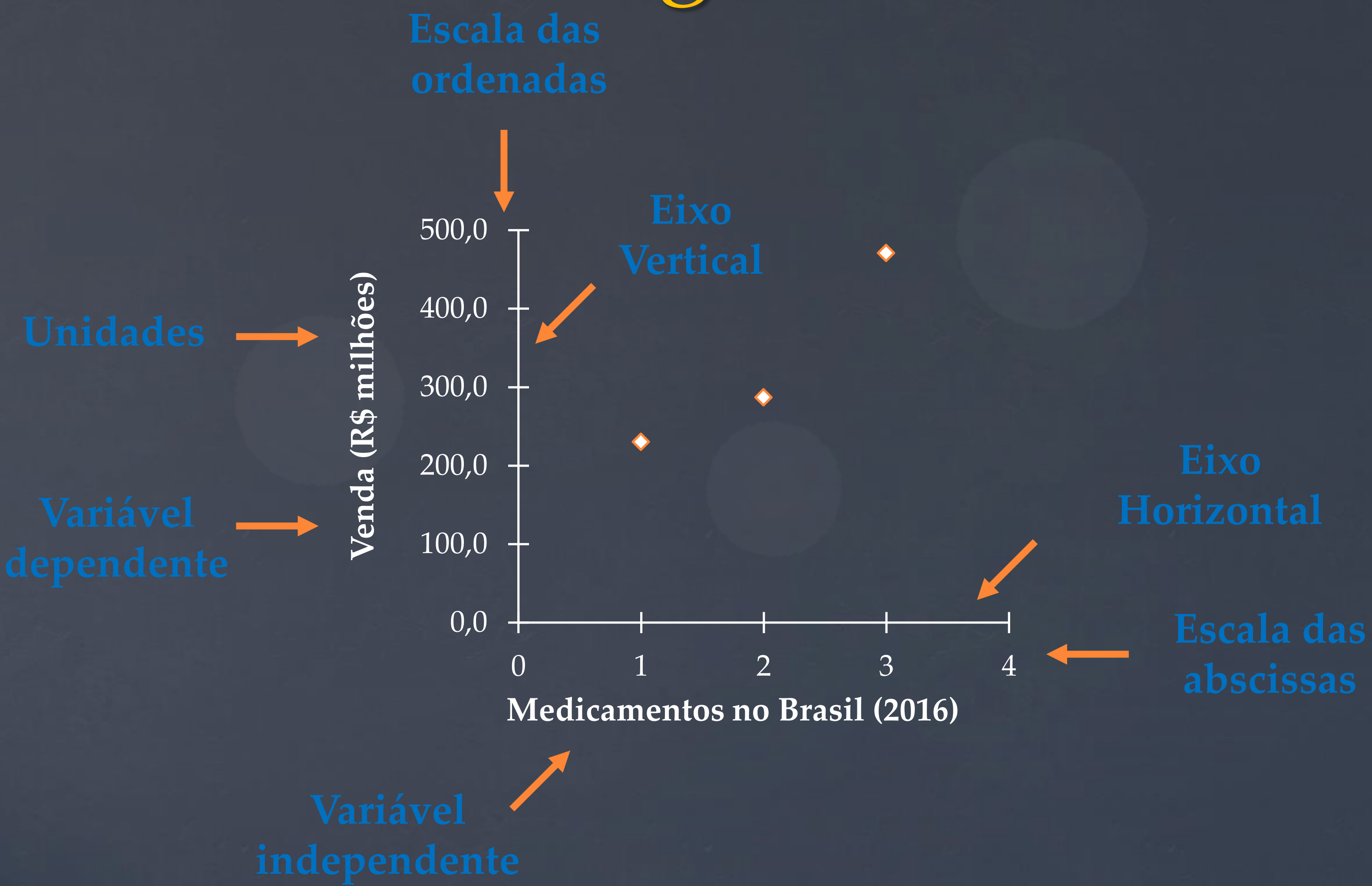


Eixo Horizontal

Variável independente

Fonte: Interfarma

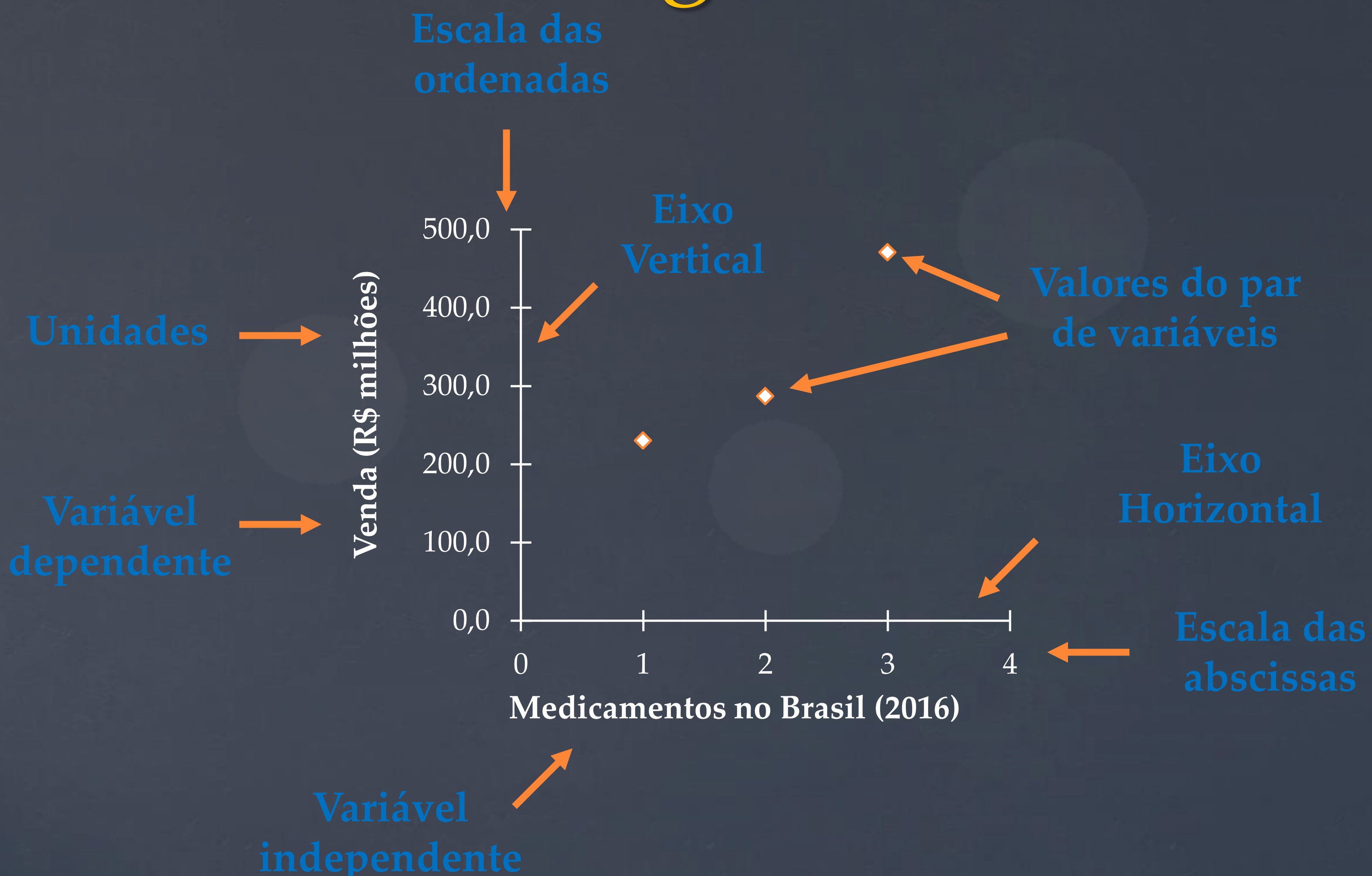
Elementos do gráfico



prof. Henrique Faria

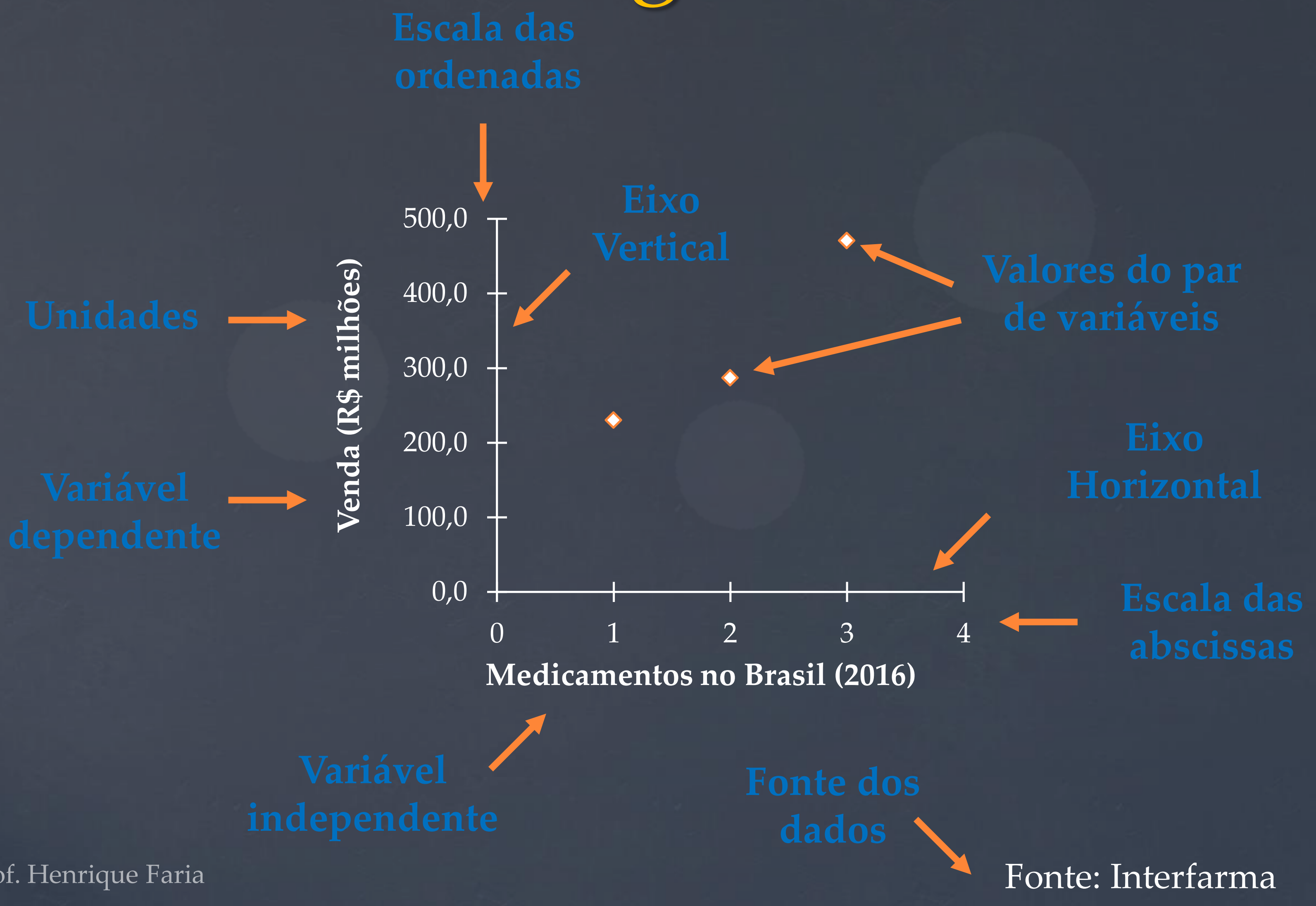
Fonte: Interfarma

Elementos do gráfico



Fonte: Interfarma

Elementos do gráfico



Gráficos em Escala linear

prof. Henrique Faria

Gráficos na escala linear

1. Identificar a variável dependente e preferencialmente, representá-la no eixo vertical.
2. Verificar a amplitude dos valores.

   Se ampl X > ampl Y formato paisagem

   Se ampl X < ampl Y formato retrato
3. Calcular valores para escala principal (regra de três).

   Arredondar valores sempre para números maiores.
4. Calcular o valor para escala secundária.
5. Construir o gráfico no papel milimetrado.
6. Obter a reta de ajuste, se a função for linear. $(y = ax + b)$

Exemplo: Volume de uma coluna de destilação

A tabela abaixo apresenta os valores de uma medição que registrou o volume de líquido destilado.

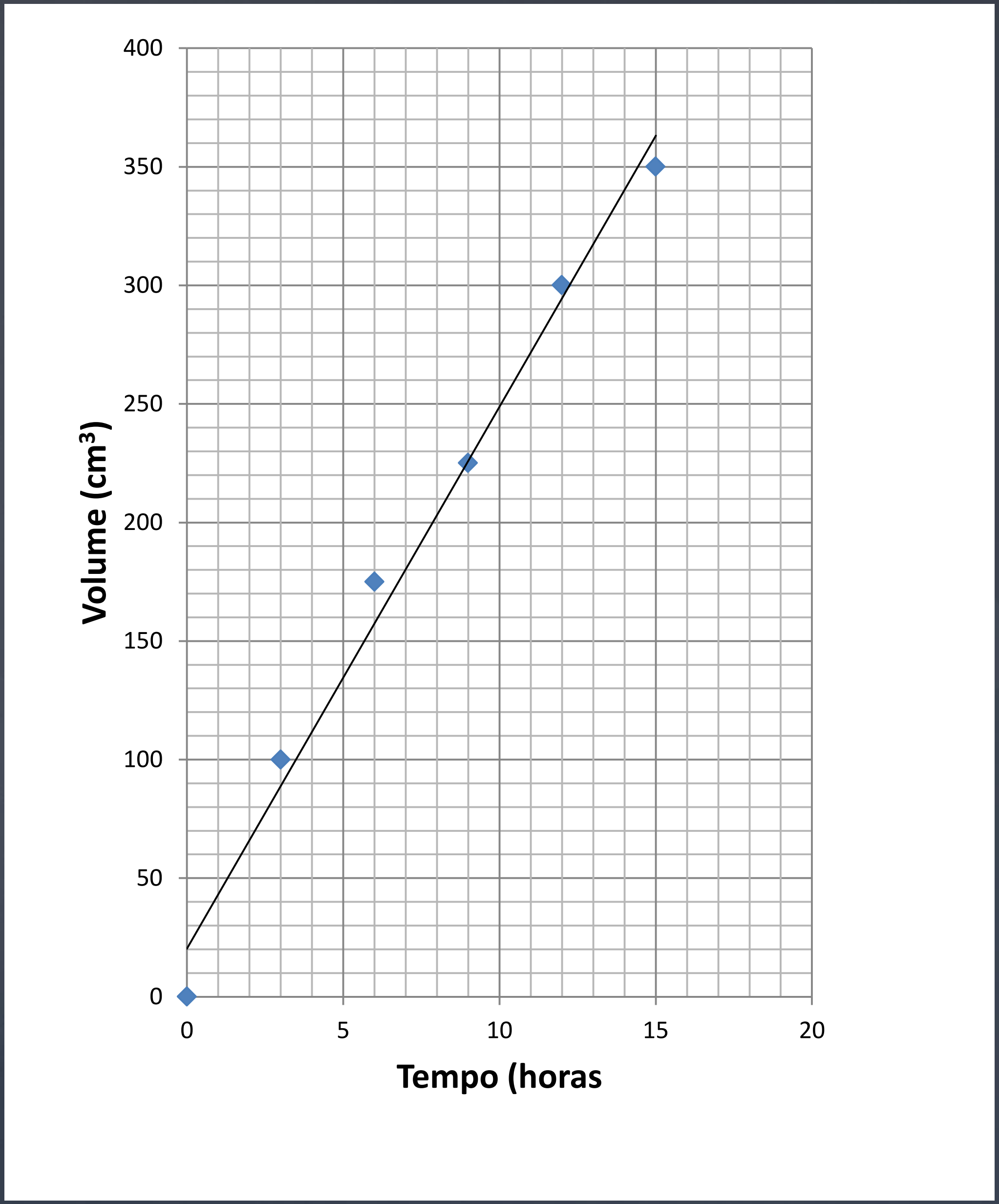
Volume (cm^3)	0	100	175	225	300	350
Tempo (horas)	0	3	6	9	12	15

Desenhe um gráfico de dispersão dessas medidas e encontre a relação funcional entre as variáveis.

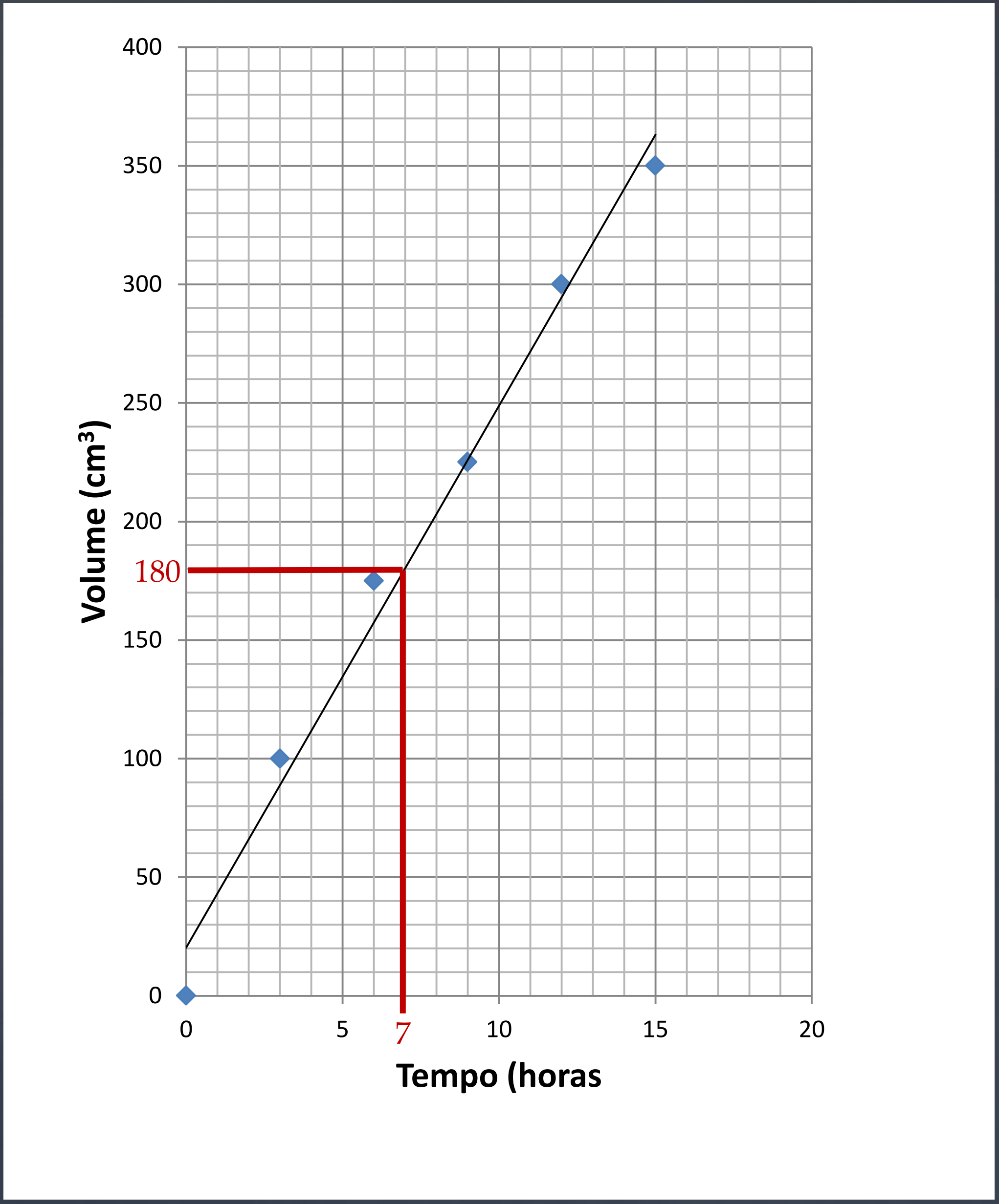
Qual será o volume em 7 horas?

Qual é a relação funcional entre as variáveis obtida do gráfico?

Exemplo: Volume de uma coluna de destilação

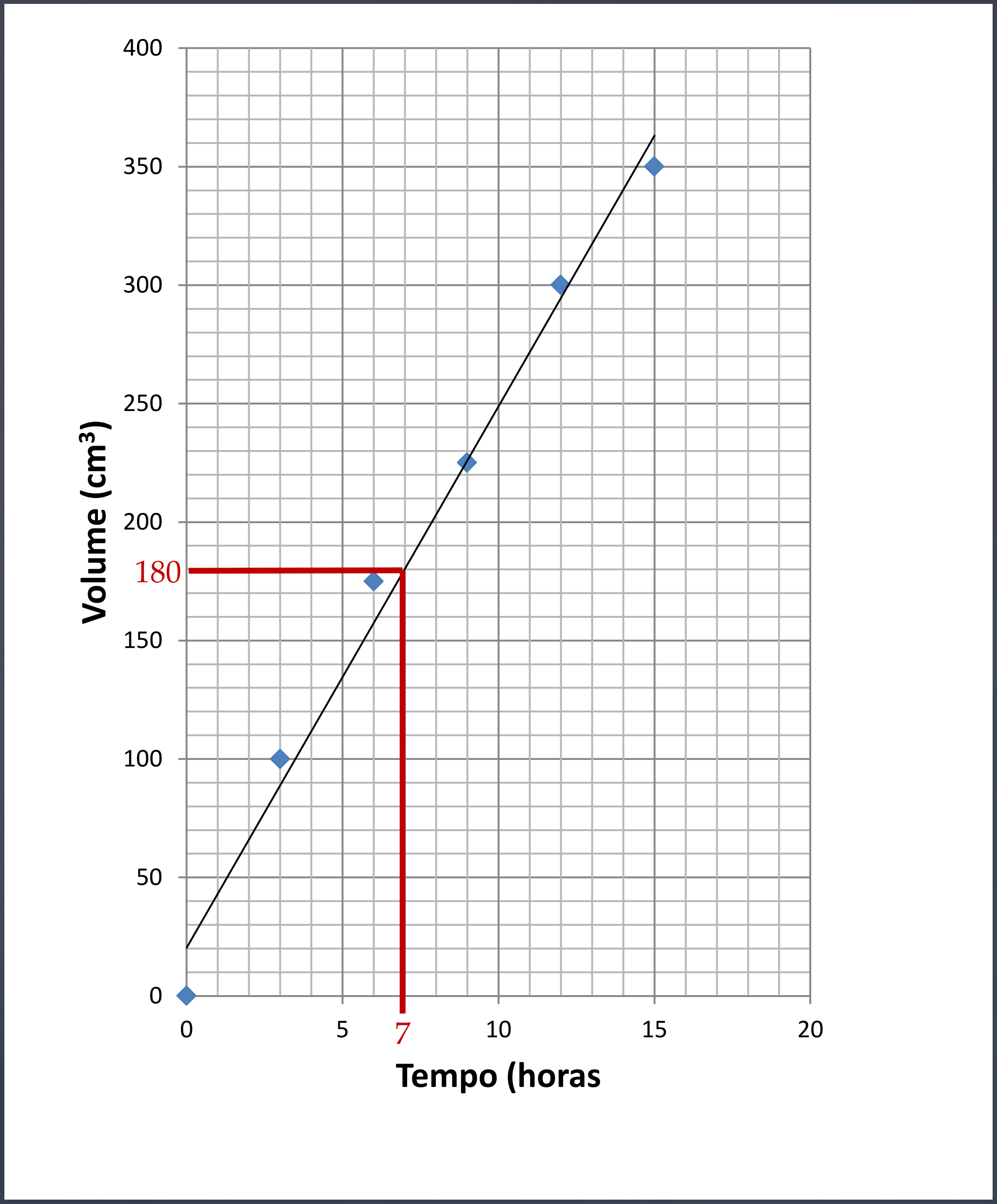


Exemplo: Volume de uma coluna de destilação



Qual será o volume em 7 horas? 180 cm^3

Exemplo: Volume de uma coluna de destilação

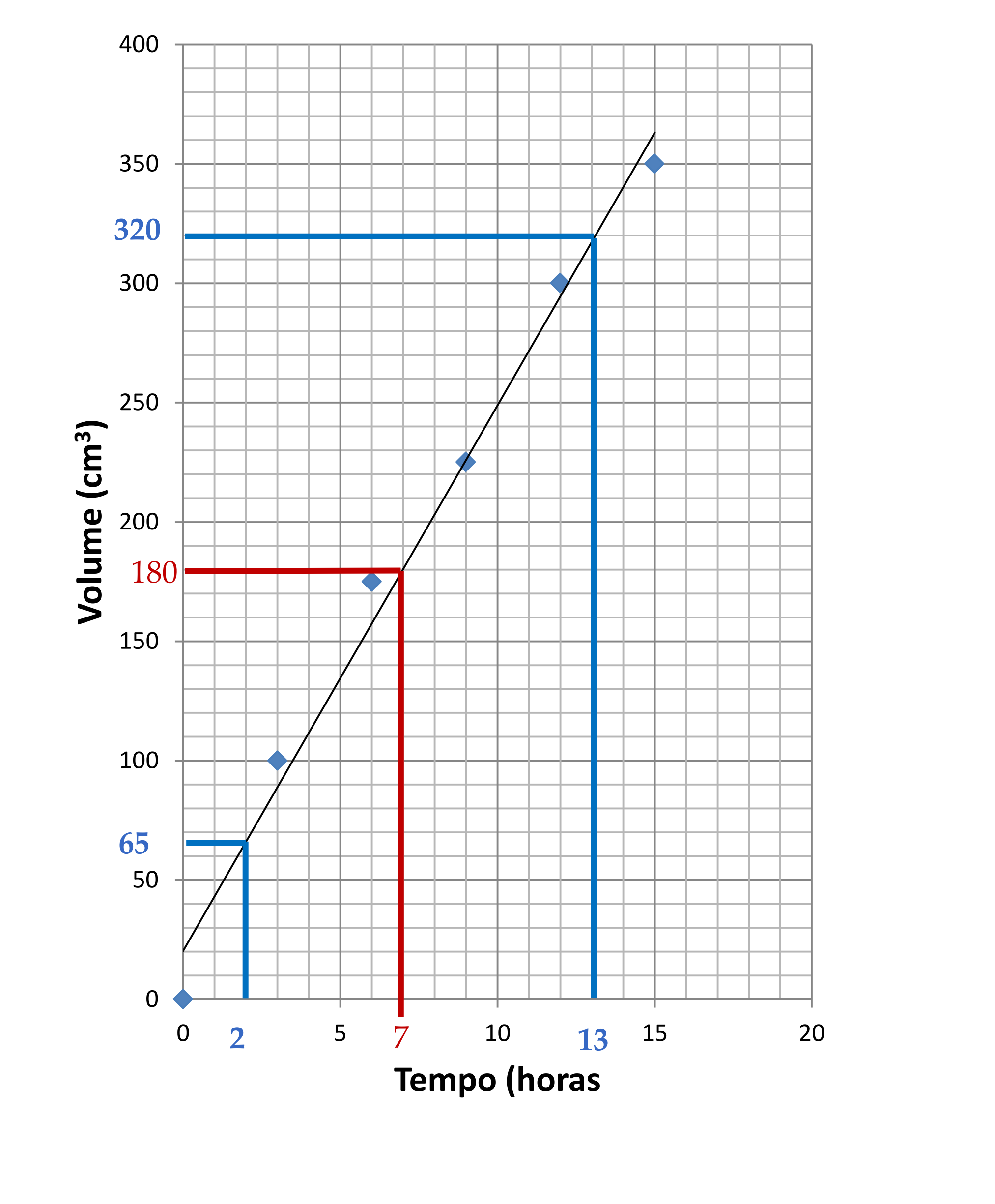


Qual será o volume em 7 horas? 180 cm^3

$$V = at + b$$

Coeficientes da reta de ajuste aos pontos.

Exemplo: Volume de uma coluna de destilação



Qual será o volume em 7 horas? 180 cm^3

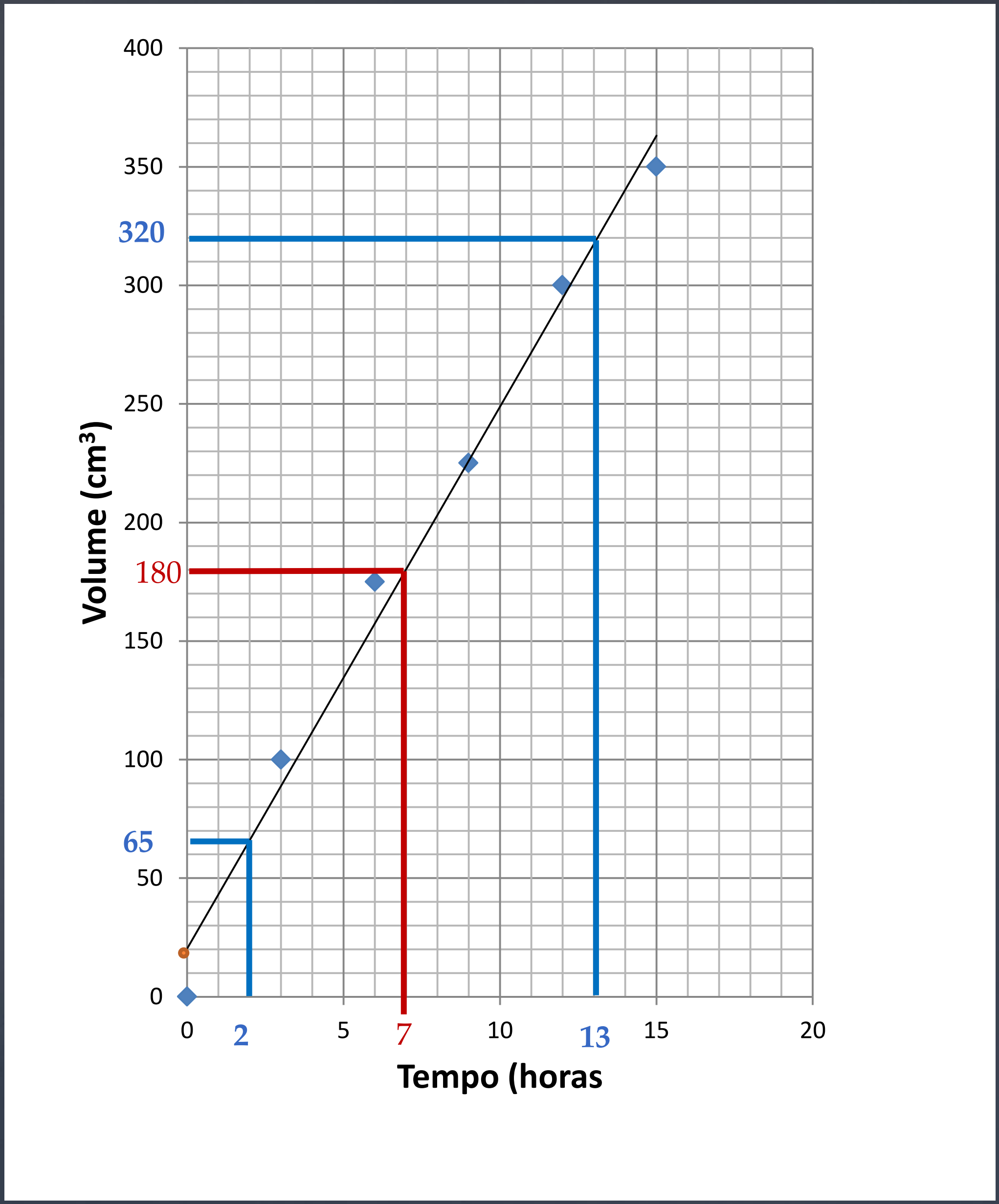
$$V = at + b$$

Coeficientes da reta de ajuste aos pontos.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{320 - 65}{13 - 2}$$

$$a = 23{,}2$$

Exemplo: Volume de uma coluna de destilação



Qual será o volume em 7 horas? 180 cm^3

$$V = at + b$$

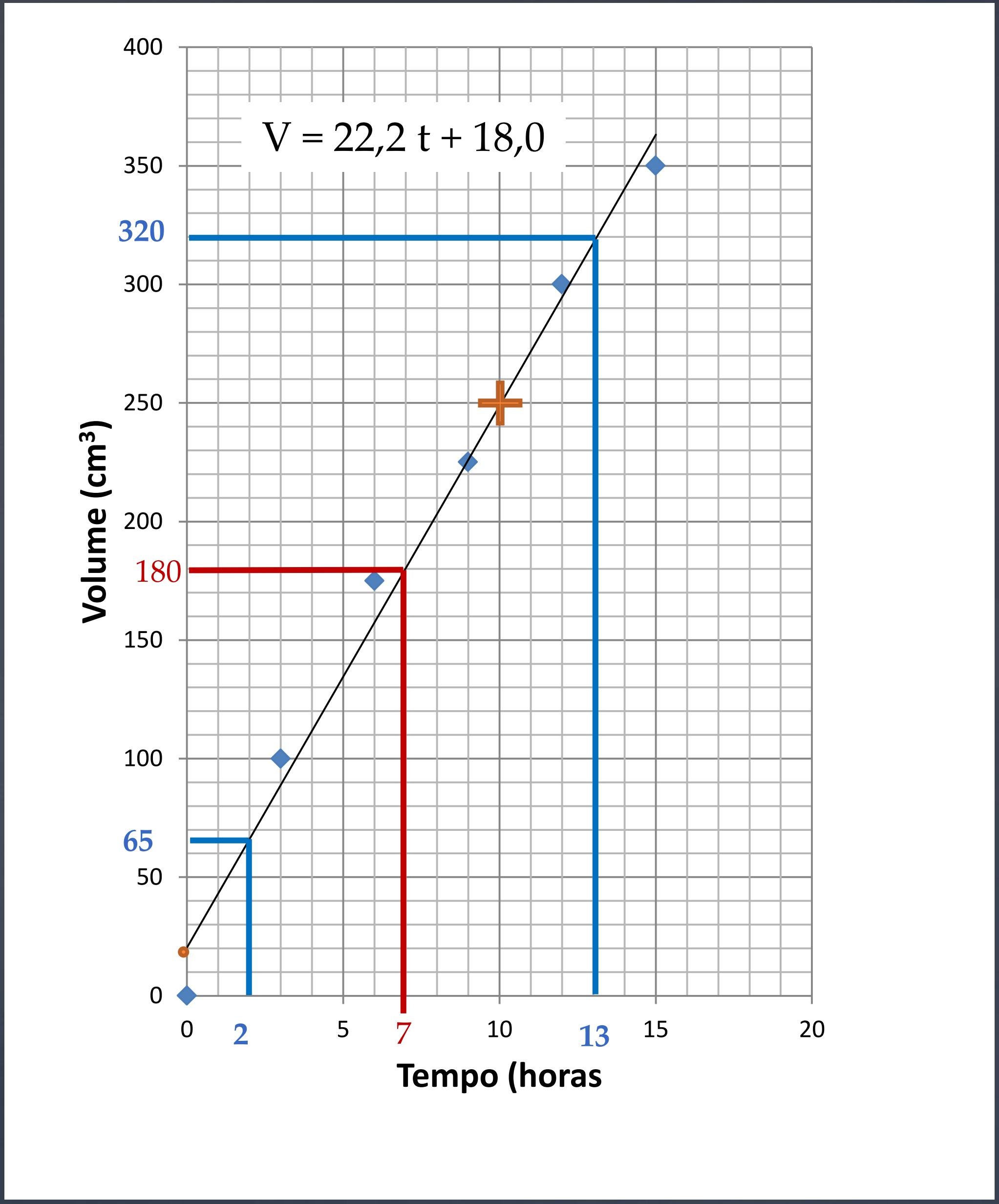
Coeficientes da reta de ajuste aos pontos.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{320 - 65}{13 - 2}$$

$$a = 23{,}2$$

$$b = 18{,}0\ (do\ gráfico)$$

Exemplo: Volume de uma coluna de destilação



Qual será o volume em 7 horas? 180 cm³

$$V = at + b$$

Coeficientes da reta de ajuste aos pontos.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{320 - 65}{13 - 2}$$

$$a = 23{,}2$$

$$b = 18{,}0\ (do\ gráfico)$$

$$b = V - at$$
$$= 250 - 23{,}2(10)$$
$$b = 18{,}0$$

Funções quadráticas do tipo $y = Ax^2$

prof. Henrique Faria

Funções do tipo $y = Ax^2$

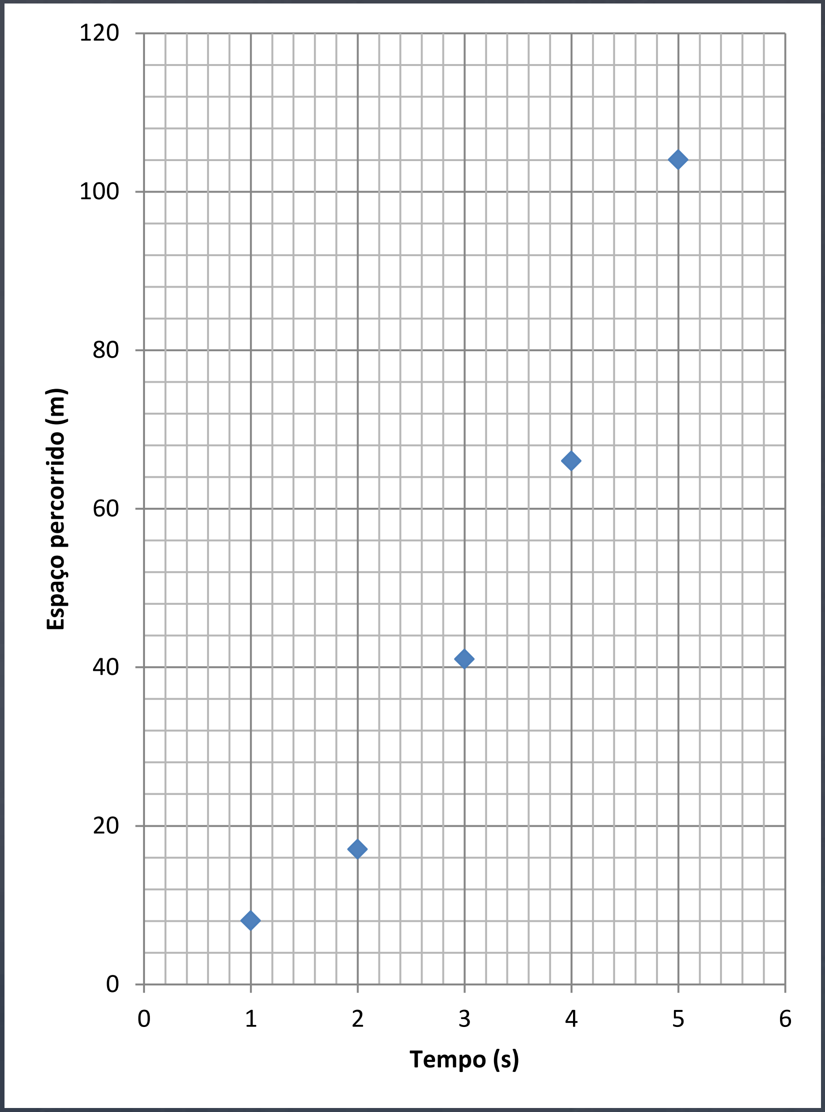
- Por exemplo movimento retilíneo uniforme variado, partindo do repouso.

$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5

$$S = S_0 + \frac{a}{2}t^2$$

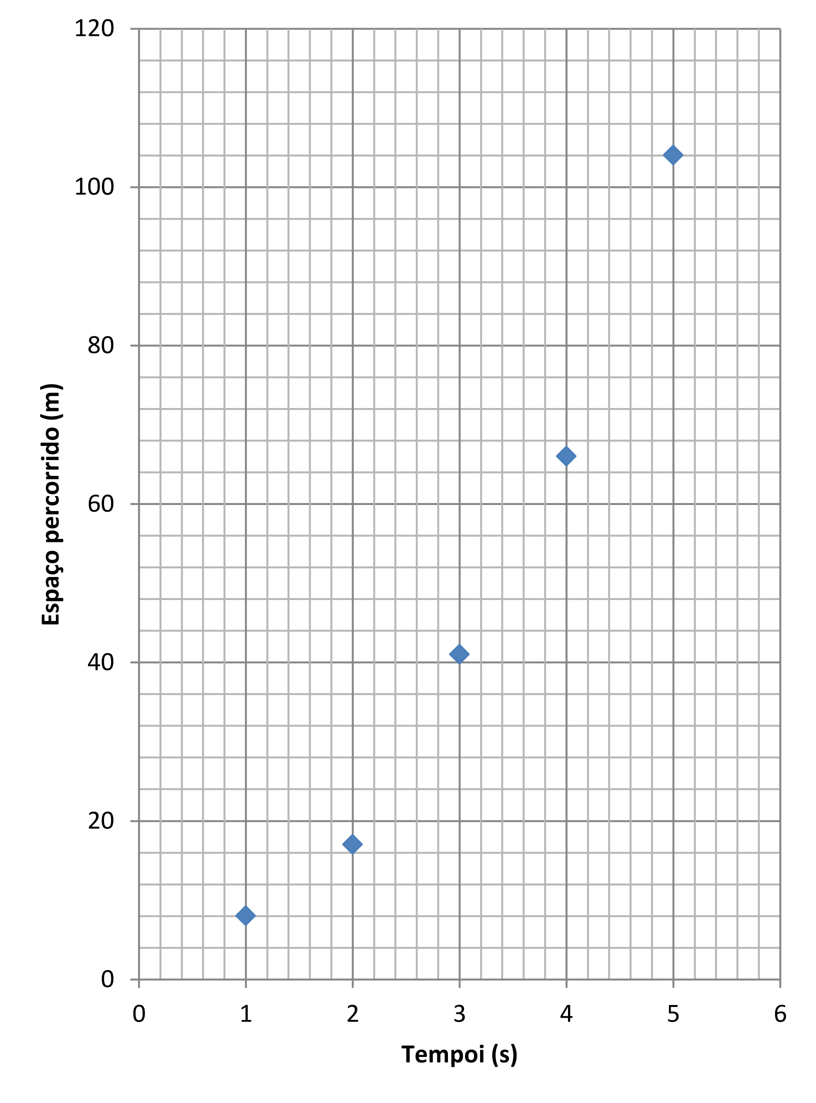
- Inicialmente plotamos os pontos em um papel milimetrado.
- Contudo, não obtemos um comportamento linear.
- Podemos linearizar a função para obter um uma relação funcional que forneça uma reta.

Funções do tipo $\boldsymbol{y = Ax^2}$



$$S = S_0 + \frac{a}{2}t^2$$

Funções do tipo $y = Ax^2$



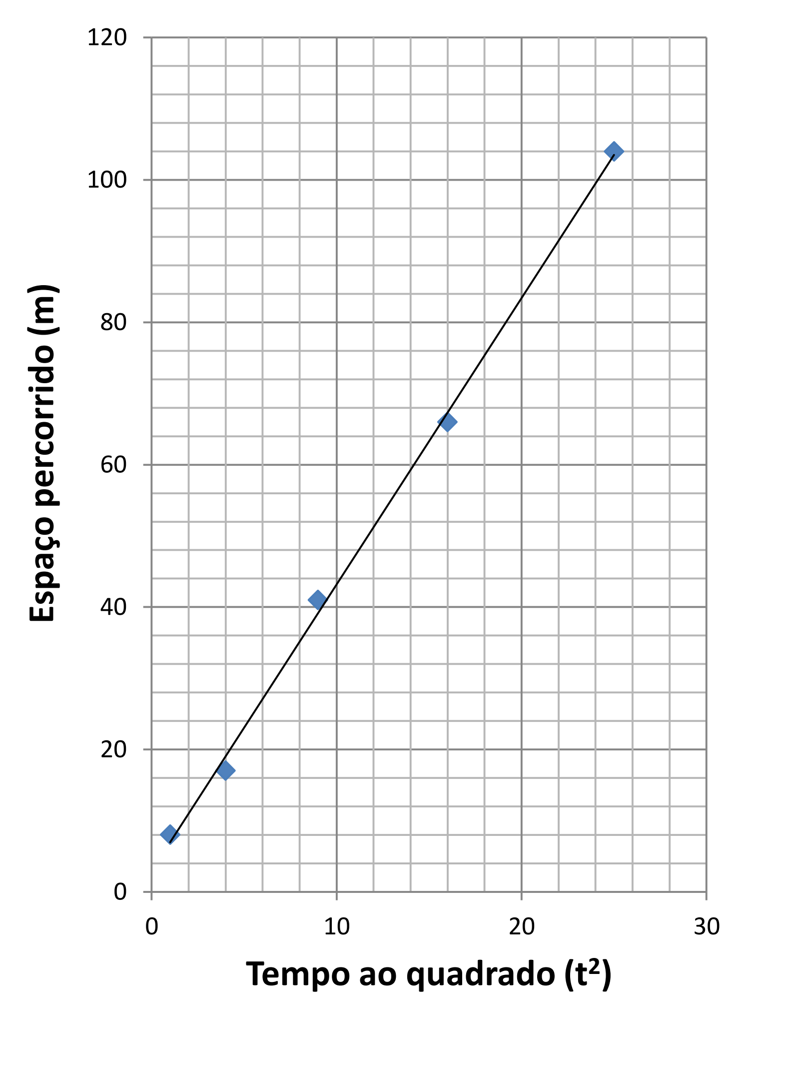
$$S = S_0 + \frac{a}{2}t^2$$

Linearização

- Gráfico S *versus* t^2

$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5
t^2	1	4	9	16	25

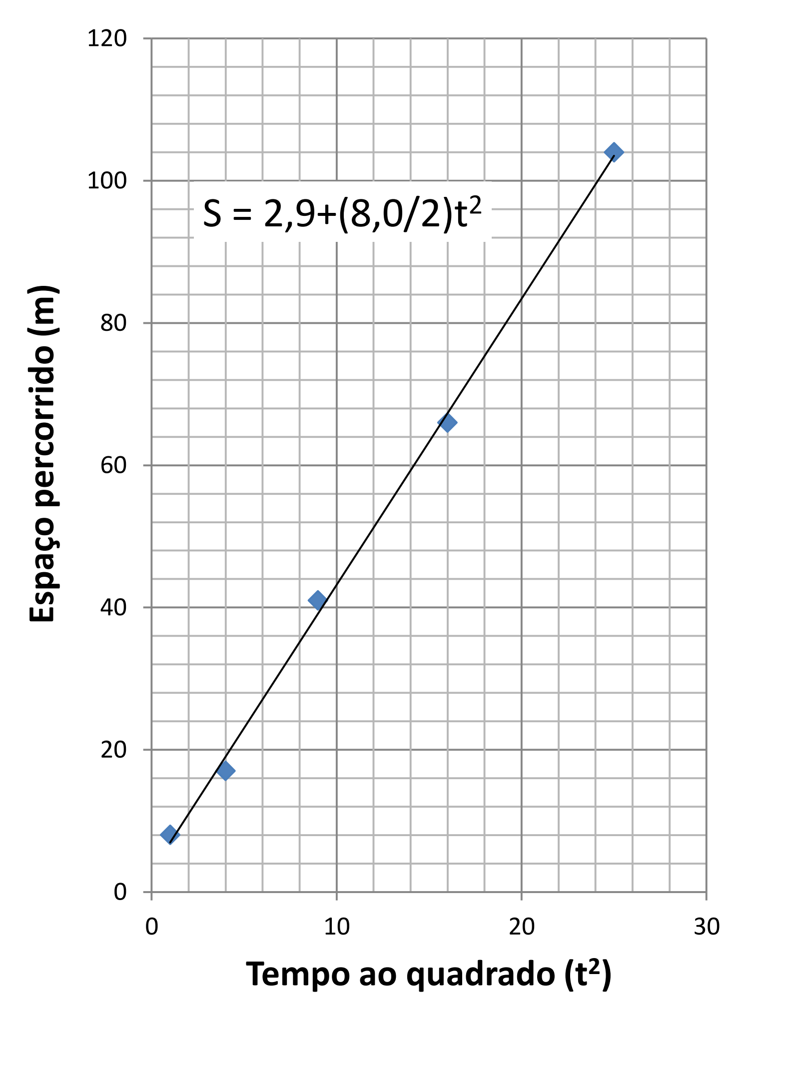
Funções do tipo $y = Ax^2$



$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5
t^2	1	4	9	16	25

prof. Henrique Faria

Funções do tipo $y = Ax^2$



$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5
t^2	1	4	9	16	25

$$a = \frac{\Delta S}{\Delta t^2} = 4{,}0$$

$$b = 2{,}9\ (do\ gráfico)$$

$$S = 2{,}9 + \frac{8{,}0}{2} t^2$$

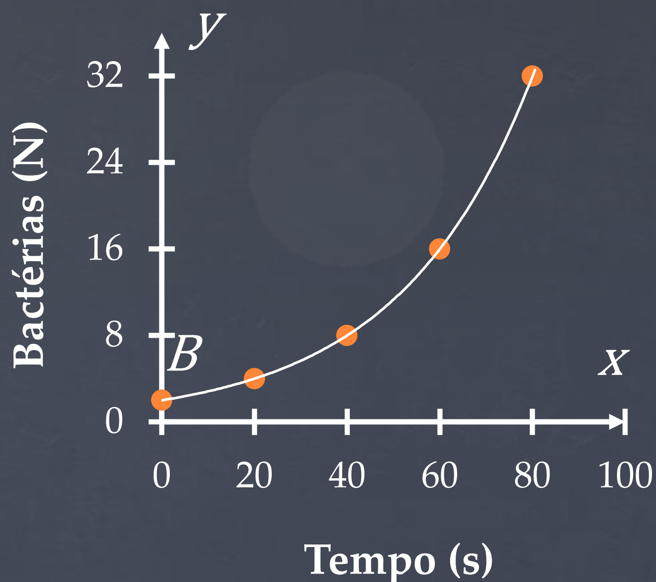
Funções do tipo
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{n}}$ e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{hn}}$

Gráficos em Escala logarítmica Mono-log e Di-log

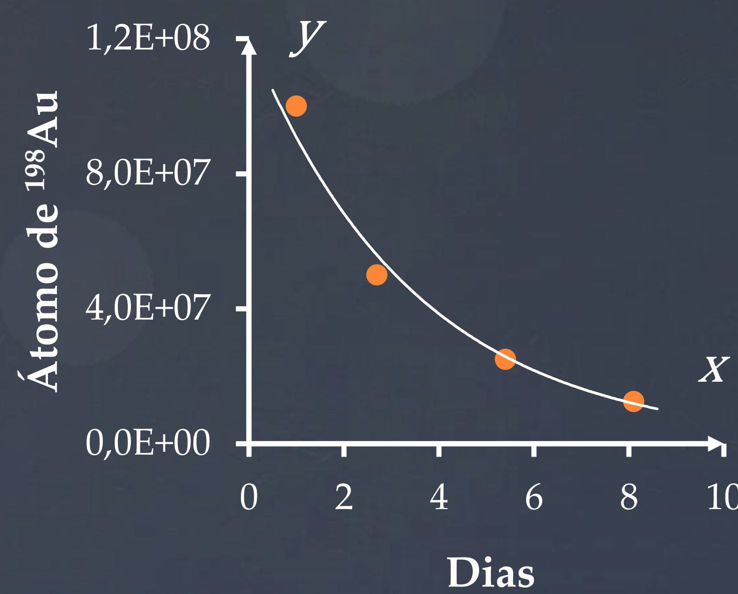
prof. Henrique Faria

Decaimento e crescimento exponencial ($y = Ae^{hn}$)

Ao construirmos um gráfico na escala linear poderemos obter um dos comportamentos:



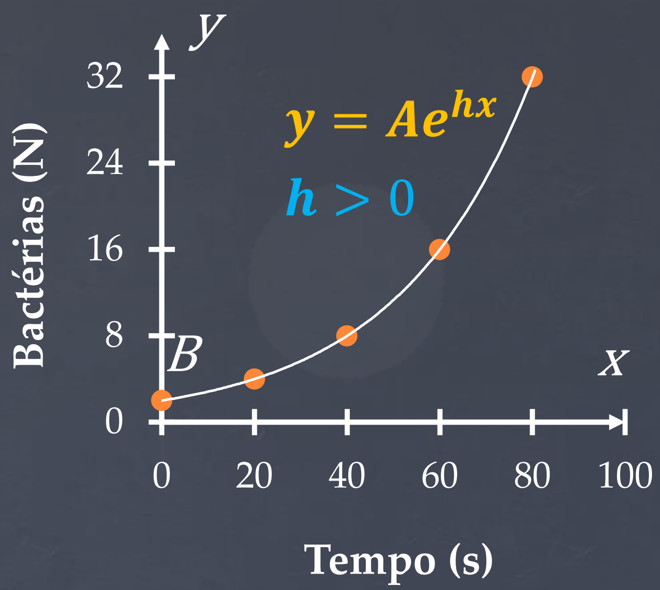
Crescimento

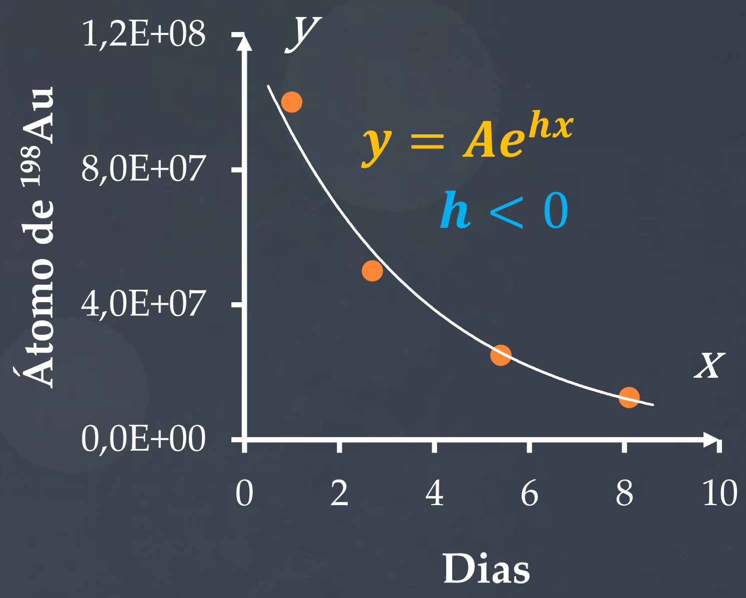


Decrescimento

prof. Henrique Faria

Decaimento e crescimento exponencial





$\boldsymbol{y}$: variável dependente; $\boldsymbol{x}$: variável independente; $\boldsymbol{h}$: $constante$

$\boldsymbol{A}$: contante (interseção de y em $x = 0$); e: 2,71 … (base do ln)

Exemplo

Um organismo unicelular se reproduz por divisão binária a uma taxa constante. Se inicialmente há duas bactérias e cada uma se divide em duas a cada 20 minutos teremos a seguinte taxa de crescimento:

Número de bactérias (*N*)	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**
Tempo *t* (minutos)	**0**	**20**	**40**	**60**	**80**

a) Determinar, a partir do gráfico de ***N*** versus ***t***, uma relação funcional entre as grandezas;

b) Calcular o número de bactérias em ***t*** = 2h (não medida).

a) Gráfico na escala linear do crescimento de bactérias no tempo.

Ao utilizar as cinco primeiras etapas descritas no exemplo da coluna de destilação obtemos o gráfico:

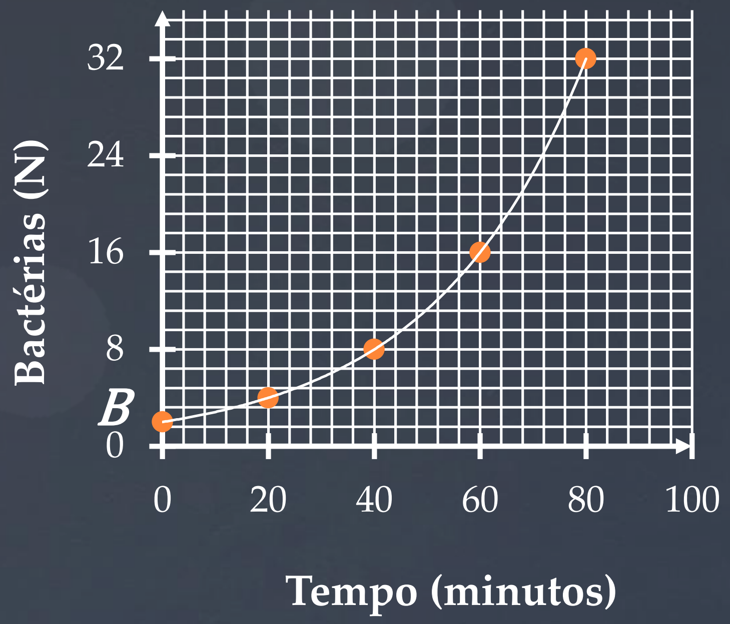
Gráfico linear

Poderá ser feito em papel milimetrado ou em softwares para traçar gráficos.

Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{ht} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$



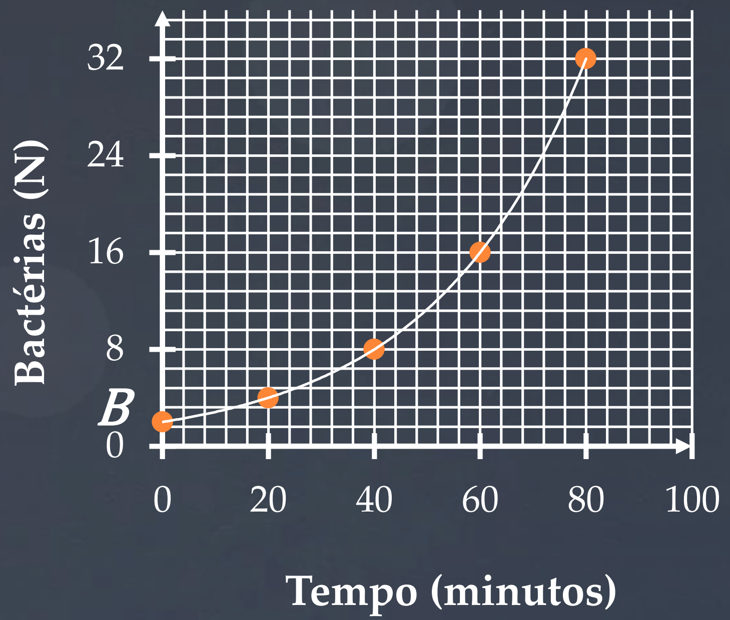
Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{ht}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

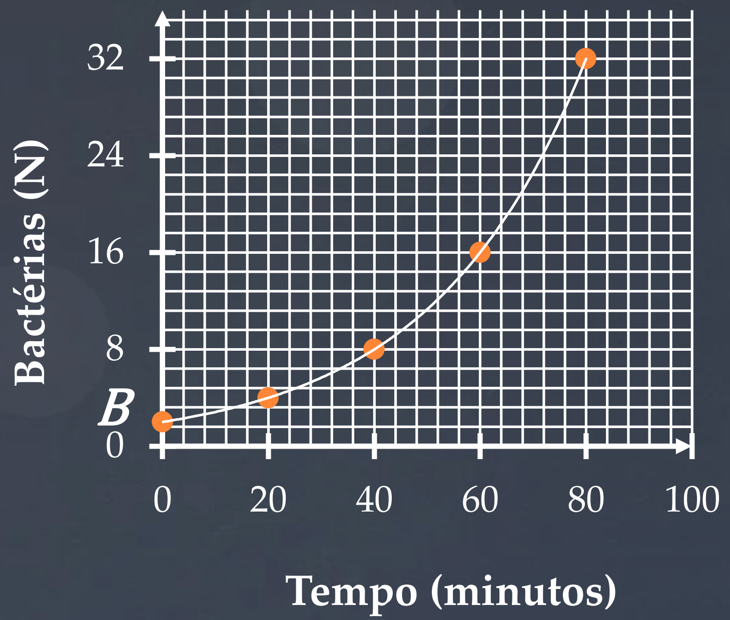
$$\boldsymbol{N = Ae^{ht}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

*Para encontrar o parâmetro **h***

devemos linearizar a função:



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

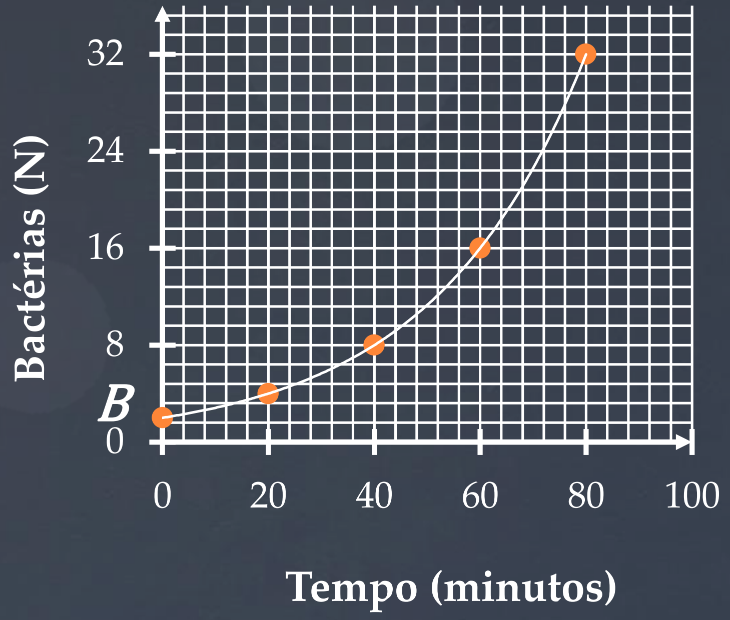
$$\boldsymbol{N = Ae^{ht}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ \ldots$$

Determinação de A:

$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$

Para encontrar o parâmetro ***h*** *devemos linearizar a função:*

$$logN = logAe^{ht}$$



prof. Henrique Faria

Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{ht}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ \ldots$$

Determinação de A:

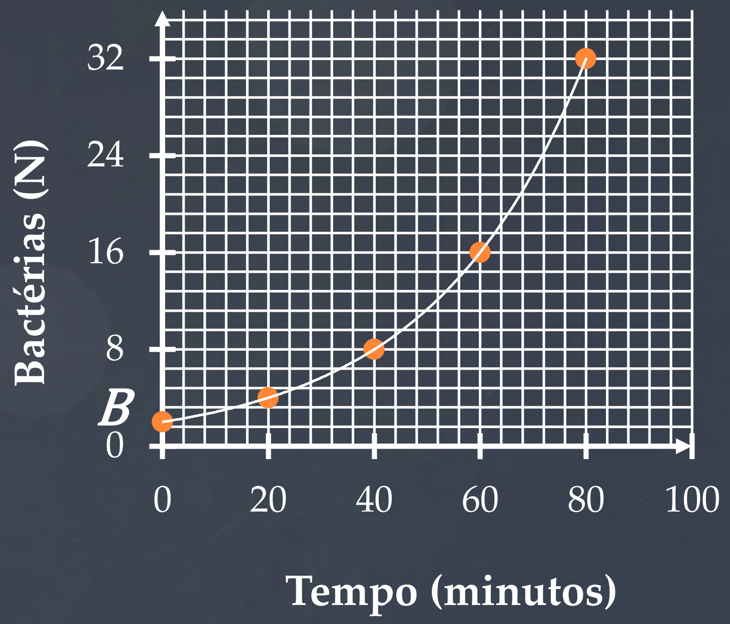
$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

Para encontrar o parâmetro ***h***

devemos linearizar a função:

$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{at}} \qquad sendo\ e = 2{,}71 \ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

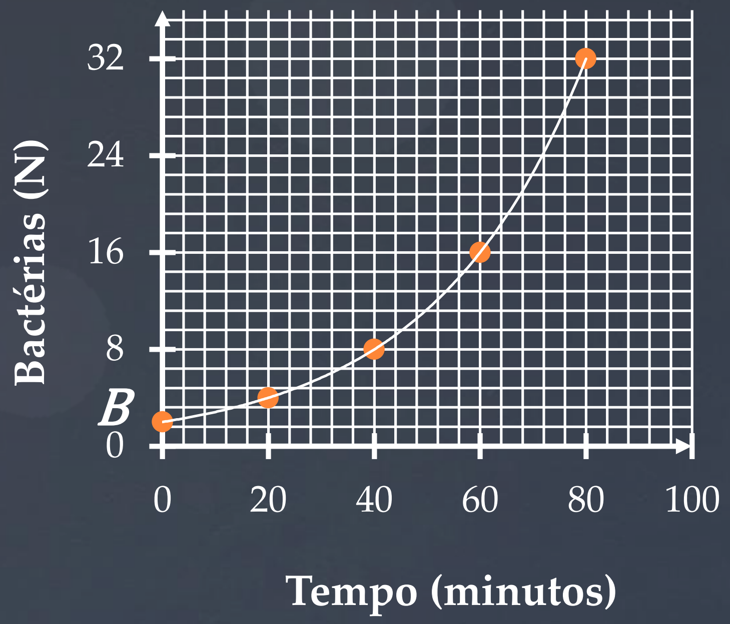
*Para encontrar o parâmetro **h***

devemos linearizar a função:

$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$

$$logN = logA + h.t.loge$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{at}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ \ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

*Para encontrar o parâmetro **h***

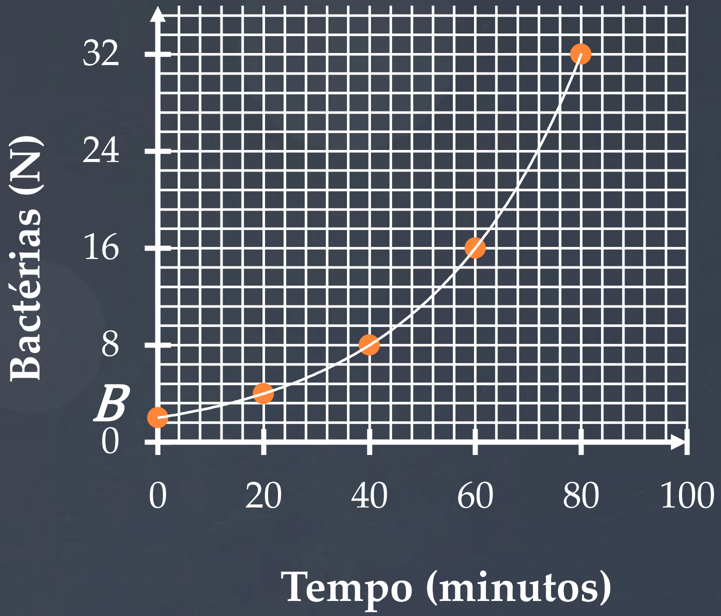
devemos linearizar a função:

$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$

$$logN = logA + h.t.loge$$

$$logN = logA + (h.loge)t$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{at}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

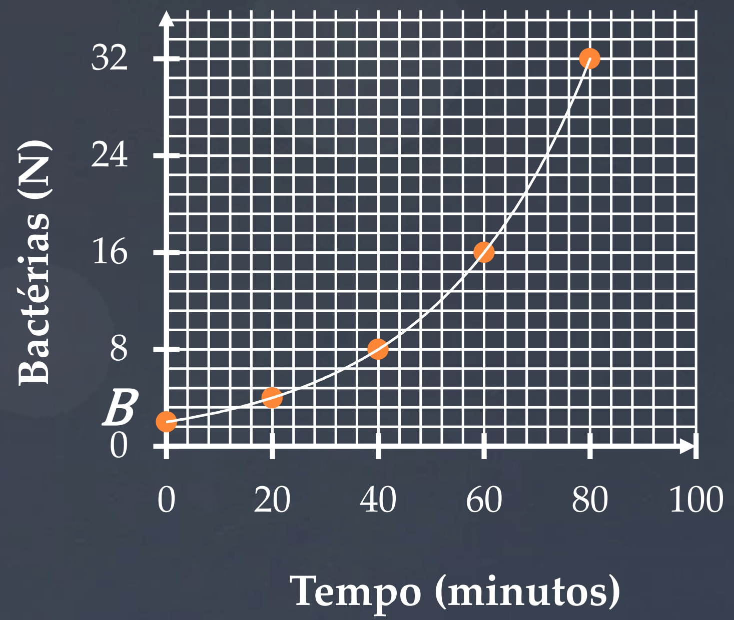
*Para encontrar o parâmetro **h** devemos linearizar a função:*

$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$

$$logN = logA + h.t.loge$$

$$logN = logA + (h.loge)t$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{at} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad N = A = 2$$

Para encontrar o parâmetro ***h*** *devemos linearizar a função:*

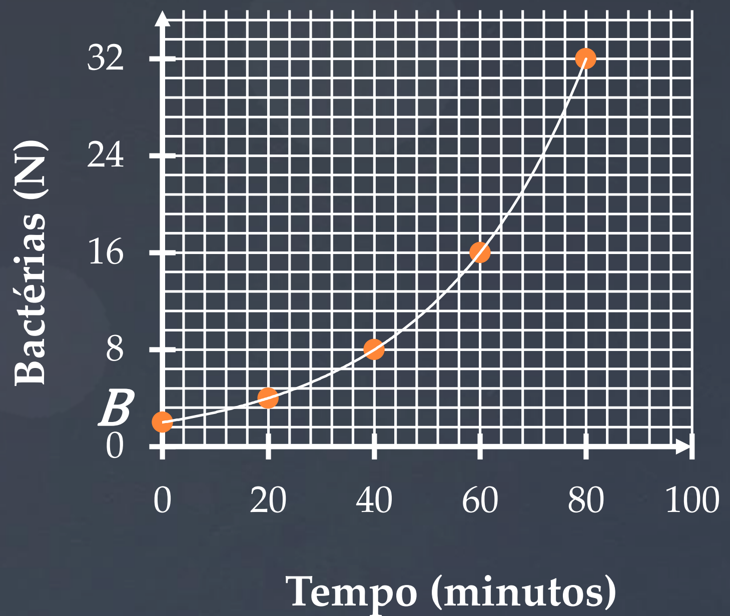
$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$

$$logN = logA + h.t.loge$$

$$logN = logA + (h.loge)t$$

$$(\ y = b + mx\ )$$

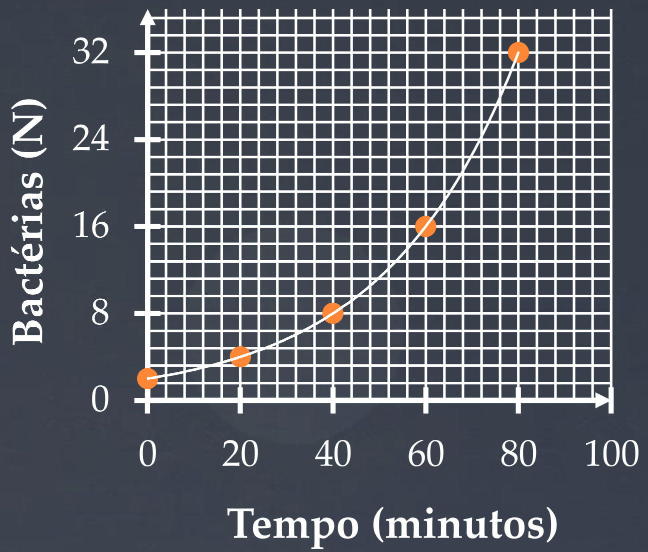


prof. Henrique Faria

Em consequência:

$$\boldsymbol{m = h.\log e}$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o ***log*** somente na variável dependente (N).

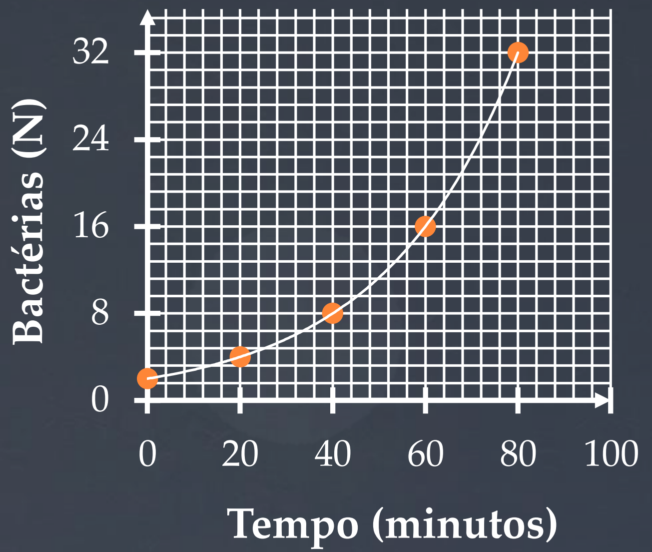


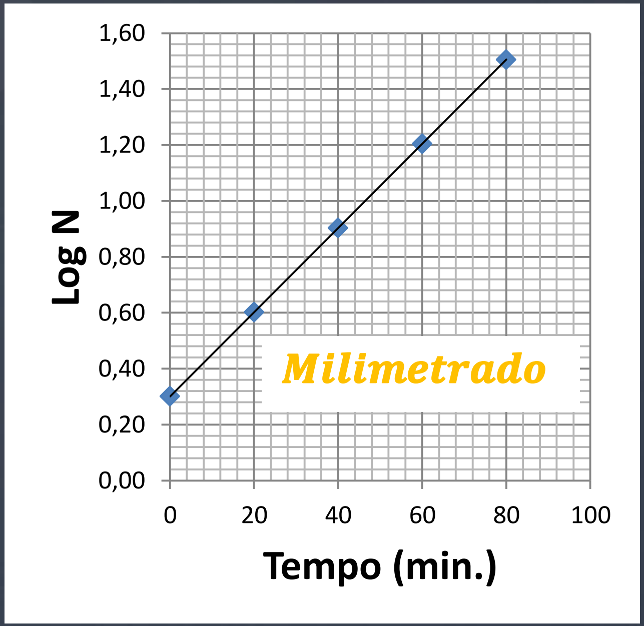
prof. Henrique Faria

Em consequência:

$$m = h.\log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o ***log*** somente na variável dependente (N).





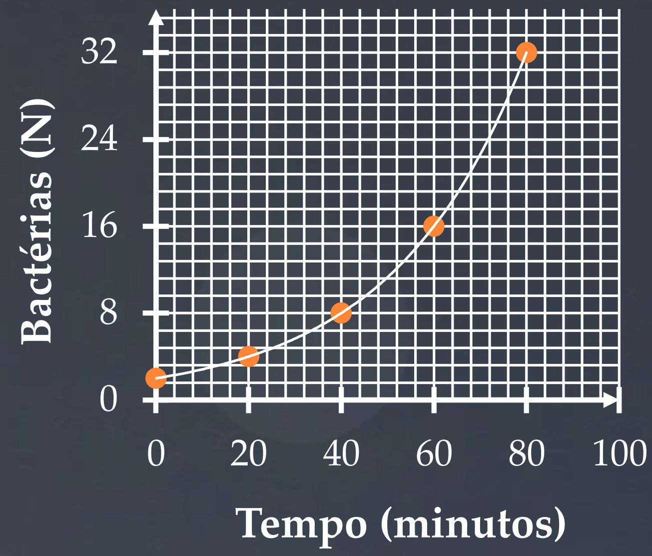
Em consequência:

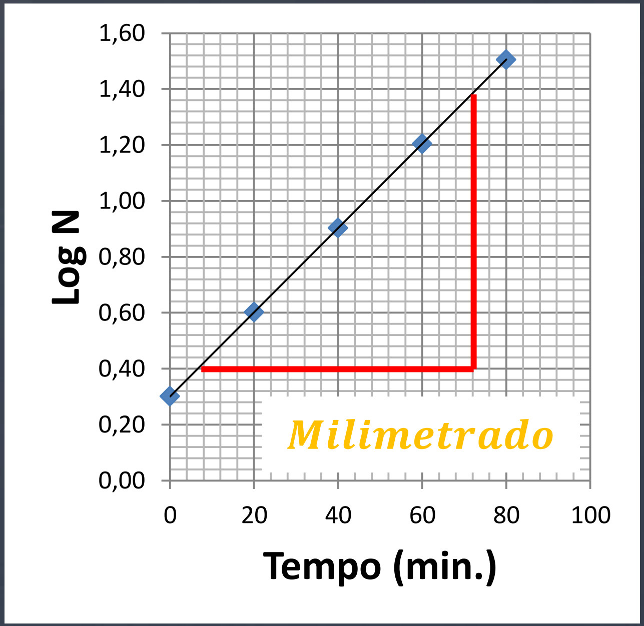
$$m = h.\log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o *log* somente na variável dependente (N).

A inclinação m será então:

$$m = \frac{1{,}36 - 0{,}40}{72 - 8} = 0{,}015$$





***Em consequência*:**

$$m = h.\log e$$

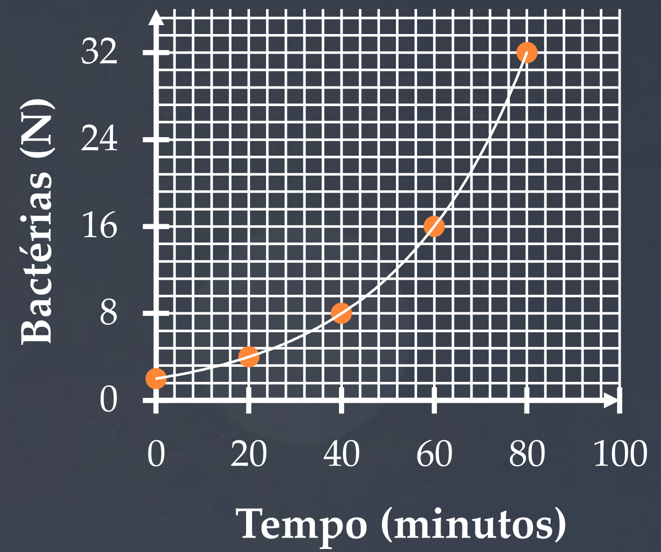
A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o ***log*** somente na variável dependente (*N*).

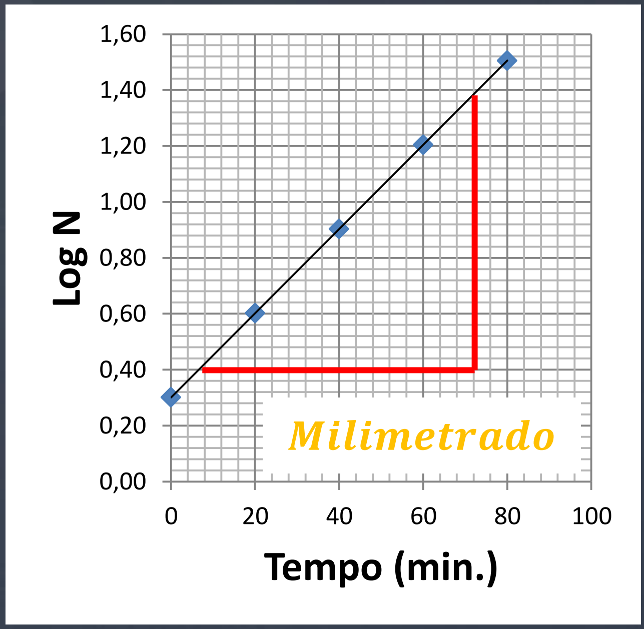
A inclinação m será então:

$$m = \frac{1{,}36 - 0{,}40}{72 - 8} = 0{,}015$$

Então calcula-se o coeficiente ***h***:

$$h = \frac{m}{\log e} = \frac{0{,}015}{\log 2{,}71} = 0{,}035$$





Em consequência:

$$m = h.\log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o *log* somente na variável dependente (*N*).

A inclinação m será então:

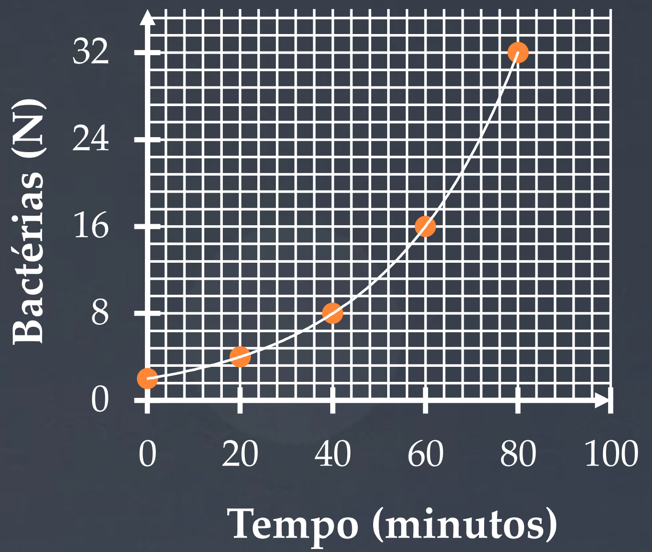
$$m = \frac{1{,}36 - 0{,}40}{72 - 8} = 0{,}015$$

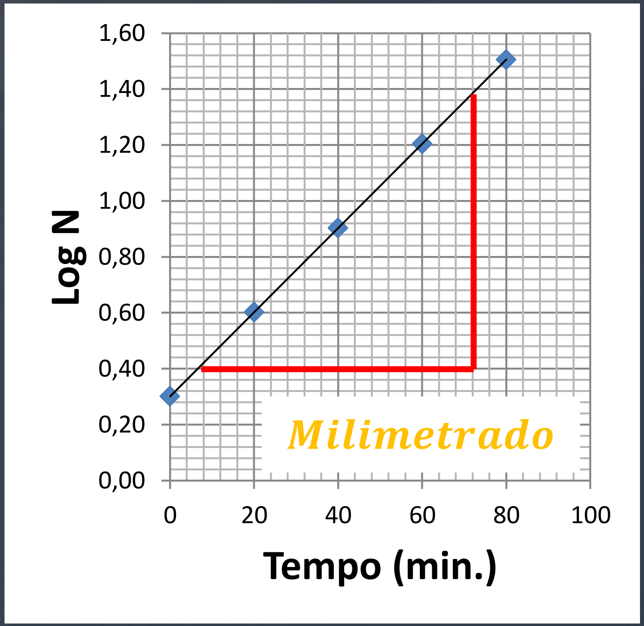
Então calcula-se o coeficiente *h*:

$$h = \frac{m}{\log e} = \frac{0{,}015}{\log 2{,}71} = 0{,}035$$

A relação funcional será:

$$N = 2e^{0{,}035.t}$$

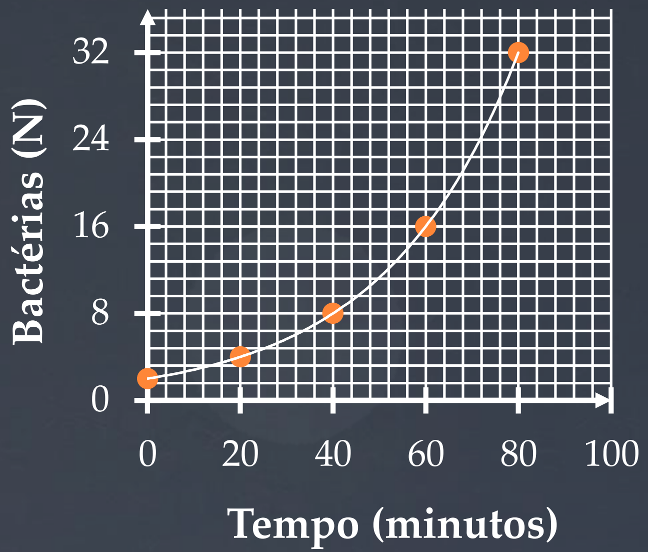




Em consequência:

$$m = h.\log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o ***log*** somente na variável dependente (*N*).

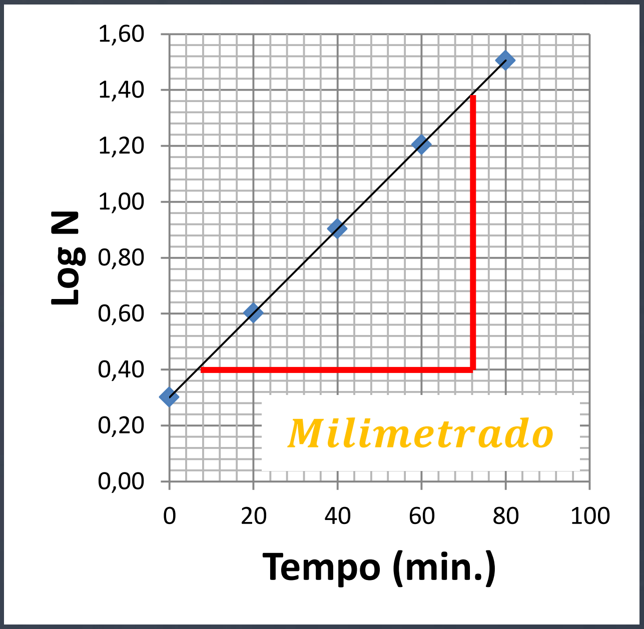


A inclinação $\boldsymbol{m}$ será então:

$$m = \frac{1{,}36-0{,}40}{72-8} = 0,015$$

Então calcula-se o coeficiente ***h***:

$$h = \frac{m}{\log e} = \frac{0{,}015}{\log 2{,}71} = 0,035$$



A relação funcional será:

$$N = 2e^{0{,}035.t}$$

b) *Em* $t = 120$ min $\quad N = 128\ \textit{Bactérias}$

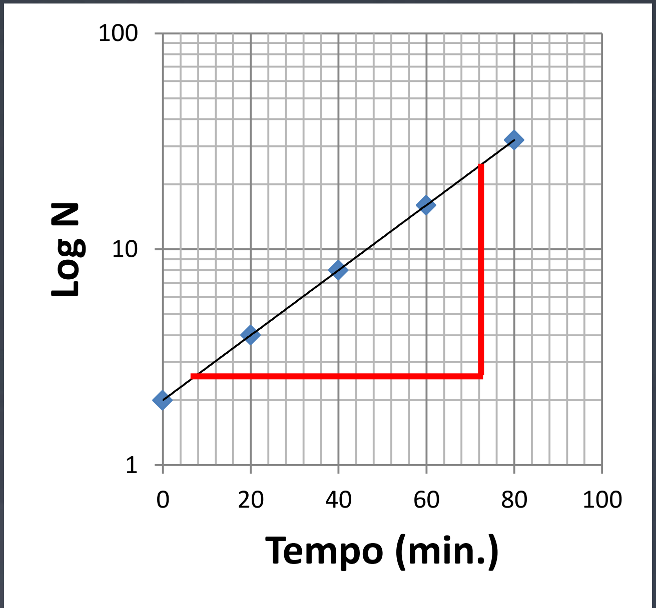
prof. Henrique Faria

Segunda opção papel Mono-log

$$m = h.\log e$$

A inclinação m será então:

$$m = \frac{\log 25 - \log 2{,}5}{72 - 8} = 0{,}015$$



Segunda opção papel Mono-log

$$m = h.\,log e$$

A inclinação m será então:

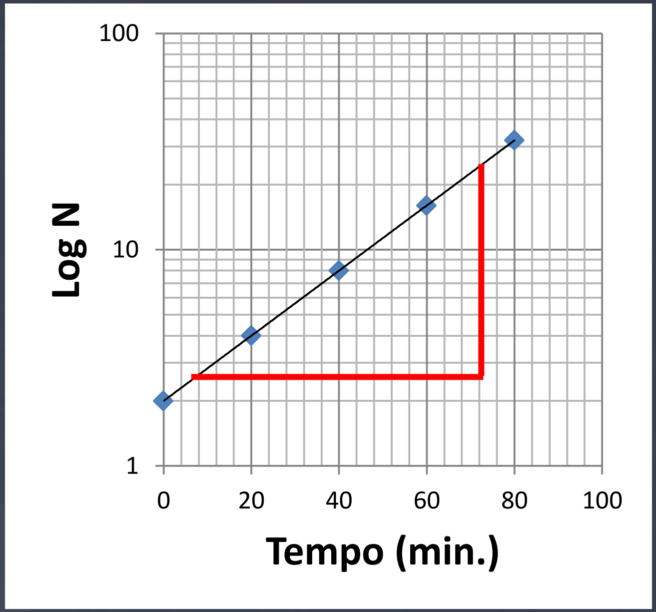
$$m = \frac{log25 - log2{,}5}{72-8} = 0,015$$

Então calcula-se o coeficiente h:

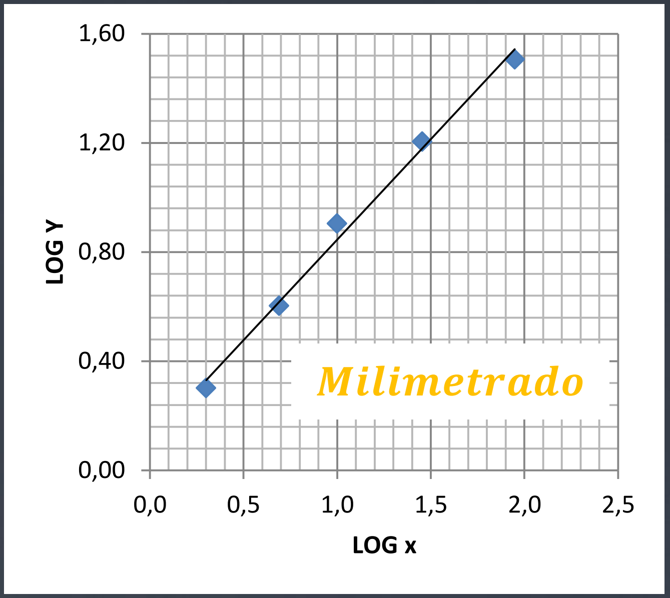
$$h = \frac{m}{log e} = \frac{0{,}015}{log2{,}71} = 0,035$$

A relação funcional será:

$$N = 2e^{0{,}035.t}$$



Funções do tipo $y = Ax^n$



Relação funcional

$Y = Ax^n$

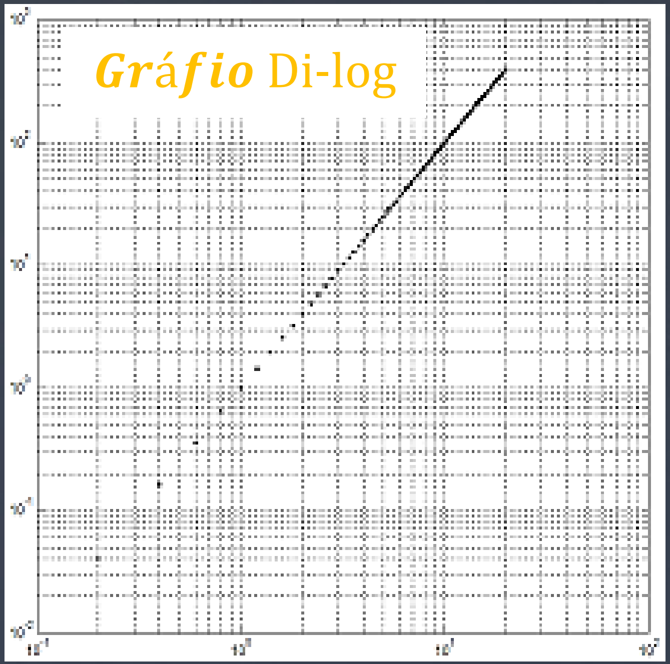
Linearização da função:

$$logY = log\boldsymbol{Ax^n}$$

$$logN = logA + log\boldsymbol{x^n}$$

$$logN = logA + nlogx$$

$$(\ y \quad = \quad b \quad + \quad nx\ )$$



Coeficiente angular a(n) e b serão:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{logY_1 - logY_2}{logx_1 - logx_2}$$

b: *substituir dois valores da reta na relação funcional.*

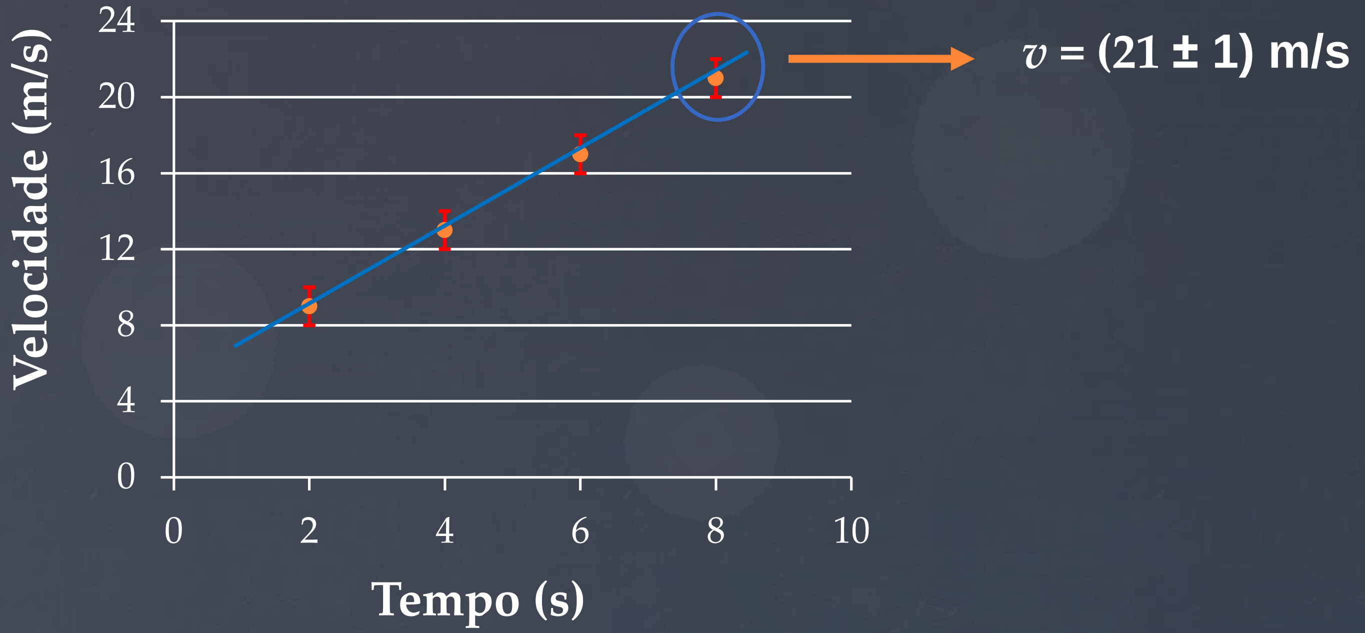
Representação de incertezas em gráficos

- Exemplo da velocidade de um corpo no tempo;
- Foram tomadas três medidas de velocidade que resultaram em um valor mais provável e uma incerteza;

v (m/s)	9 ± 1	13 ± 1	17 ± 1	21 ± 1
t (s)	2	4	6	8

- Representar o gráfico da velocidade em função do tempo com as incertezas nas ordenadas (v).

Gráfico linear da velocidade no tempo



A reta de ajuste obtida pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) considera as barras de incertezas.

Referências

1. VUOLO, J. H.; Fundamentos da Teoria de Erros. 2nd ed., São Paulo: Edgar Blücher Ltda., 1996.