

# **Cálculo I**

## **Licenciatura em Química**

**Derivada**

**Crescimento, decrescimento,  
concavidade e ponto de  
inflexão**

**Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria**

**[henrique.faria@unesp.br](mailto:henrique.faria@unesp.br)**

# Introdução

- ✓ Recursos computacionais são úteis para visualizar gráficos de funções;
- ✓ Porém, nos problemas que requerem precisão de análise a aplicação da derivada é mais vantajosa;
- ✓ Neste capítulo desenvolveremos formas matemáticas para encontrar a forma exata do gráfico de funções.

# A - Funções crescentes e decrescentes

- ✓ Os termos crescente, decrescente e constante descrevem o comportamento de funções;
- ✓ O procedimento é feito varrendo-se o gráfico, em um intervalo, da esquerda para direita;
- ✓ Se funções representam modelos a análise do crescimento fornece uma relação de proporcionalidade entre as variáveis.

# Definição 5.1.1 (8<sup>a</sup> ed. Anton)

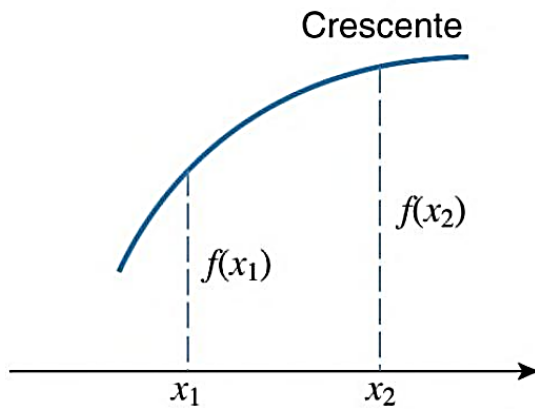
**4.1.1 DEFINIÇÃO** Seja  $f$  definida em um intervalo, e sejam  $x_1$  e  $x_2$  pontos do intervalo.

(a)  $f$  é *crescente* no intervalo se  $f(x_1) < f(x_2)$  sempre que  $x_1 < x_2$ .

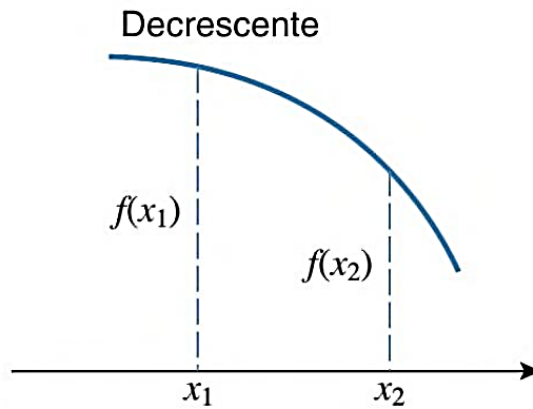
(b)  $f$  é *decrescente* no intervalo se  $f(x_1) > f(x_2)$  sempre que  $x_1 < x_2$ .

(c)  $f$  é *constante* no intervalo se  $f(x_1) = f(x_2)$ , quaisquer que sejam os pontos  $x_1$  e  $x_2$ .

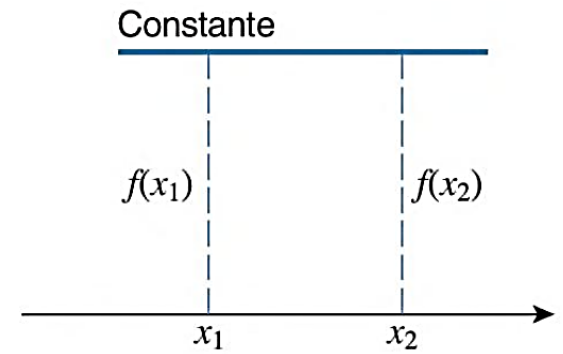
# A - Funções crescentes e decrescentes



$$f(x_1) < f(x_2) \text{ se } x_1 < x_2$$



$$f(x_1) > f(x_2) \text{ se } x_1 < x_2$$

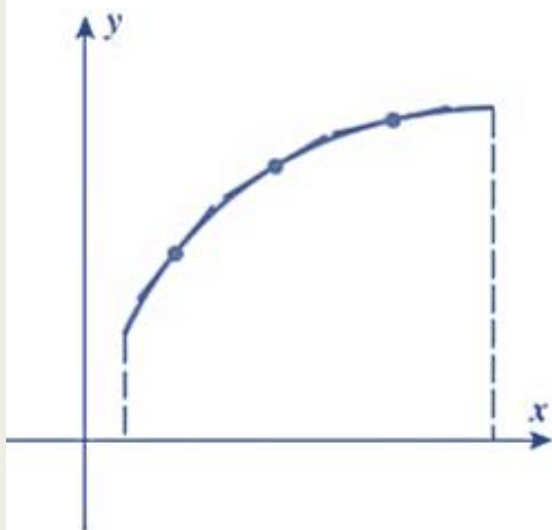


$$f(x_1) = f(x_2), \text{ quaisquer } x_1 \text{ e } x_2$$

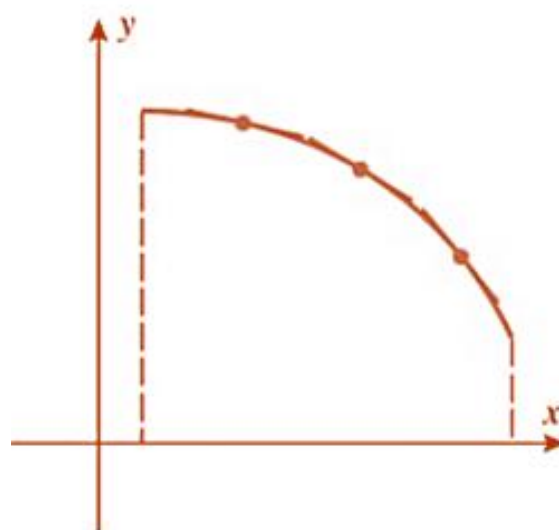
# A - Funções crescentes e decrescentes

- ✓ As figuras anteriores sugerem que:
  - Uma função  $f$  seja **crescente** nos intervalos em que as **retas tangentes** são **positivas**;
  - Ou que  $f$  seja **decrescente** nos intervalos em que as **retas tangentes** são **negativas**;
  - E ainda constante se a tangente for nula.

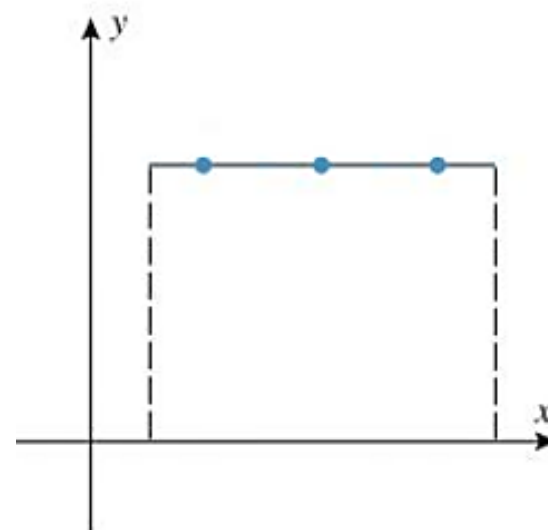
# A - Funções crescentes e decrescentes



Cada reta tangente tem inclinação positiva



Cada reta tangente tem inclinação negativa



Cada reta tangente tem inclinação zero

# Teorema 5.1.2 (8ª ed. Anton)

**4.1.2 TEOREMA** *Seja  $f$  uma função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ .*

(a) *Se  $f'(x) > 0$  com qualquer valor de  $x$  em  $(a, b)$ , então  $f$  é crescente em  $[a, b]$ .*

(b) *Se  $f'(x) < 0$  com qualquer valor de  $x$  em  $(a, b)$ , então  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ .*

(c) *Se  $f'(x) = 0$  com qualquer valor de  $x$  em  $(a, b)$ , então  $f$  é constante em  $[a, b]$ .*



# Crescimento e decrescimento

- Análise pela derivada

Seja uma função  $f$  contínua no intervalo  $[a, b]$  e que possui derivadas no intervalo  $(a, b)$ .

- Se  $f' > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$  *crecente*
- Se  $f' < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$  *decrescente*

## Exemplo 1

$$f(x) = x^2 - 2x$$

Determinar os intervalos onde a função  $f$  cresce ou decresce.

# Exemplo 1

$$f(x) = x^2 - 2x$$

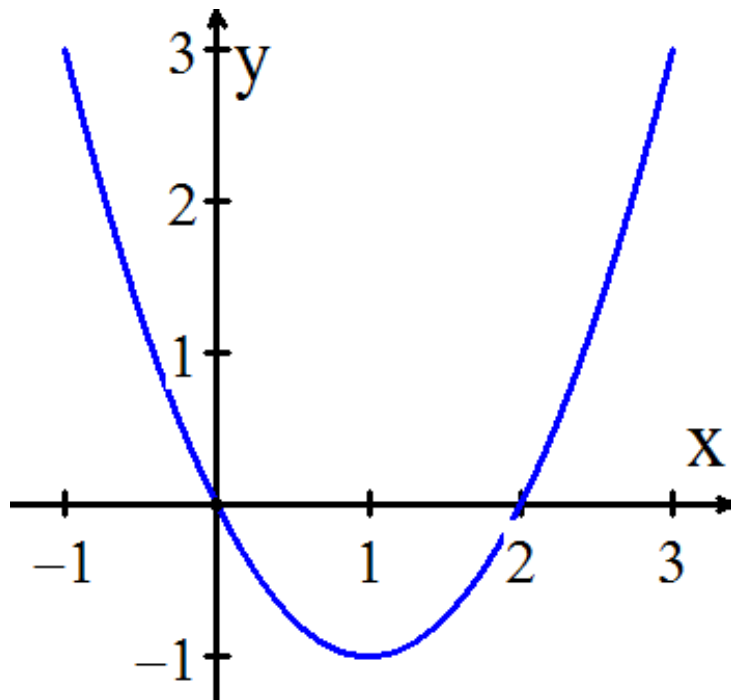
Determinar os intervalos onde a função  $f$  cresce ou decresce.

x	y
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

# Exemplo 1

$$f(x) = x^2 - 2x$$

Determinar os intervalos onde a função  $f$  cresce ou decresce.



x	y
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

# Exemplo 1

Determinação do crescimento pela derivada

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

# Exemplo 1

Determinação do crescimento pela derivada

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$x$	$f'(x)$
-2	-6
-1	-4
0	-2
1/2	-1
1	0
2	2
3	4

# Exemplo 1

Determinação do crescimento pela derivada

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

**$f(x)$  é decrescente  $(-\infty, 1)$**

**$f(x)$  é crescente  $(1, \infty)$**

$x$	$f'(x)$
-2	-6
-1	-4
0	-2
1/2	-1
1	0
2	2
3	4

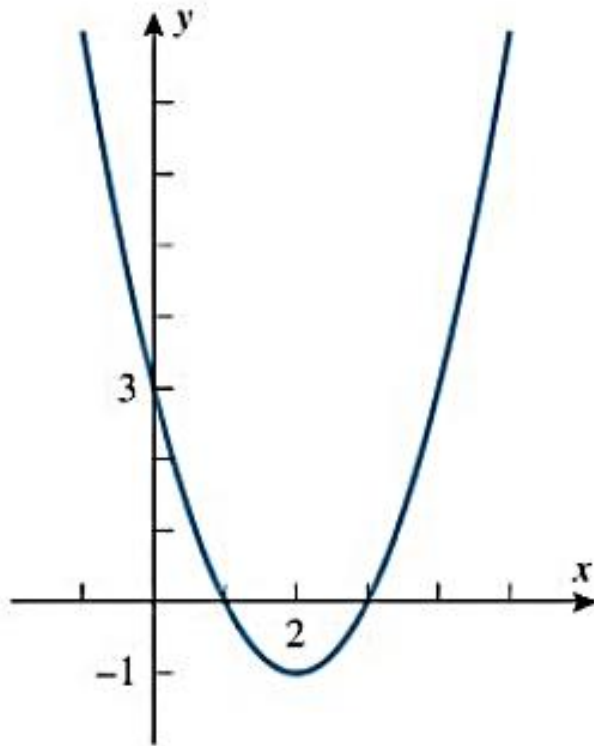
## Exercício – encontre os intervalos de crescimento e decrescimento das funções:

(a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

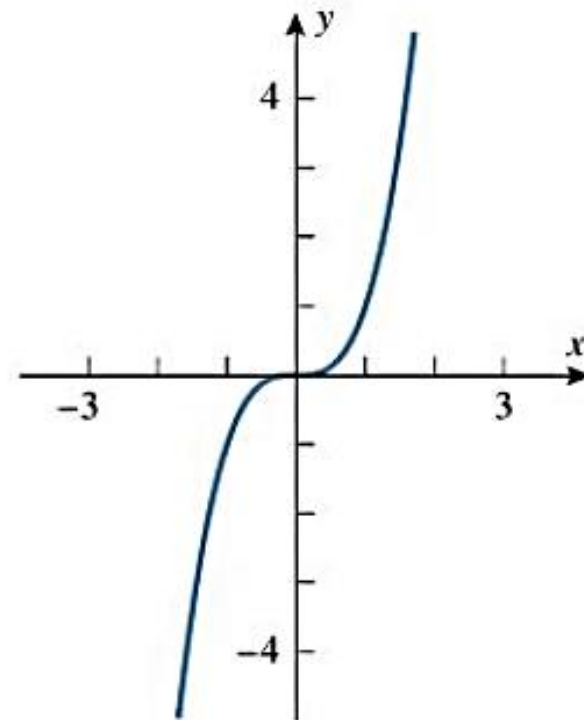
(b)  $f(x) = x^3$



# Exercício – encontre os intervalos de crescimento e decrescimento das funções:



$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$



$$f(x) = x^3$$

# B - Concavidade

- ✓ O sinal da derivada, embora, revele o crescimento ou decrescimento não revela a direção da curvatura do gráfico;
- ✓ Uma curva pode ser côncava para cima (segura água) ou côncava para baixo (derrama água);
- ✓ Como podemos ver nas figuras

# B - Concavidade



Inclinação crescente



Inclinação decrescente

# B - Concavidade



Inclinação crescente



Inclinação decrescente



## Definição 5.1.3 (8<sup>a</sup> ed. Anton)

**4.1.3 DEFINIÇÃO** Se  $f$  for diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que  $f$  é *côncava para cima* no intervalo aberto se  $f'$  for crescente nesse intervalo, e dizemos que  $f$  é *côncava para baixo* no intervalo aberto se  $f'$  for decrescente nesse intervalo.

## Definição 5.1.3 (8<sup>a</sup> ed. Anton)

**4.1.3 DEFINIÇÃO** Se  $f$  for diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que  $f$  é *côncava para cima* no intervalo aberto se  $f'$  for crescente nesse intervalo, e dizemos que  $f$  é *côncava para baixo* no intervalo aberto se  $f'$  for decrescente nesse intervalo.

## Teorema 5.1.4 (8<sup>a</sup> ed. Anton)

**4.1.4 TEOREMA** Seja  $f$  duas vezes diferenciável em um intervalo aberto.

- (a) Se  $f''(x) > 0$  em qualquer  $x$  do intervalo aberto, então  $f$  é *côncava para cima* nesse intervalo.
- (b) Se  $f''(x) < 0$  em qualquer  $x$  do intervalo aberto, então  $f$  é *côncava para baixo* nesse intervalo.

## Exemplo 4 - Identificar os intervalos de concavidade da função:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

# C - Ponto de inflexão

- ✓ O ponto de inflexão é o ponto em que uma curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa;



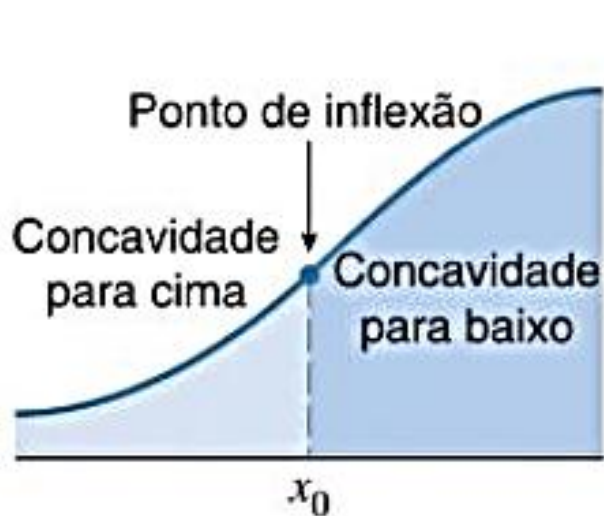
# C - Ponto de inflexão

- ✓ O ponto de inflexão é o ponto em que uma curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa;



# C - Ponto de inflexão

- ✓ O ponto de inflexão é o ponto em que uma curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa;



# Definição 5.1.5 (8<sup>a</sup> ed. Anton)

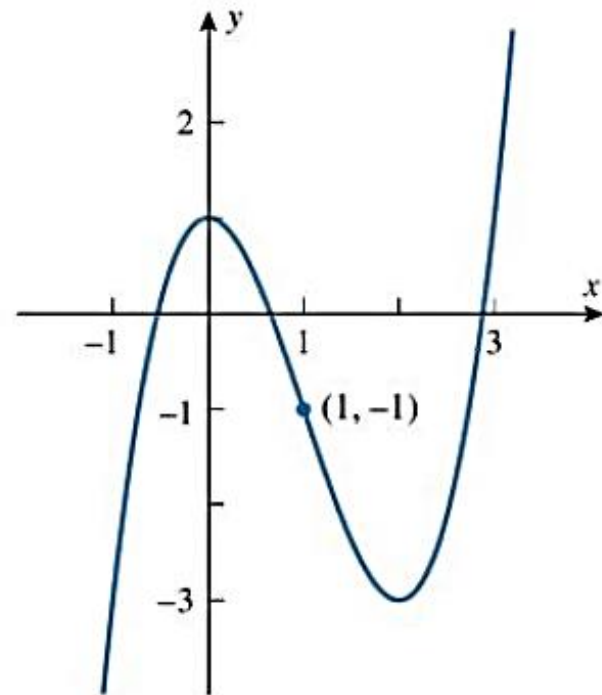
**4.1.5 DEFINIÇÃO** Se  $f$  for contínua em um intervalo aberto contendo o ponto  $x_0$  e se  $f$  mudar de concavidade no ponto  $(x_0, f(x_0))$ , então diremos que o ponto  $x_0$  do domínio, ou o ponto  $(x_0, f(x_0))$  do gráfico, é um *ponto de inflexão* de  $f$  (Figura 4.1.9).

**Exemplo 5 – Use as derivadas para determinar os intervalos de crescimento, a concavidade e os pontos de inflexão da função:**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

**Exemplo 5 – Use as derivadas para determinar os intervalos de crescimento, a concavidade e os pontos de inflexão da função:**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$



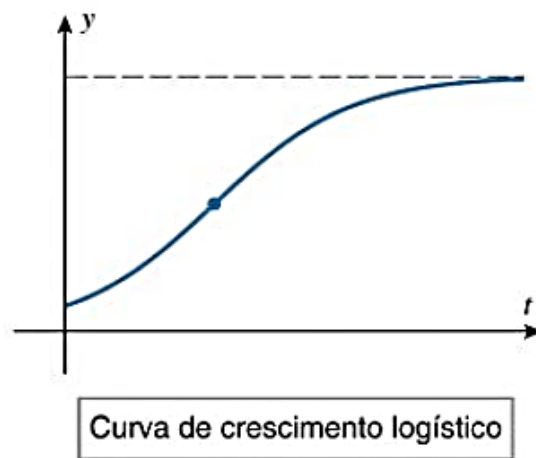
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

# D - Ponto de inflexão em aplicações

- ✓ O modelo de crescimento populacional é uma função onde há um ponto de inflexão;
- ✓ Em um ambiente no qual o espaço ou alimento é limitado, o gráfico da população *versus* tempo tem uma forma típica de S.

## D - Ponto de inflexão em aplicações

- ✓ O modelo de crescimento populacional é uma função onde há um ponto de inflexão;
- ✓ Em um ambiente no qual o espaço ou alimento é limitado, o gráfico da população *versus* tempo tem uma forma típica de S.



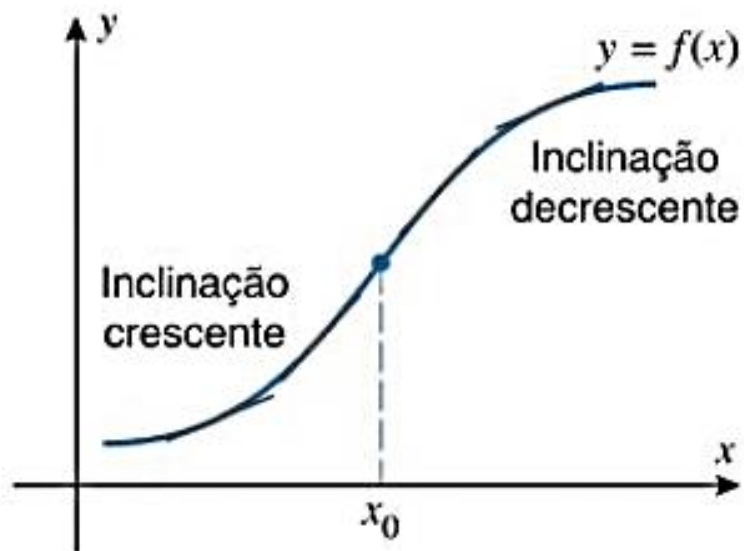
# D - Ponto de inflexão em aplicações

*Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva  $y = f(x)$  em que a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$  muda de crescente para decrescente ou vice-versa.*



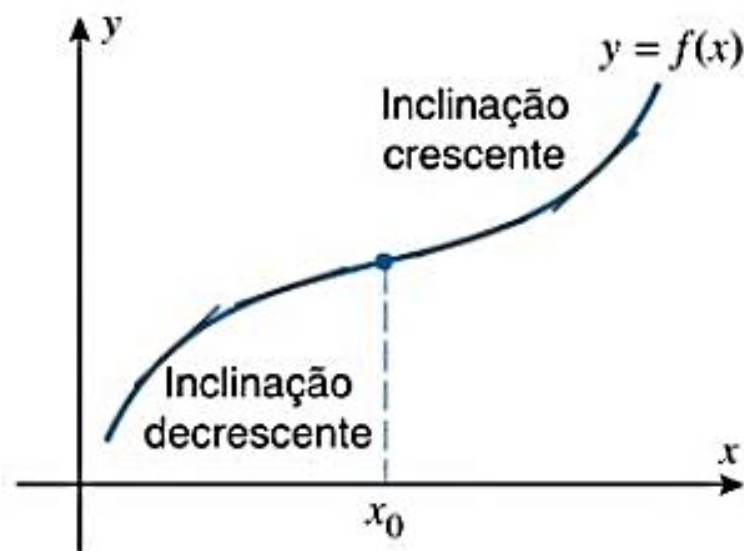
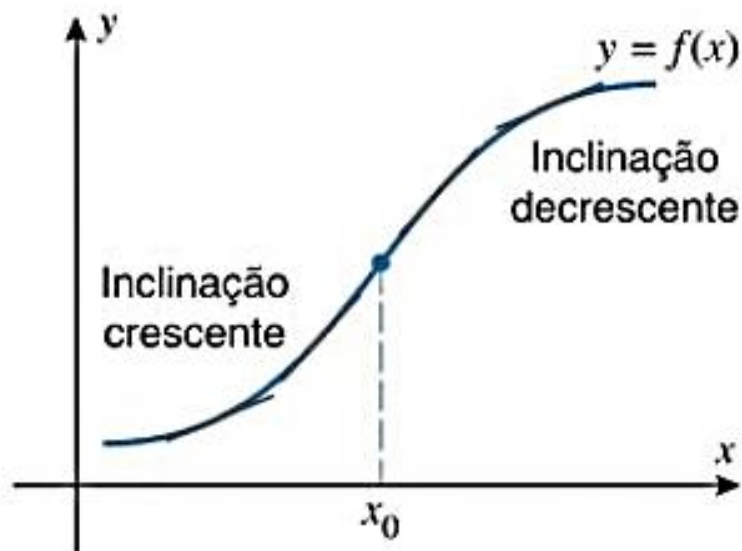
# D - Ponto de inflexão em aplicações

*Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva  $y = f(x)$  em que a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$  muda de crescente para decrescente ou vice-versa.*



# D - Ponto de inflexão em aplicações

*Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva  $y = f(x)$  em que a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$  muda de crescente para decrescente ou vice-versa.*



# Exemplo biológico

# Exemplo - Reação do organismo

A reação do organismo a uma droga pode ser representada por uma função do tipo:

$$R(D) = D^2 \left( \frac{C}{2} - \frac{D}{3} \right)$$

# Exemplo - Reação do organismo

A reação do organismo a uma droga pode ser representada por uma função do tipo:

$$R(D) = D^2 \left( \frac{C}{2} - \frac{D}{3} \right)$$

**R**: Reação (temperatura, pressão etc.);

**C**: Quantidade máxima que pode ser administrada;

**D**: Quantidade usada ( $0 \leq D \leq C$ ).

**Domínio biológico**: intervalo  $[0, C]$

# Exemplo (Gráfico)

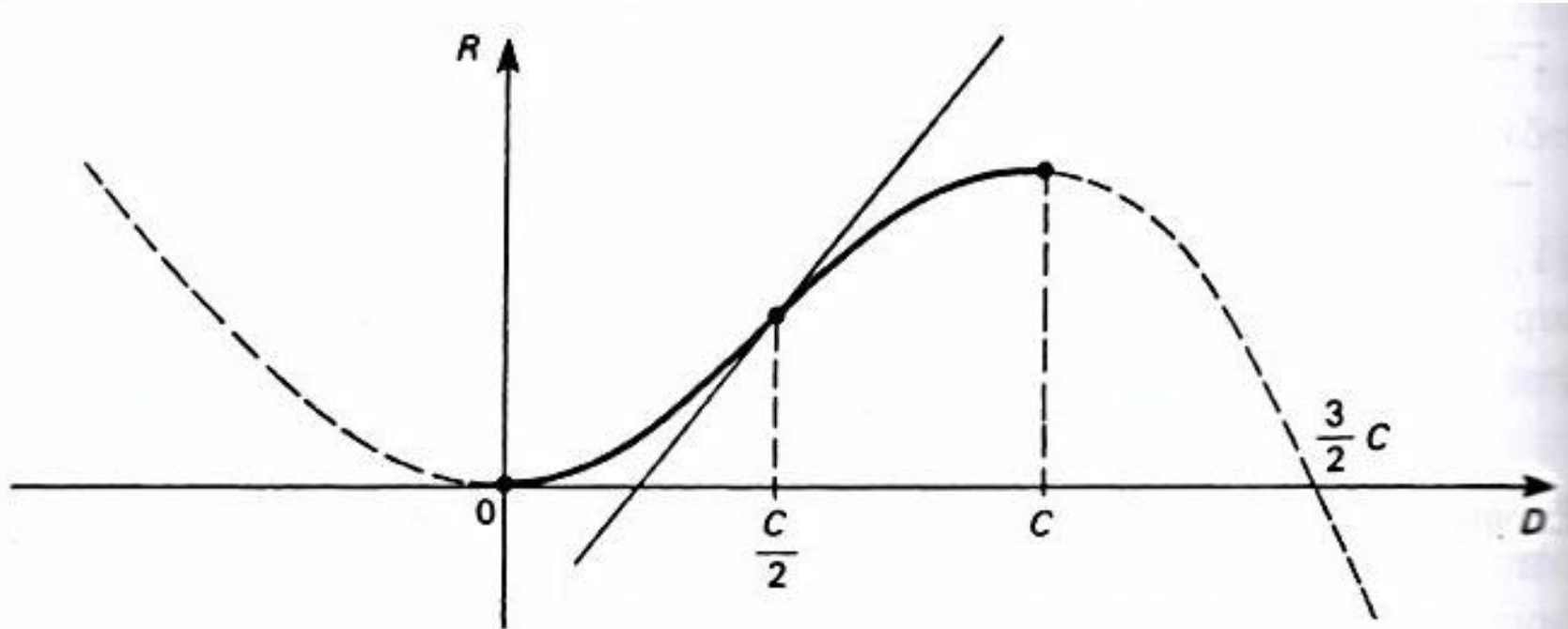


Figura 4.17 Intensidade de reação do organismo a uma droga.

Sensibilidade cresce até  $D = C/2$

E decresce até atingir  $D = C$

This page contains handwritten mathematical notes and diagrams. At the top, there are several equations involving variables like  $x$ ,  $y$ , and  $z$ , possibly related to a coordinate system or a specific problem.

The middle section features a large, complex diagram that appears to be a 3D representation of a surface or a set of intersecting planes. It includes various lines, curves, and shaded regions, with labels in Hindi.

Below the main diagram, there are several smaller diagrams and equations. On the left, there are circular diagrams with points and lines, possibly representing a sphere or a circle in a coordinate system. On the right, there are more equations and a smaller diagram.

The text is written in Hindi and includes mathematical symbols and formulas. Some of the visible text includes:

- Top left:  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Top right:  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Middle left:  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Middle right:  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Bottom left:  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Bottom right:  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

The overall content seems to be a detailed mathematical derivation or a geometric proof, likely related to a problem involving spheres, planes, or surfaces in a 3D space.

# Para depois desta aula:

- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no [site](#));

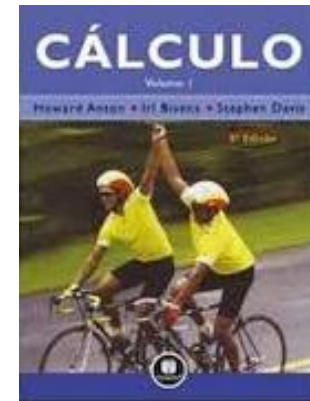


# Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

**Figuras.** ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



# Contatos e material de apoio

[profhenriquefaria.com](http://profhenriquefaria.com)



[henrique.faria@unesp.br](mailto:henrique.faria@unesp.br)