Cálculo I

Engenharia

Aula 04
Famílias de Funções

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

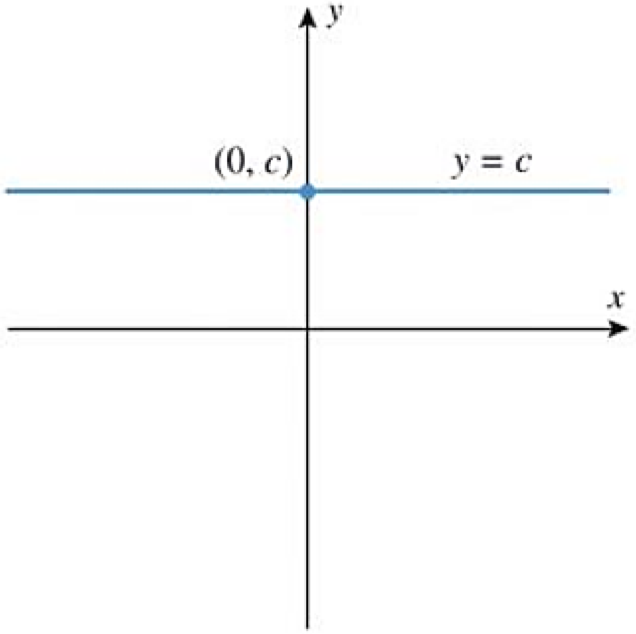
henrique.faria@unesp.br

Agrupamento de funções em famílias

- ✓ Estudar formas gráficas semelhantes;
- ✓ Reconhecer propriedades comuns;
- ✓ Tornar o estudo sintético de um grande número de funções

Função constante $f(x) = c \quad c \in \mathbb{R}$

- Reta horizontal → variando c

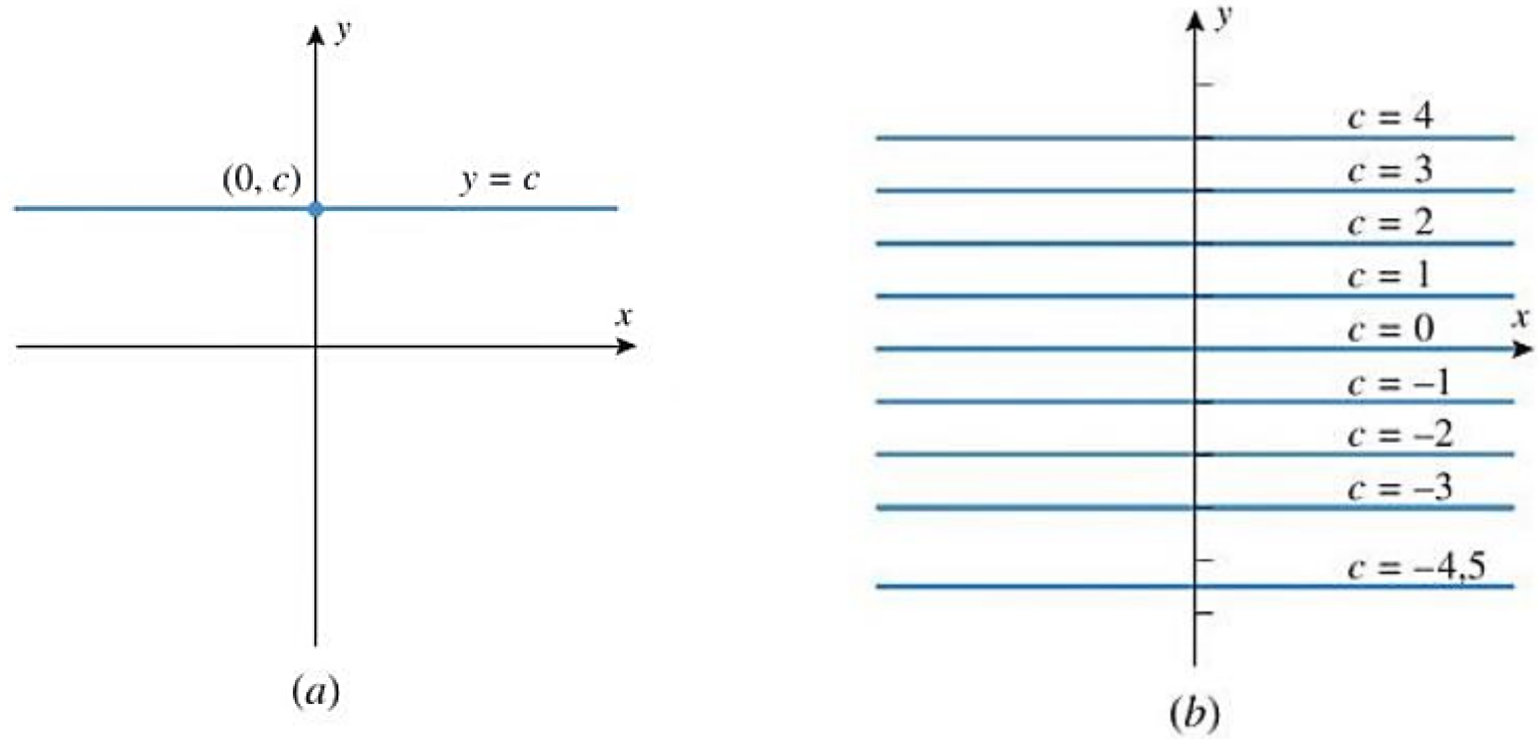


(a)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Função constante $f(x) = c \quad c \in \mathbb{R}$

- Reta horizontal $\rightarrow$ variando *c* (parâmetro)



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

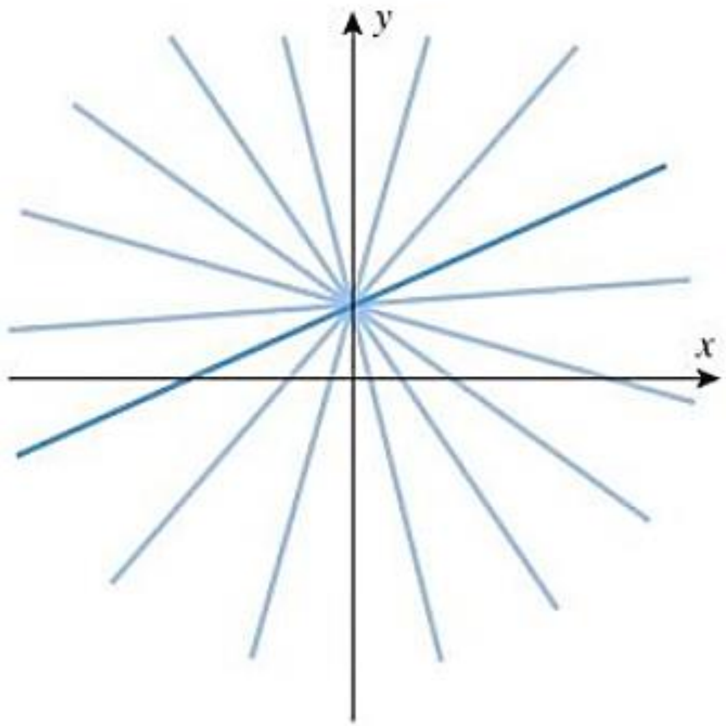
Função linear $f(x) = mx + b \quad b \in \mathbb{R}$

- Reta de inclinação $\boldsymbol{m}$ e corte $\boldsymbol{b}$

Função linear $f(x) = mx + b \quad b \in \mathbb{R}$

- Reta de inclinação $\boldsymbol{m}$ e corte $\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{b}$ fixo e $\boldsymbol{m}$ o parâmetro

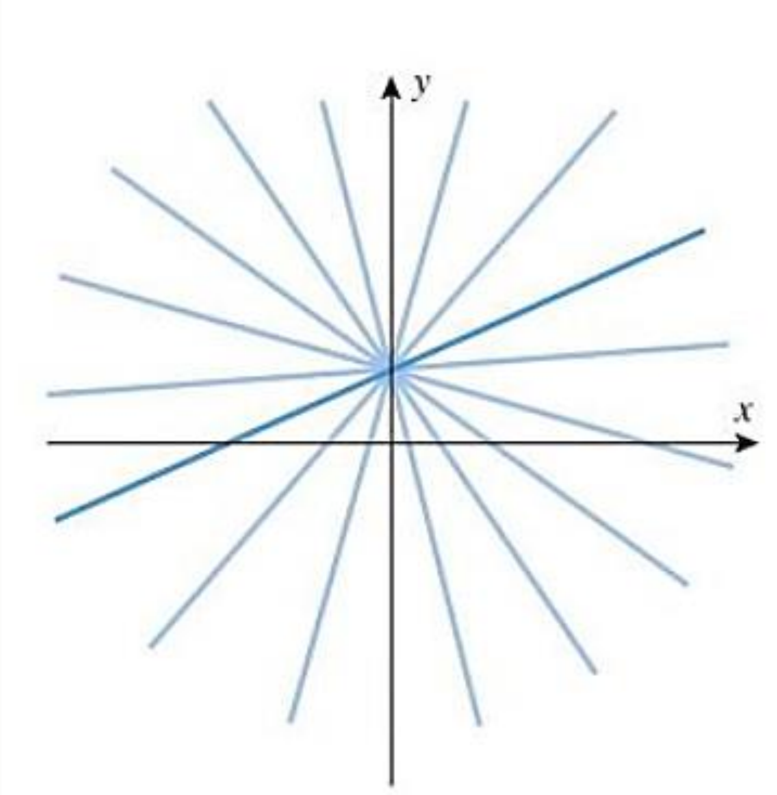


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

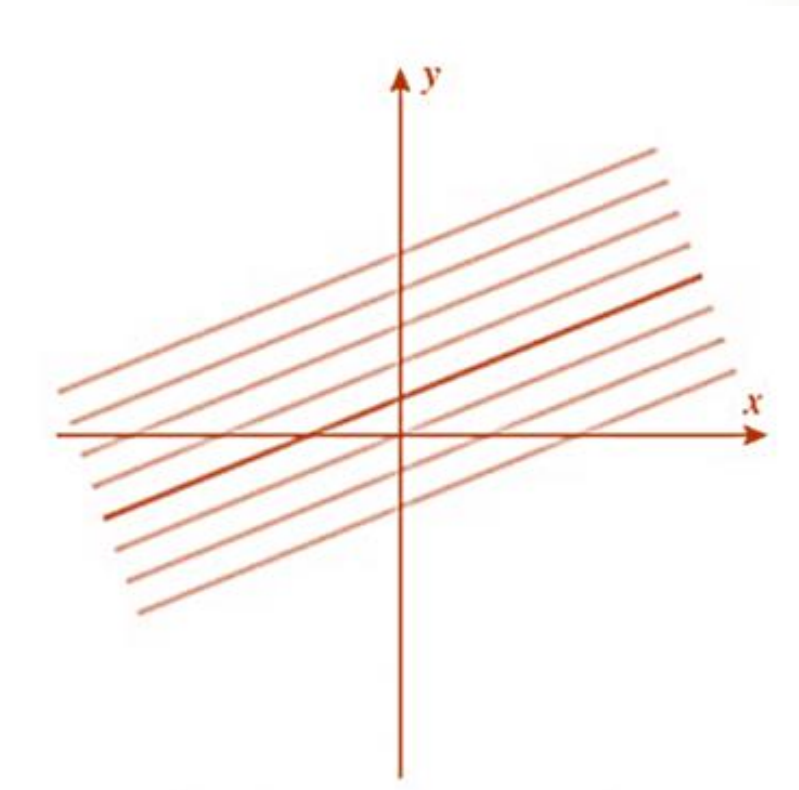
Função linear $f(x) = mx + b \quad b \in \mathbb{R}$

- Reta de inclinação $\boldsymbol{m}$ e corte $\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{b}$ fixo e $\boldsymbol{m}$ o parâmetro



$\boldsymbol{m}$ fixo e $\boldsymbol{b}$ o parâmetro



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

À medida que o ar seco se move para cima, ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for de 20°C e a temperatura a uma altura de 1 km for de 10°C.

(a) Expresse a temperatura (em °C) como uma função da altura h (em km), supondo que um modelo linear seja apropriado;

(b) Esboce o gráfico para a função obtida na parte (a);

(c) Qual é a temperatura a 2,5 km de altura?

Fonte: Bizzeli e Barroso, 2009

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

- **Função potência**: $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \dots$

➢ **Função potência**: $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

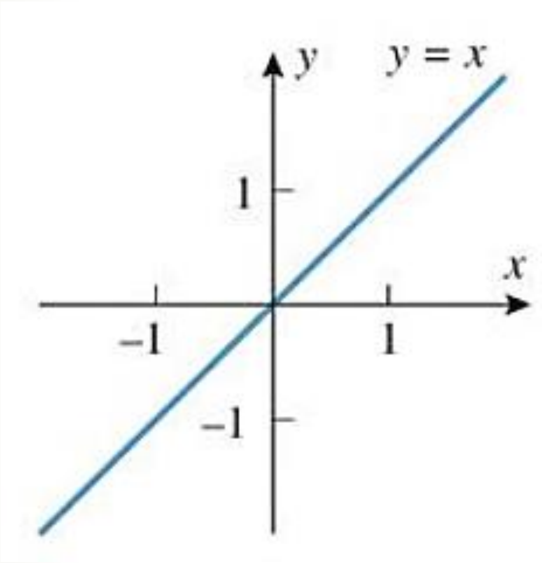
Se $\boldsymbol{n}$ ímpar:

- As funções são ímpares (simétricas pela origem);
- O gráfico passa pelos pontos $(1, 1)$e $(-1, -1)$;
- Quando $\boldsymbol{n}$ cresce, gráfico se achata entre $[-1, 1]$;
- E será mais vertical para $x > 1$ e $x < -1$.

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

- **Função potência**: $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

Se $\boldsymbol{n}$ ímpar

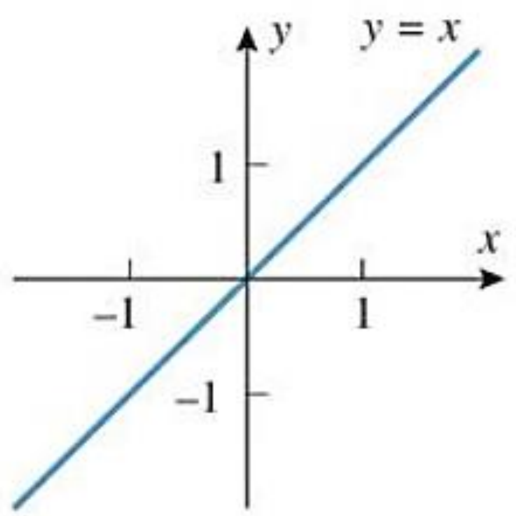


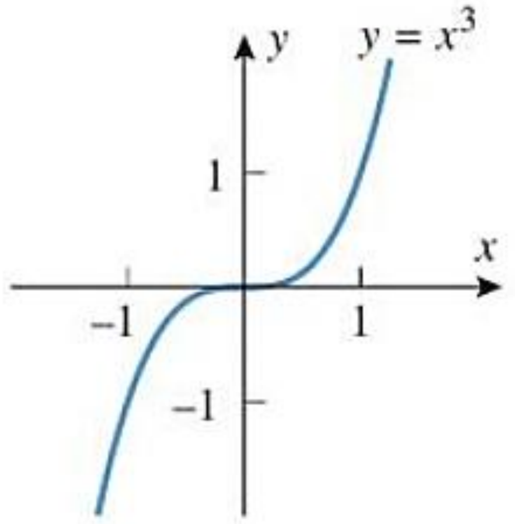
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

- **Função potência**: $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

Se ***n*** ímpar



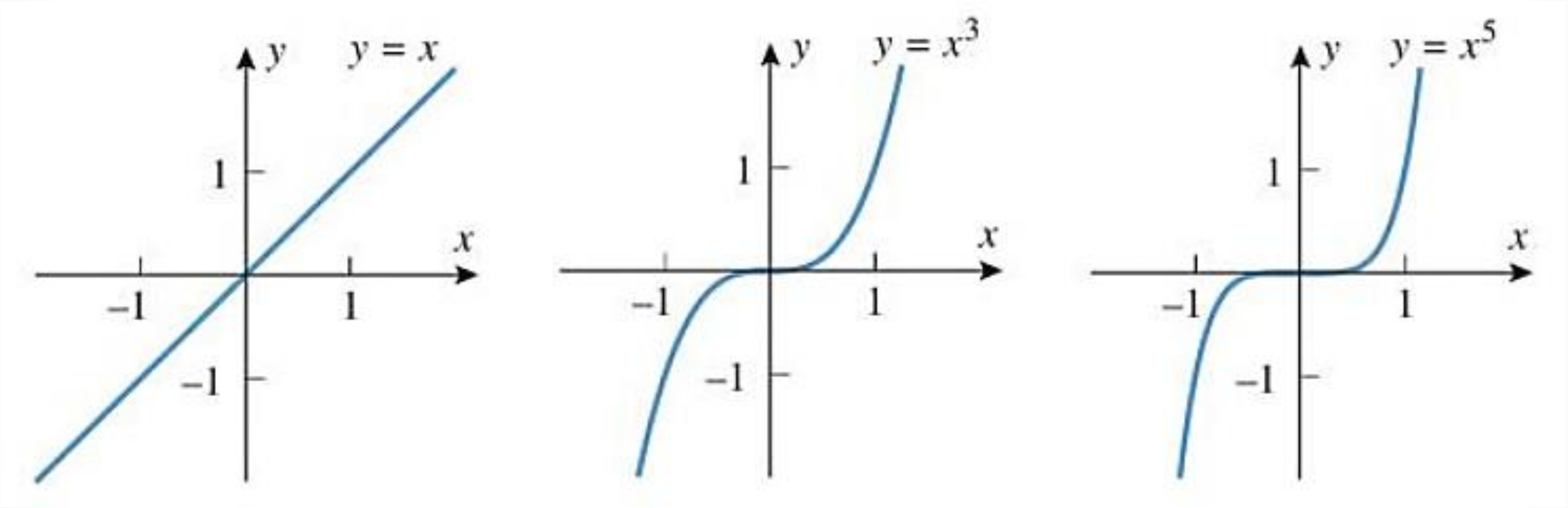


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

- **Função potência**: $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

Se $\boldsymbol{n}$ ímpar



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

- **Função potência**: $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

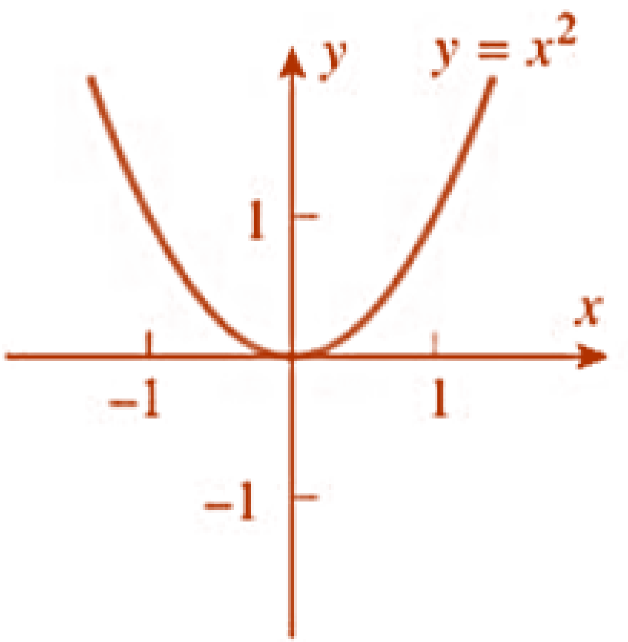
Se $\boldsymbol{n}$ par:

- As funções são pares (simétricas pela eixo y);
- O gráfico passa pelos pontos $(-1, 1)$e $(1, 1)$;
- Quando $\boldsymbol{n}$ cresce, gráfico se achata entre $[-1, 1]$;
- E será mais vertical para $x > 1$ e $x < -1$.

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

- **Função potência**: $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

Se $\boldsymbol{n}$ par

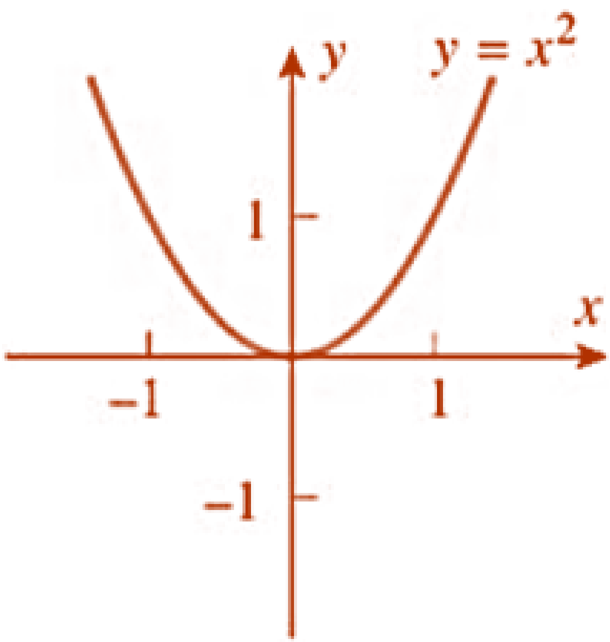


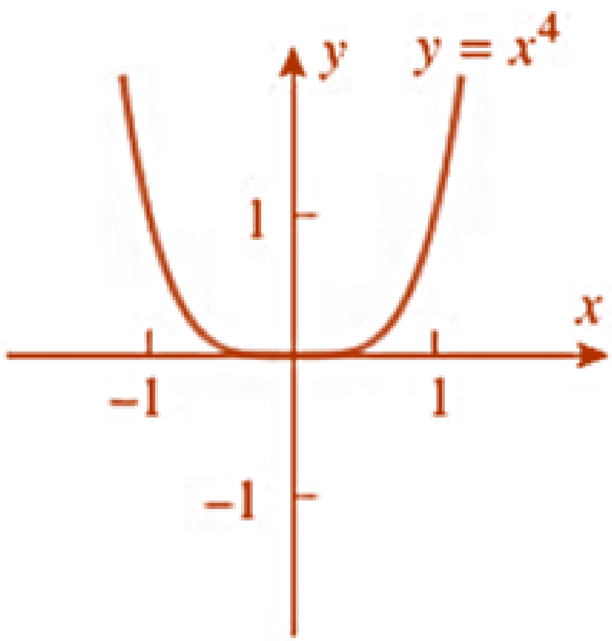
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

- **Função potência**: $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

Se $\boldsymbol{n}$ par

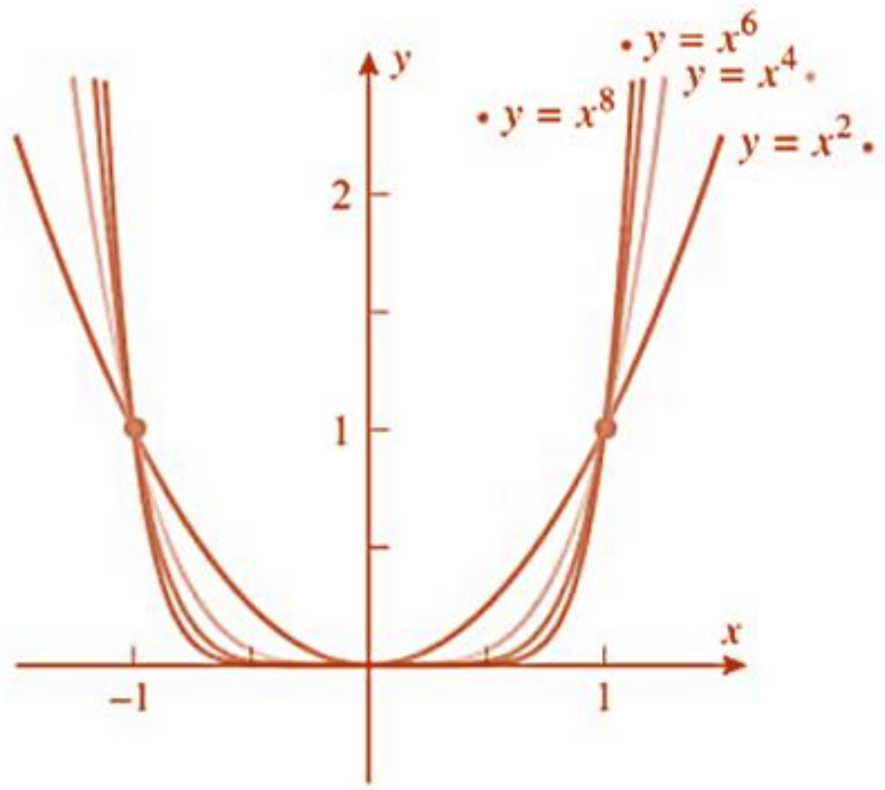




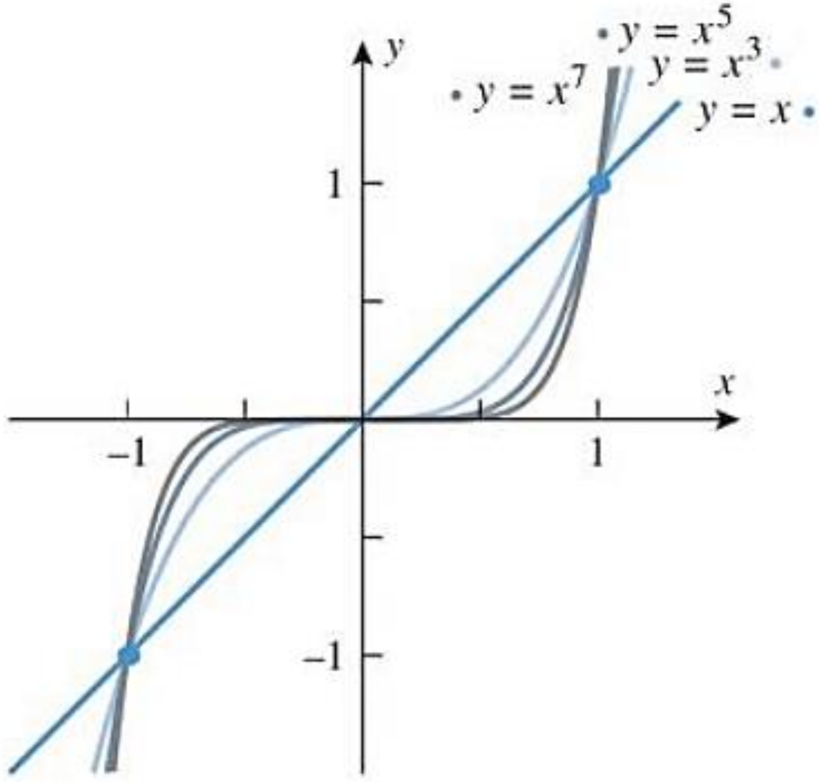
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

n par



n ímpar



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família $y = f(x) = x^{-n}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

- Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Se $\boldsymbol{n}$ ímpar:

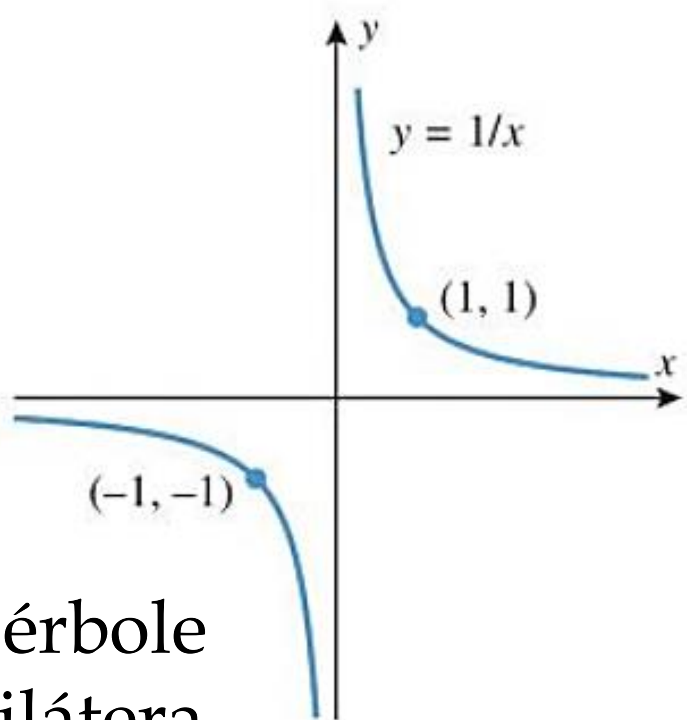
- As funções são ímpares (simétricas pela origem);
- O gráfico passa pelos pontos $(1, 1)$e $(-1, -1)$;
- Se $\boldsymbol{n}$ cresce, gráfico se achata em $x > 1$ e $x < -1$;
- E será mais vertical para:

  $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$;
- Gráfico tem quebra (descontinuidade) em $x = 0$.

Família $y = f(x) = x^{-n}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

- Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Se $\boldsymbol{n}$ ímpar:



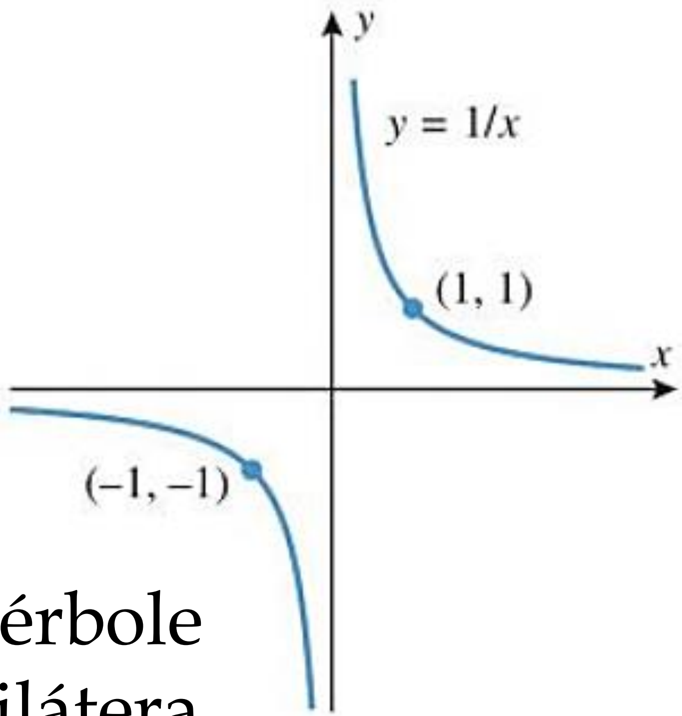
Hipérbole equilátera

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

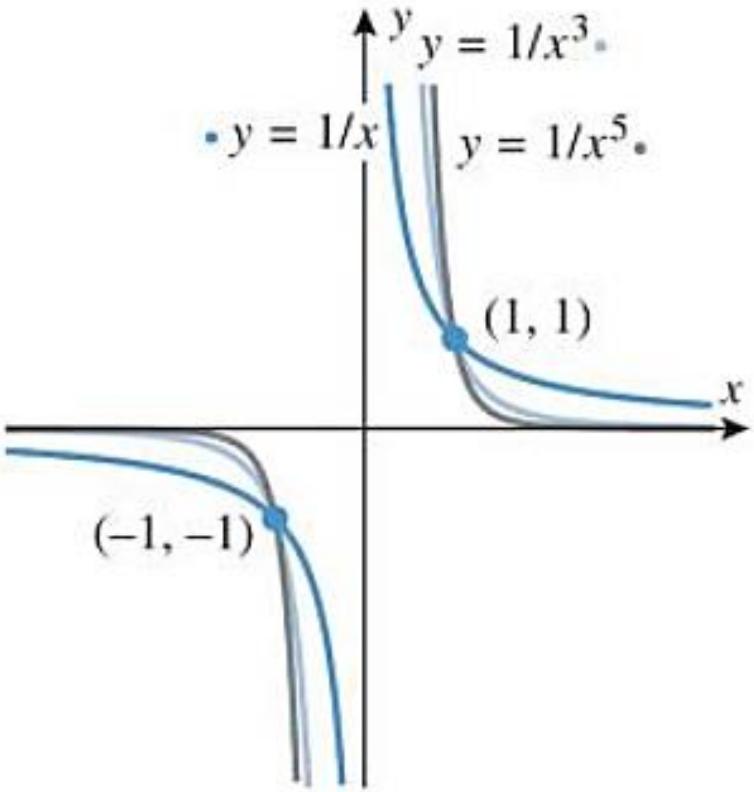
Família $y = f(x) = x^{-n}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

- Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Se $\boldsymbol{n}$ ímpar:



Hipérbole equilátera



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família $y = f(x) = x^{-n} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

➢ Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Se $\boldsymbol{n}$ par:

- As funções são pares (simétricas pelo eixo y);
- O gráfico passa pelos pontos $(-1, 1)$e $(1, 1)$;
- Se $\boldsymbol{n}$ cresce, gráfico se achata em $x > 1$ e $x < -1$;
- E será mais vertical para:

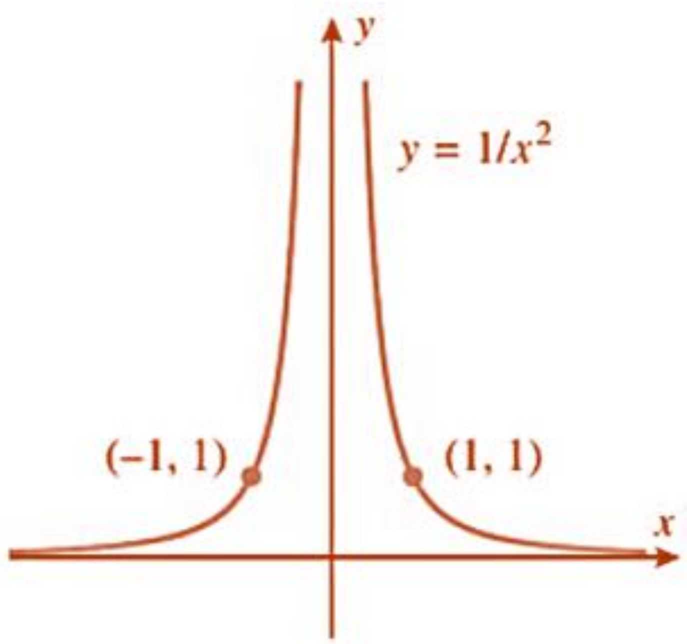
$-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$;

- Gráfico tem quebra (descontinuidade) em $x = 0$.

Família $y = f(x) = x^{-n}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

- Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Se $\boldsymbol{n}$ par:

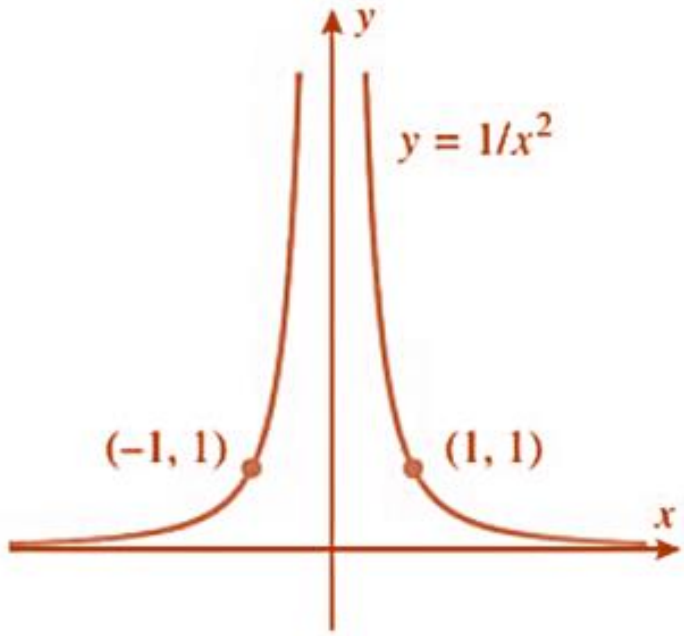


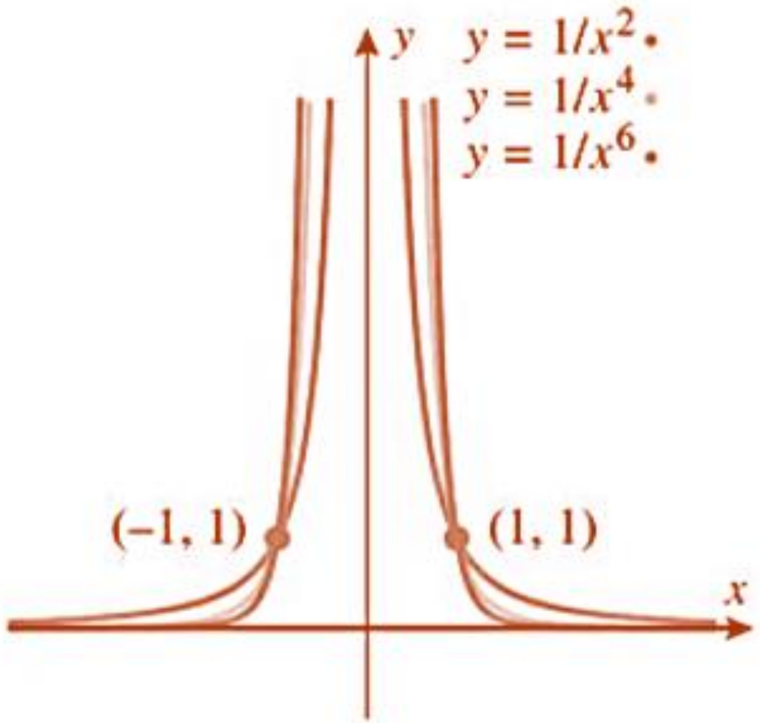
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família $y = f(x) = x^{-n}$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

- Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Se ***n*** par:





Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

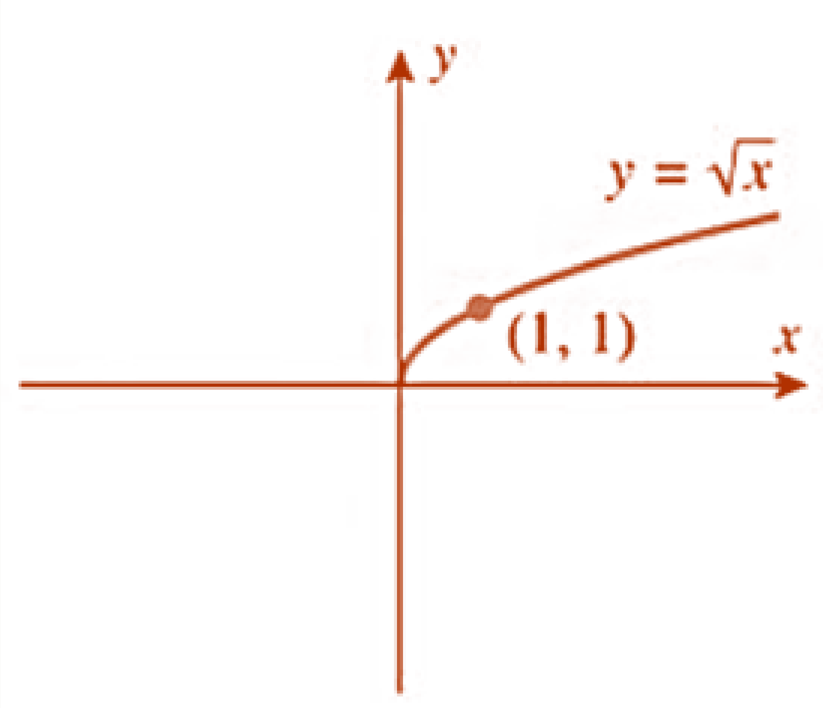
Funções potência com expoente não inteiros $y = f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Funções potência com expoente não inteiros $y = f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

Se $\boldsymbol{n}$ par:

Domínio: $[0, +\infty)$

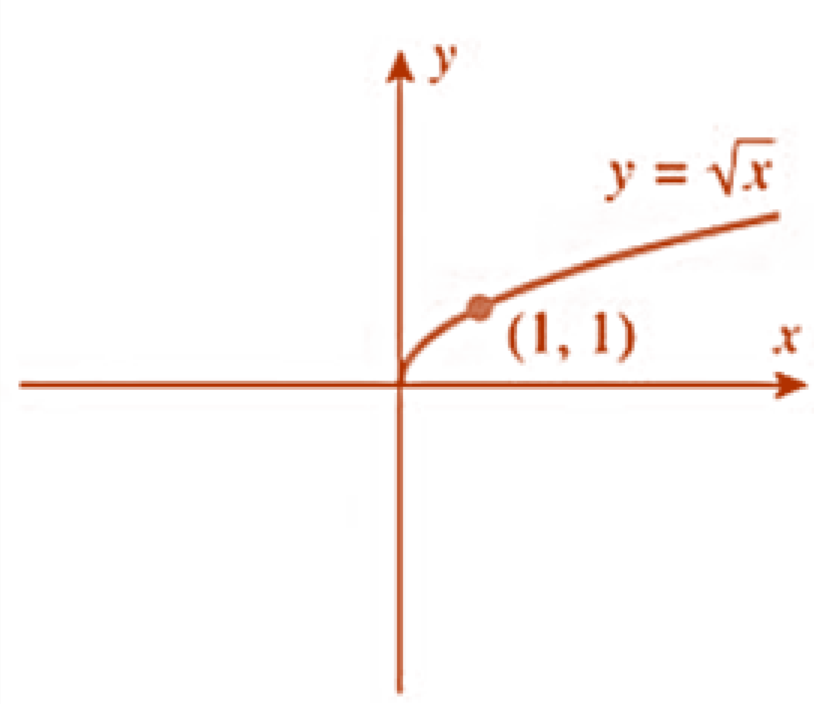


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Funções potência com expoente não inteiros $y = f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$

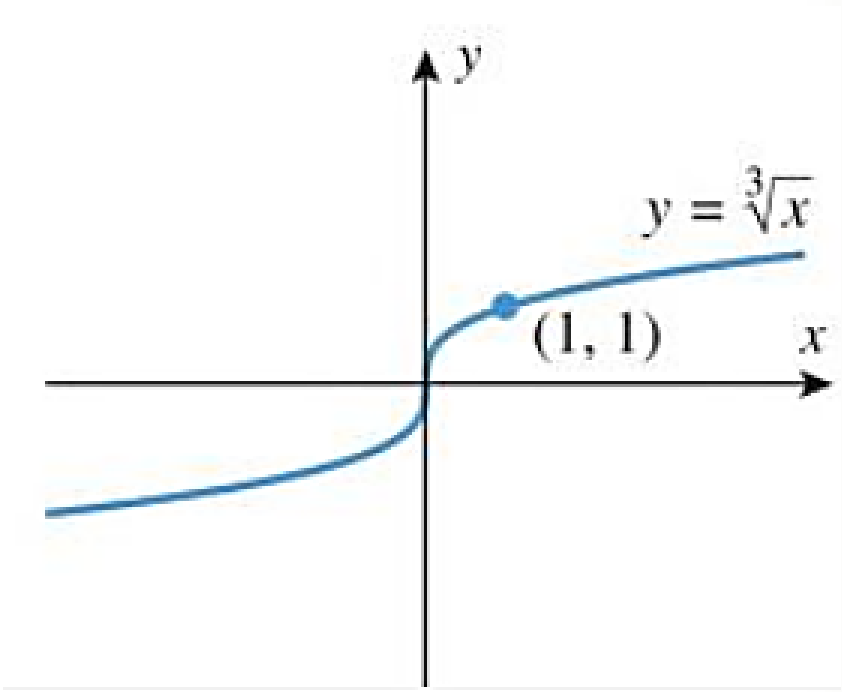
Se $\boldsymbol{n}$ par:

Domínio: $[0, +\infty)$



Se $\boldsymbol{n}$ ímpar:

Domínio: $(-\infty, +\infty)$



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Polinômios $f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_1 x + C_0$

Em que: $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ são os coeficientes.

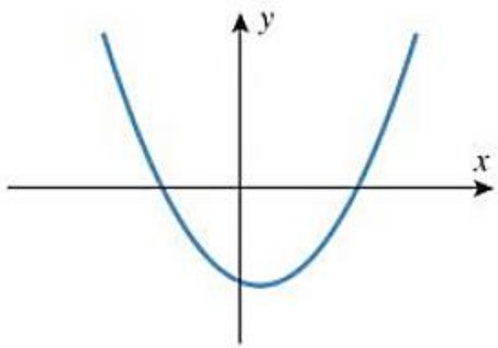
Polinômios $f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_1 x + C_0$

Em que: $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n$ são os coeficientes.

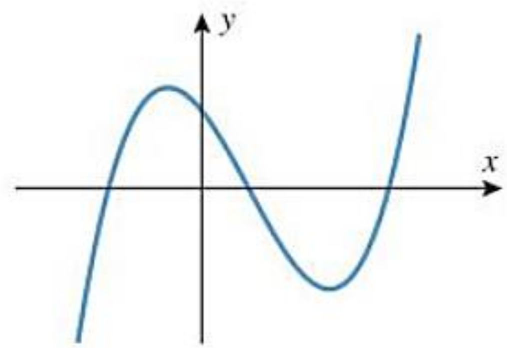
- A **mais alta potência** com um coeficiente não nulo é denominada **grau** do polinômio;
- O polinômio de **grau um** é chamado **linear**;
- O de **grau dois quadrático**;
- Domínio natural: $(-\infty, +\infty)$;
- Não possuem descontinuidade e bicos agudos.

Polinômios $f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_1 x + C_0$

O número de picos e vales é determinado pelo grau.



Grau 2

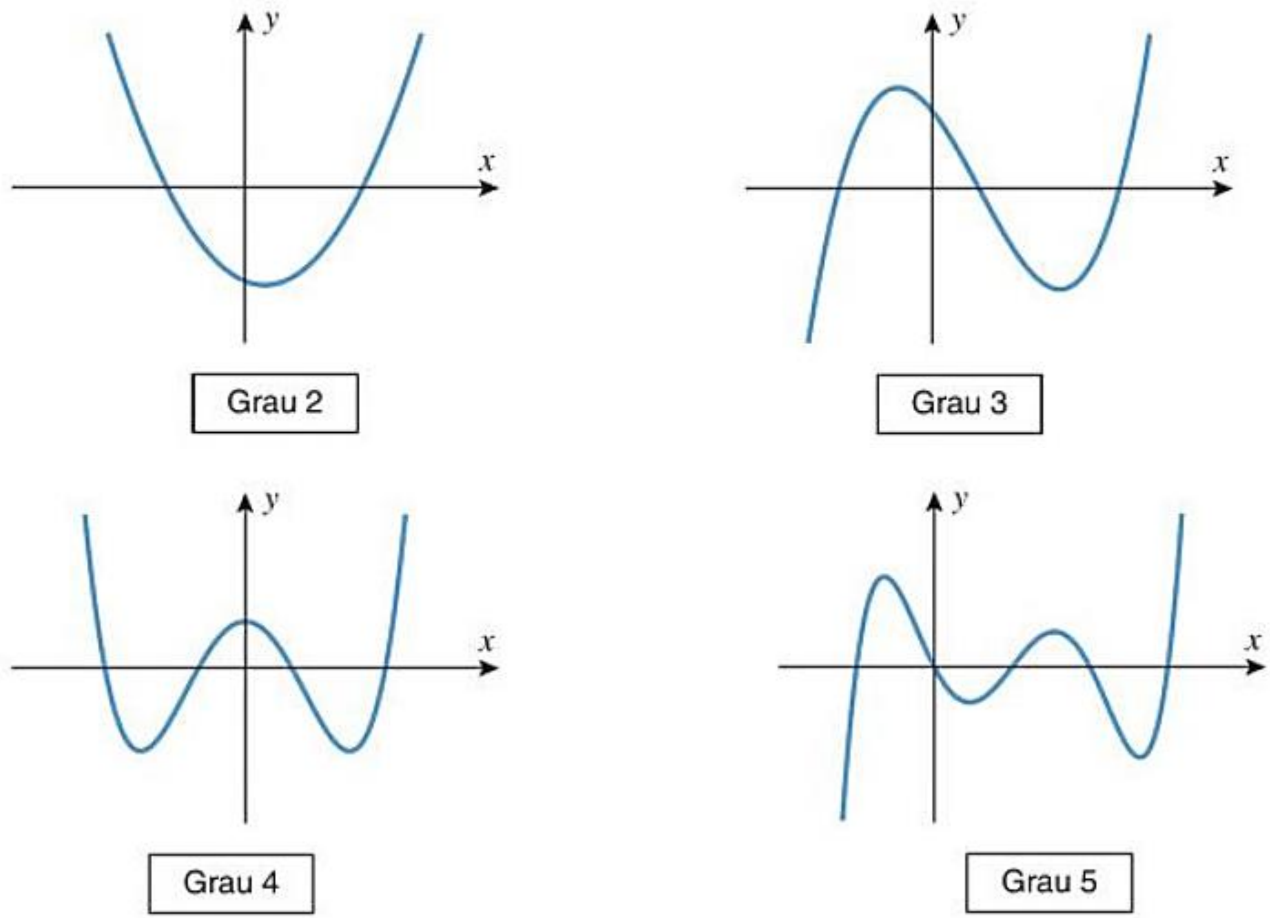


Grau 3

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Polinômios $f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_1 x + C_0$

O número de picos e vales é determinado pelo grau.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

Esboçar o gráfico de: $f(x) = x^3 - x$

Exercícios

Esboçar o gráfico de:

a) $f(x) = 2x^3 - 8x$ b) $f(x) = -3(x-2)^2$

Funções racionais $\quad f(\mathbf{x}) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Em que: $P(x)\ e\ Q(x)\ são\ polinômios.$

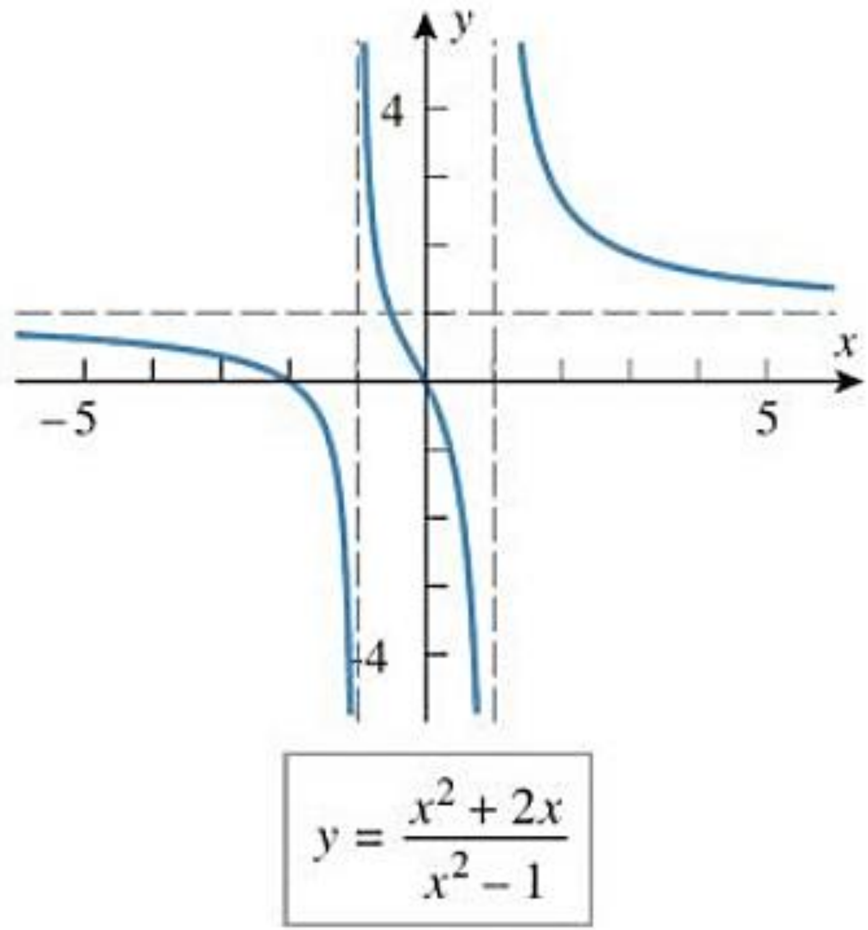
Funções racionais $\boldsymbol{f(\mathbf{x}) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}}$

Em que: $P(x)\ e\ Q(x)\ são\ polinômios.$

- Domínio: $x \in \mathbb{R},\ tal\ que\ Q(x) \neq 0$
- Possuem descontinuidade onde $Q(x) = 0$;
- O gráfico se aproxima de retas verticais (**assíntotas verticais**) nos pontos em que $f(x)$ não está definida;
- O gráfico pode começar ou terminar em retas horizontais (**assíntotas horizontais**).

Funções racionais

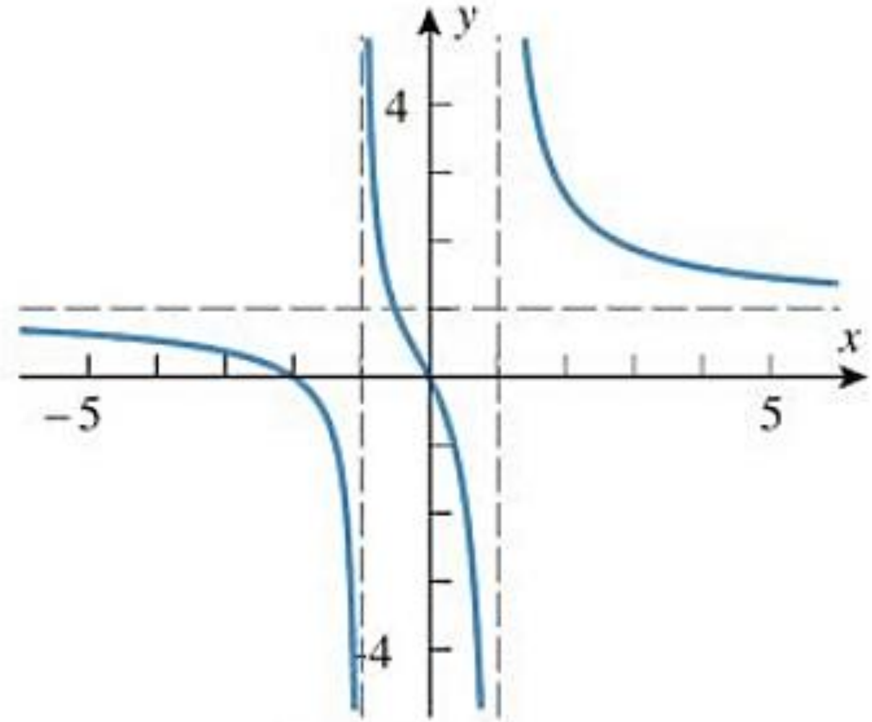
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$



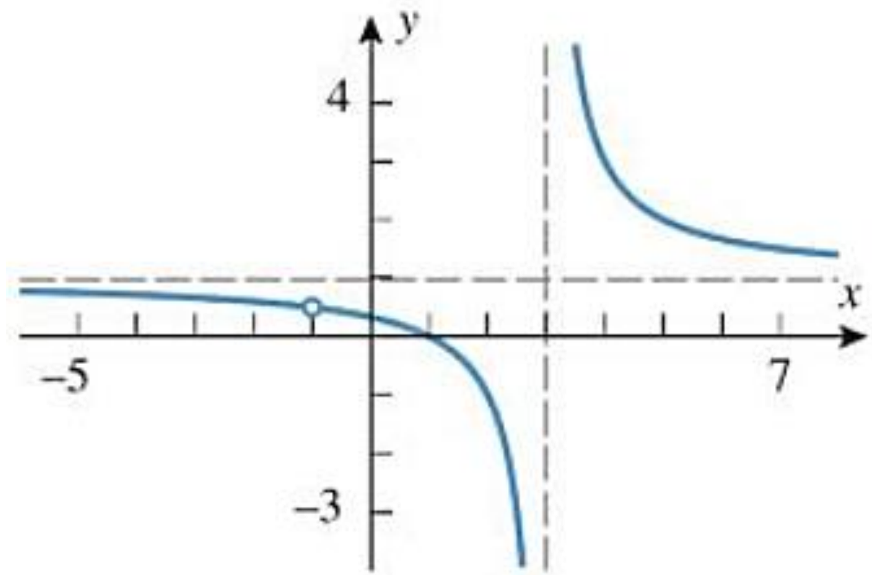
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Funções racionais

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$



$$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$



$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

Esboçar o gráfico de: $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$

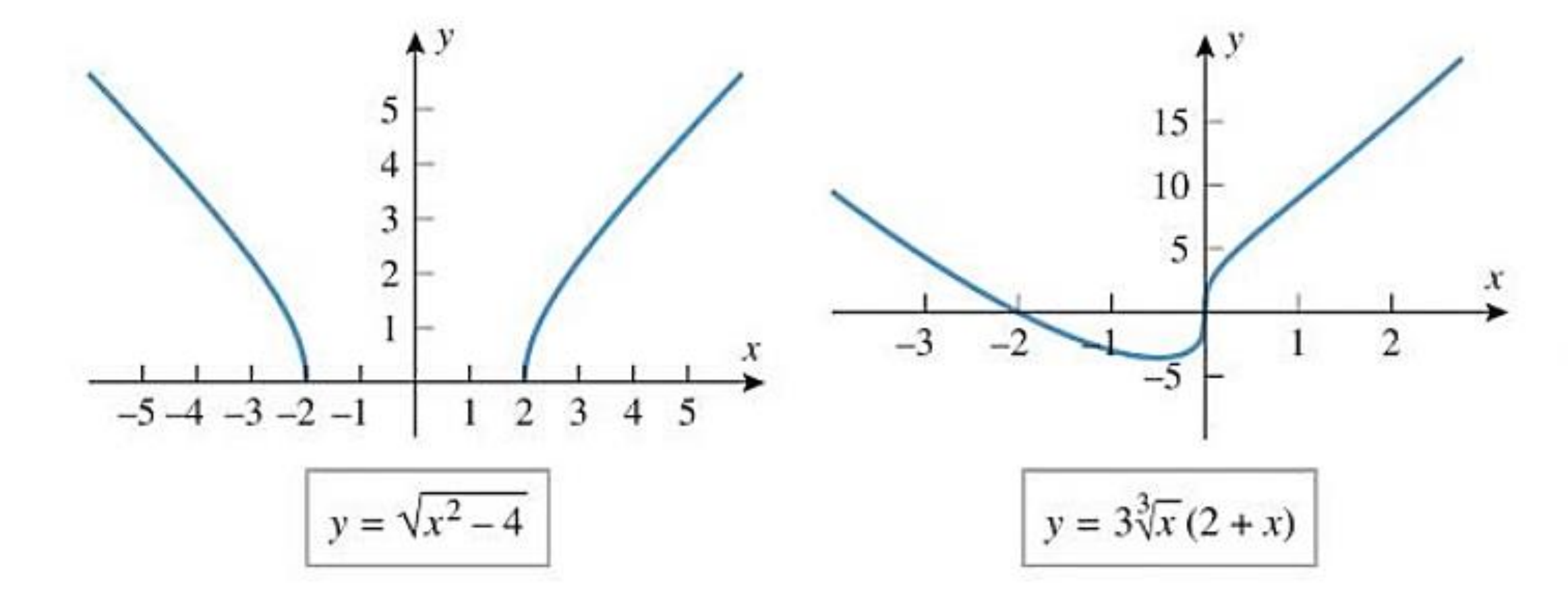
Funções algébricas

- Construídas com polinômios e operações como: adição, subtração, divisão e raízes

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Funções algébricas

- Construídas com polinômios e operações como: adição, subtração, divisão e raízes
- Os gráficos variam amplamente.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aula 04
Famílias seno e cosseno

Família $y = Asen(Bx - C)$ $y = Acos(Bx - C)$

- A, B e C são constantes não nulas.

Família $y = Asen(Bx - C)$ $y = Acos(Bx - C)$

- A, B e C são constantes não nulas.

Caso em que $\boldsymbol{C = 0}$ com $\boldsymbol{A > 0}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{B > 0}$

- $\boldsymbol{A}$ alonga ou comprime verticalmente o gráfico;
- $\boldsymbol{B}$ alonga ou comprime horizontalmente o gráfico;

Família $y = Asen(Bx - C)$ $y = Acos(Bx - C)$

- A, B e C são constantes não nulas.

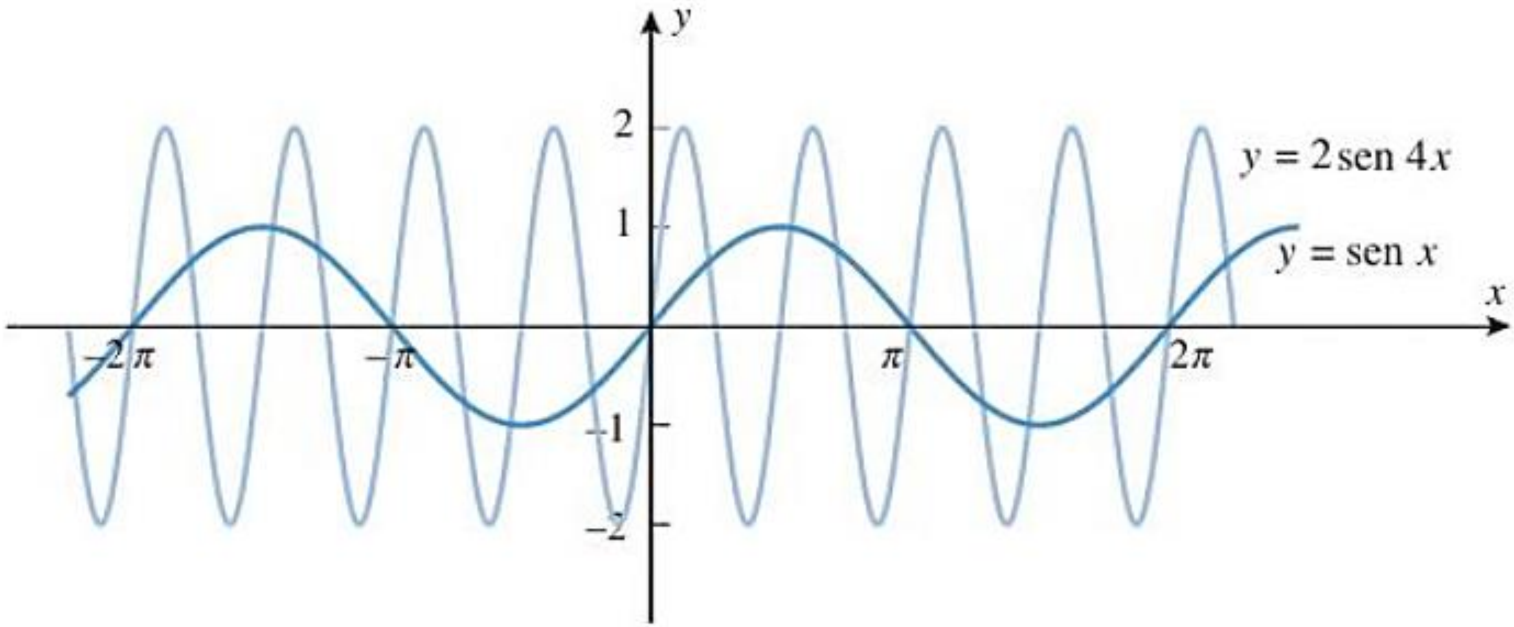
Caso em que $\boldsymbol{C = 0}$ com $\boldsymbol{A > 0}$ ***e*** $\boldsymbol{B > 0}$

- $\boldsymbol{A}$ alonga ou comprime verticalmente o gráfico;
- $\boldsymbol{B}$ alonga ou comprime horizontalmente o gráfico;
- As funções oscilam entre $\boldsymbol{-A}$ ***e*** $\boldsymbol{A}$. (**Amplitude** $|\boldsymbol{A}|$);
- O gráfico se repete a cada $\frac{2\pi}{B}$. (**Período** $T = \frac{2\pi}{|B|}$);
- A **frequência** será: $f = \frac{1}{T} = \frac{|B|}{2\pi}$

Prof. Henrique A M Faria

Família $y = Asen(Bx - C)$ $y = Acos(Bx - C)$

- $y = Asen(Bx)$.



Amplitude: $A = 2$; Período: $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

Frequência: $f = \frac{1}{T} = \frac{2}{\pi}$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

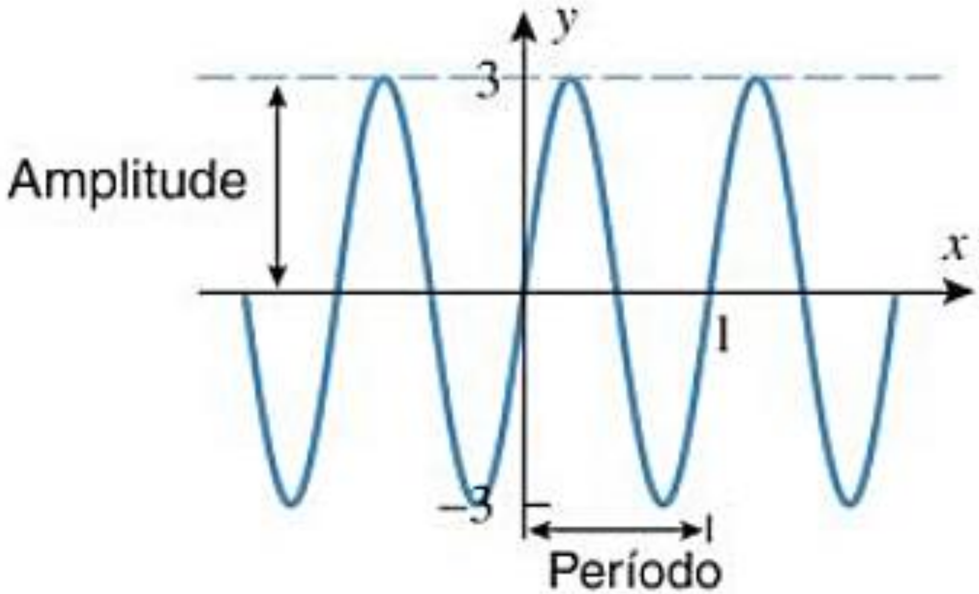
Exemplo

Esboçar o gráfico e mostrar o período e amplitude.

(a) $y = 3sen(2\pi x)$

Exemplo - solução

(a) $y = 3sen(2\pi x)$



(a)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

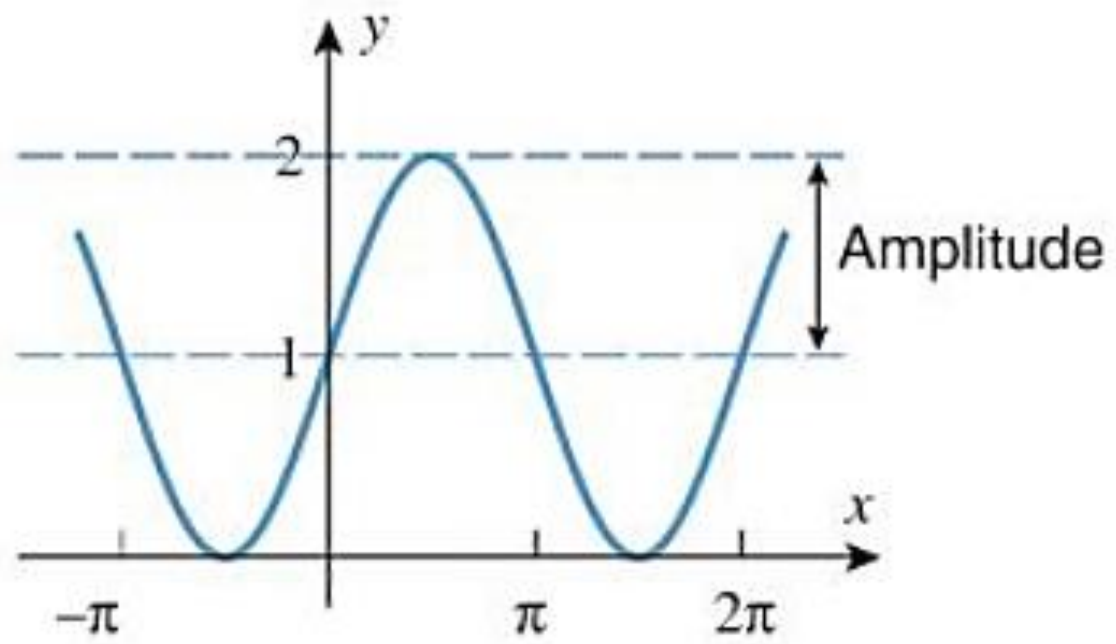
Exercício

Esboçar o gráfico e mostrar o período e amplitude.

(b) $y = 1 + senx$

Exercício - solução

(b) $y = 1 + senx$



(c)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família $y = Asen(Bx - C)$ $y = Acos(Bx - C)$

Caso em que $\boldsymbol{C \neq 0}$ com $\boldsymbol{A > 0}$ ***e*** $\boldsymbol{B > 0}$;

- **Escrever na forma:**

$$y = Asen\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right] \quad \text{e} \quad y = Acos\left[B\left(x - \frac{C}{B}\right)\right]$$

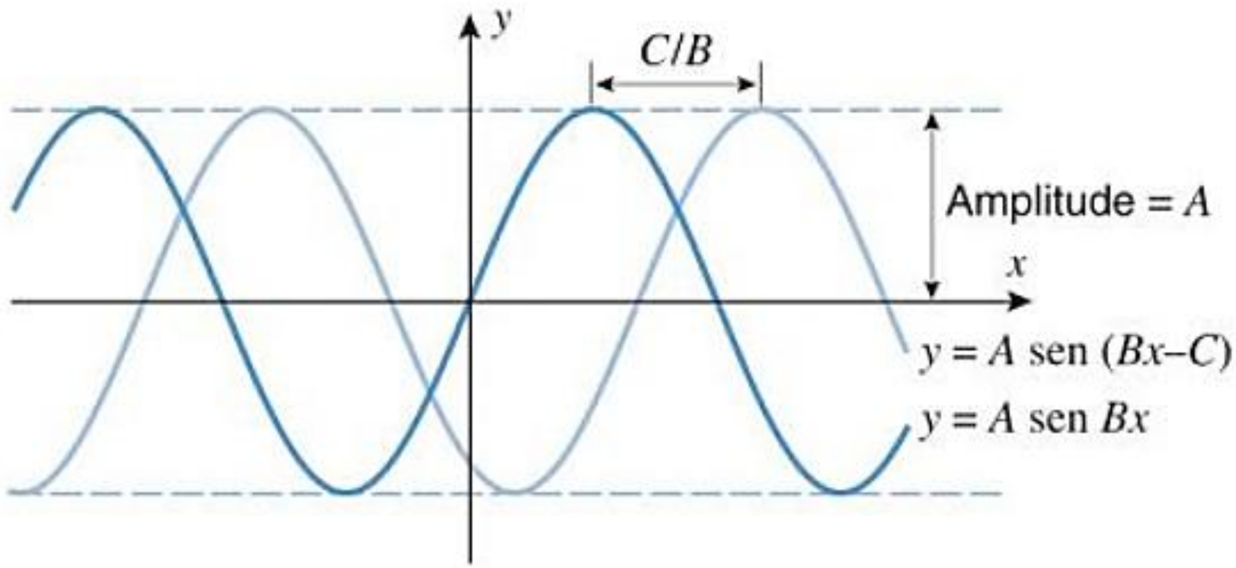
- Os gráficos são trasladados horizontalmente;

➢ Se $\frac{C}{B} > 0$ trasladar $y = Asen(Bx)$ p/ direita;

➢ Se $\frac{C}{B} < 0$ trasladar $y = Asen(Bx)$ p/ esquerda;

Família $y = Asen(Bx - C)$ $y = Acos(Bx - C)$

Caso em que $\frac{C}{B} > 0$



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

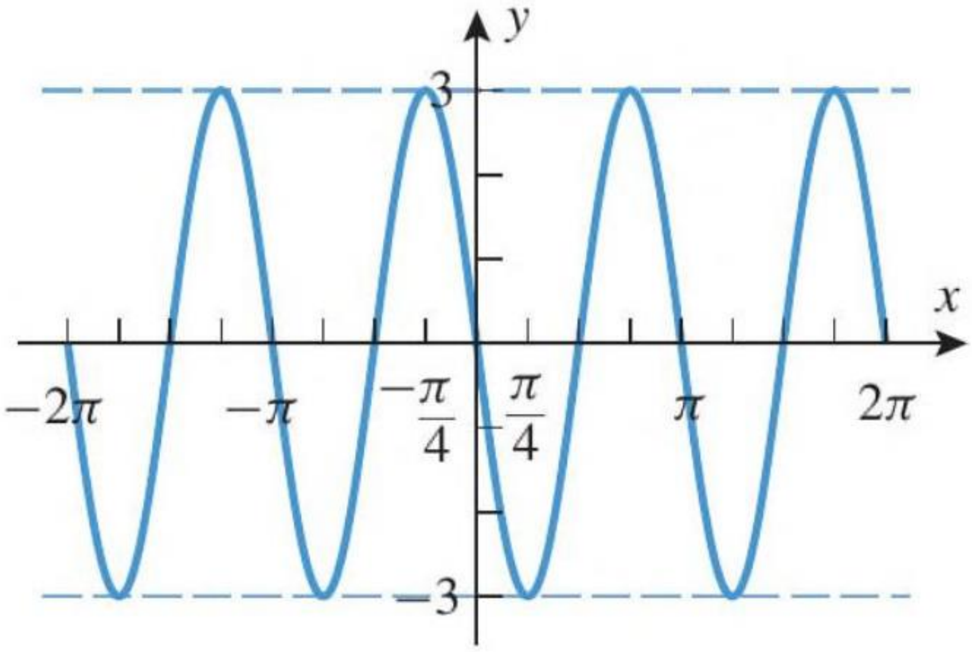
Exercício

Encontrar o período, a amplitude e a translação.

(a) $y = 3cos(2x + \frac{\pi}{2})$

Exercício - solução

(c) $y = 3cos(2x + \frac{\pi}{2})$



Para depois desta aula:

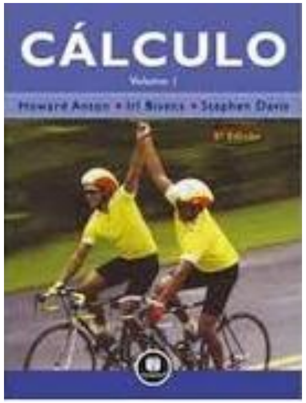
- Reler o capítulo do livro texto (Howard);
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Realizar a lista de exercícios (baixar no site);

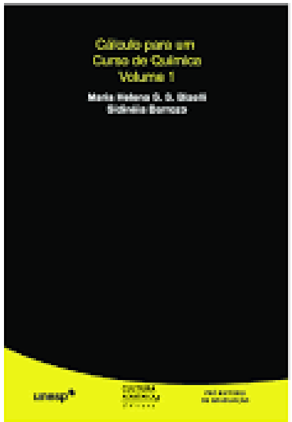
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br