

Cálculo I

Engenharia

Aula 04

Famílias de Funções

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

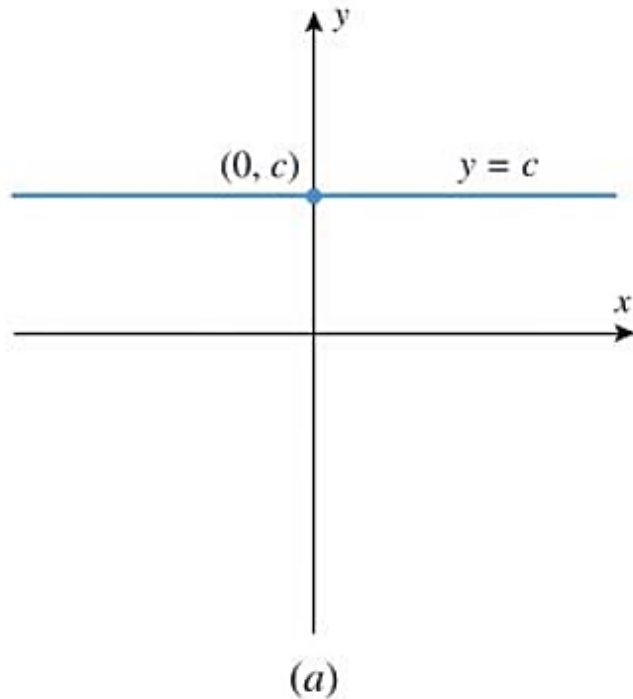
henrique.faria@unesp.br

Agrupamento de funções em famílias

- ✓ Estudar formas gráficas semelhantes;
- ✓ Reconhecer propriedades comuns;
- ✓ Tornar o estudo sintético de um grande número de funções

Função constante $f(x) = c \quad c \in \mathbb{R}$

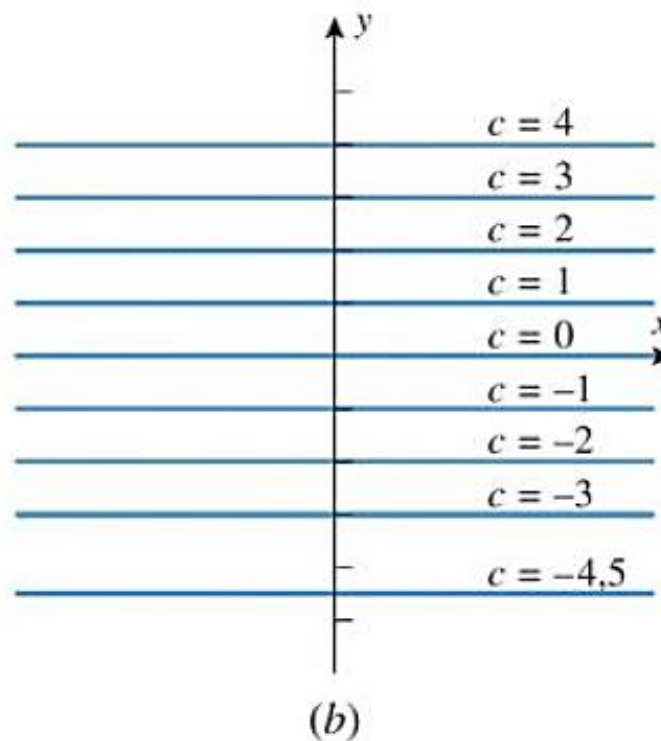
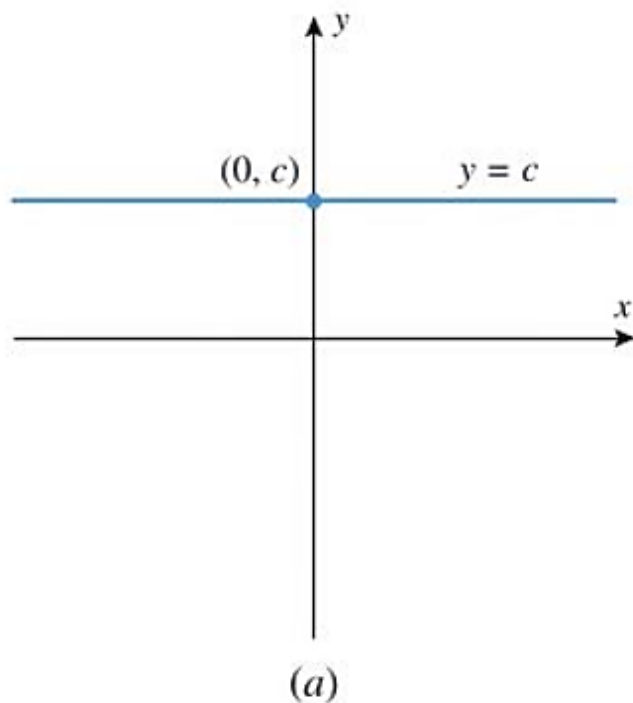
➤ Reta horizontal → variando c



Função constante $f(x) = c \quad c \in \mathbb{R}$

➤ Reta horizontal

→ variando c
(parâmetro)



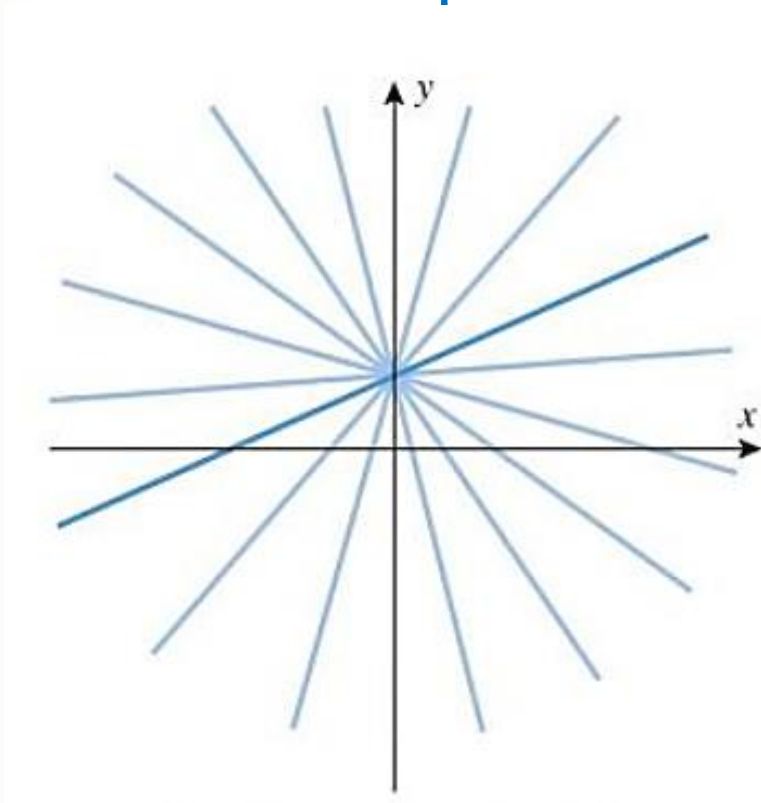
Função linear $f(x) = mx + b$ $b \in \mathbb{R}$

- Reta de inclinação m e corte b

Função linear $f(x) = mx + b$ $b \in \mathbb{R}$

➤ Reta de inclinação m e corte b

b fixo e m o parâmetro

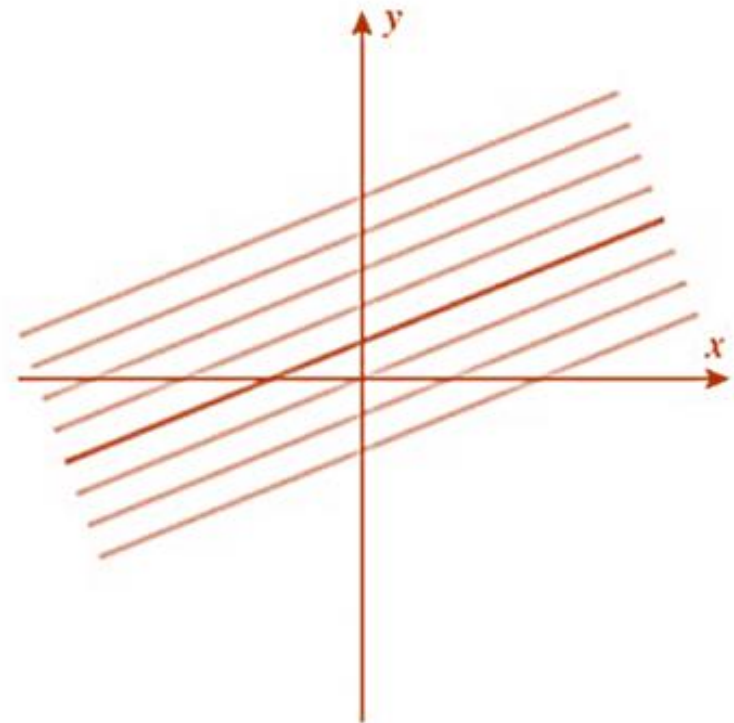
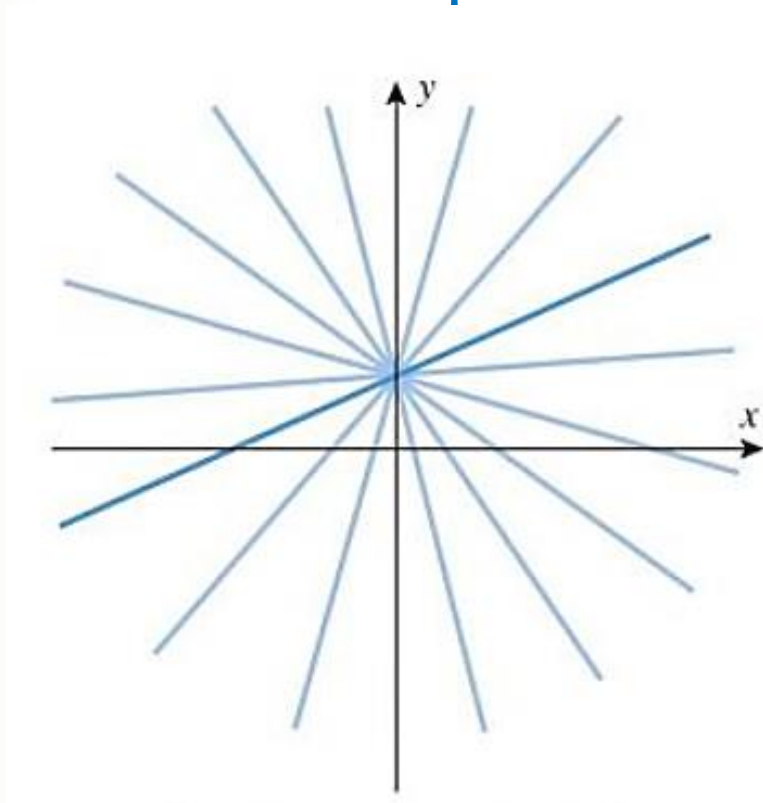


Função linear $f(x) = mx + b$ $b \in \mathbb{R}$

➤ Reta de inclinação m e corte b

b fixo e m o parâmetro

m fixo e b o parâmetro



Exemplo

À medida que o ar seco se move para cima, ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for de 20°C e a temperatura a uma altura de 1 km for de 10°C .

(a) Expresse a temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) como uma função da altura h (em km), supondo que um modelo linear seja apropriado;

(b) Esboce o gráfico para a função obtida na parte (a);

(c) Qual é a temperatura a 2,5 km de altura?

Família $y = f(x) = x^n$ $n = 1, 2, 3 \dots$

➤ **Função potência:** $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \dots$

➤ **Função potência:** $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

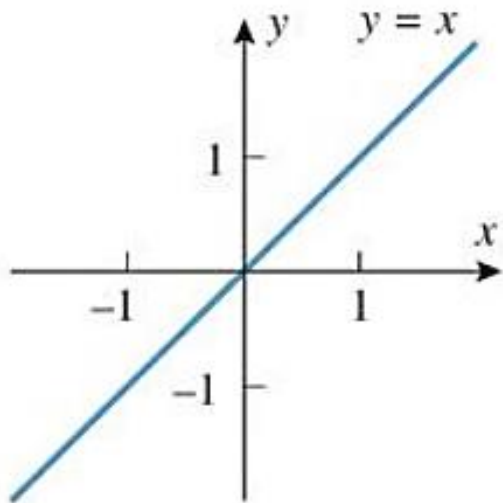
Se n ímpar:

- As funções são ímpares (**simétricas pela origem**);
- O gráfico passa pelos pontos **(1, 1)** e **(-1, -1)**;
- Quando n cresce, gráfico se achata entre $[-1, 1]$;
- E será mais vertical para $x > 1$ e $x < -1$.

Família $y = f(x) = x^n$ $n = 1, 2, 3 \dots$

➤ **Função potência:** $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

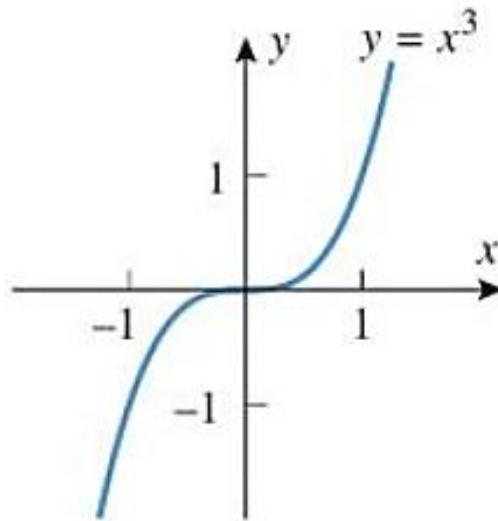
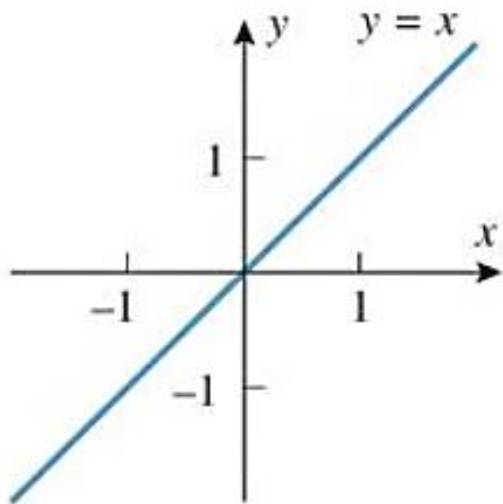
Se n ímpar



Família $y = f(x) = x^n$ $n = 1, 2, 3 \dots$

➤ **Função potência:** $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

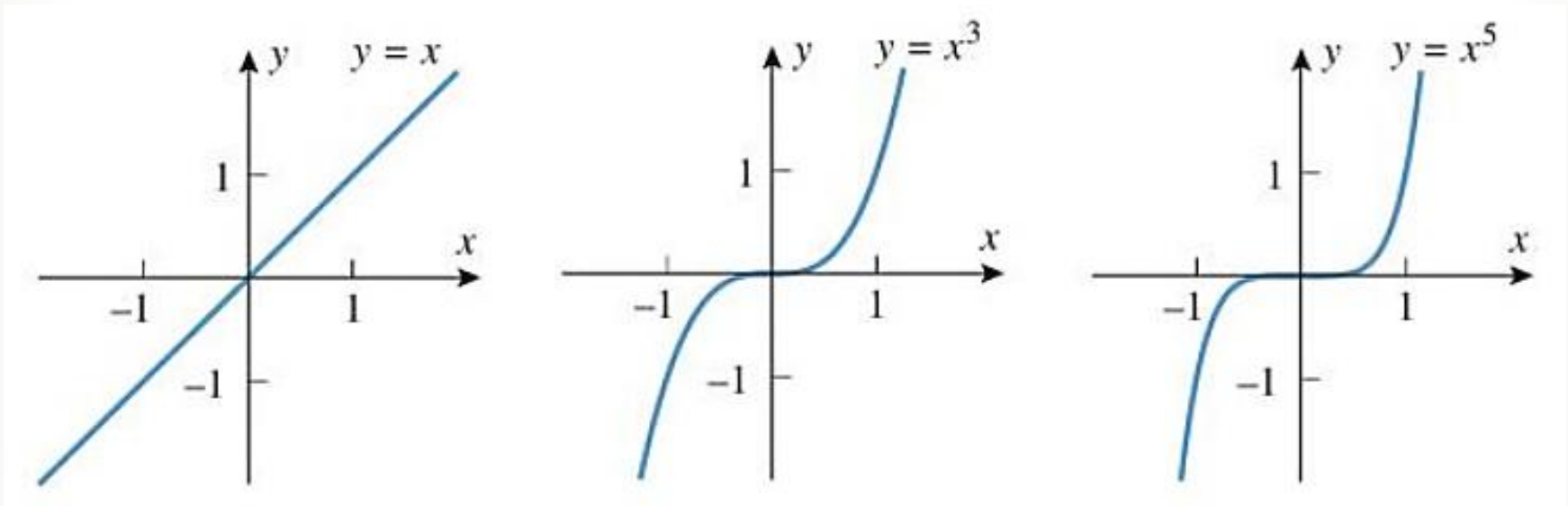
Se n ímpar



Família $y = f(x) = x^n$ $n = 1, 2, 3 \dots$

➤ **Função potência:** $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

Se n ímpar



Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \dots$

➤ **Função potência:** $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

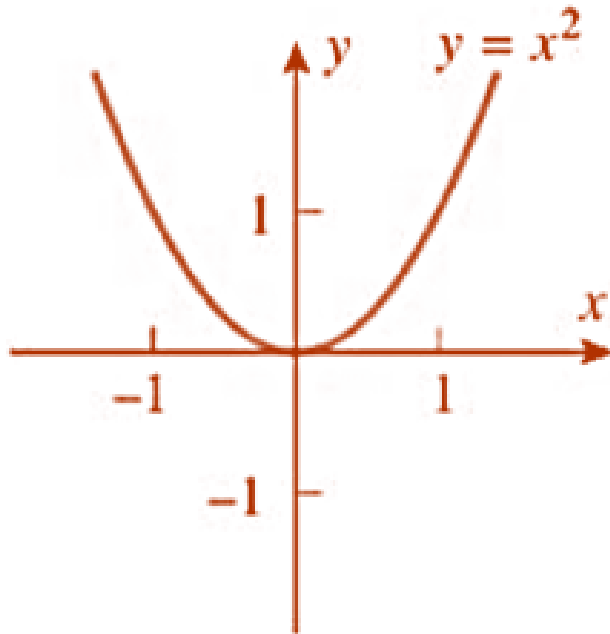
Se **n** par:

- As funções são pares (**simétricas pela eixo y**);
- O gráfico passa pelos pontos **$(-1, 1)$** e **$(1, 1)$** ;
- Quando **n** cresce, gráfico se achata entre $[-1, 1]$;
- E será mais vertical para $x > 1$ e $x < -1$.

Família $y = f(x) = x^n \quad n = 1, 2, 3 \dots$

➤ **Função potência:** $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

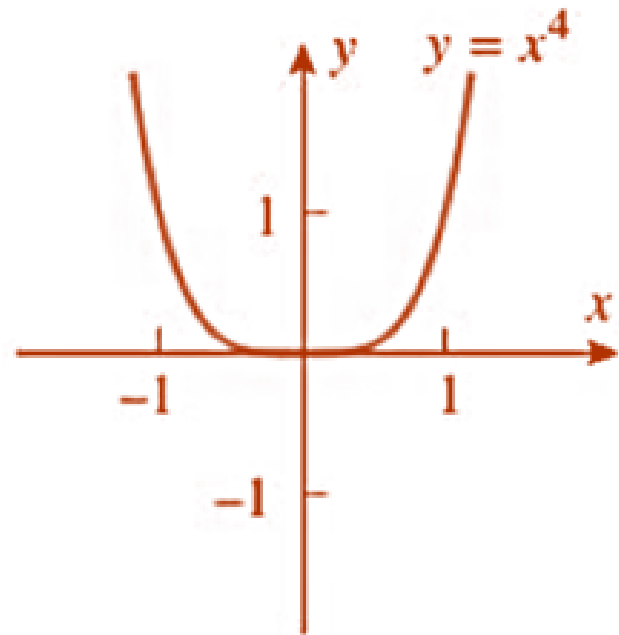
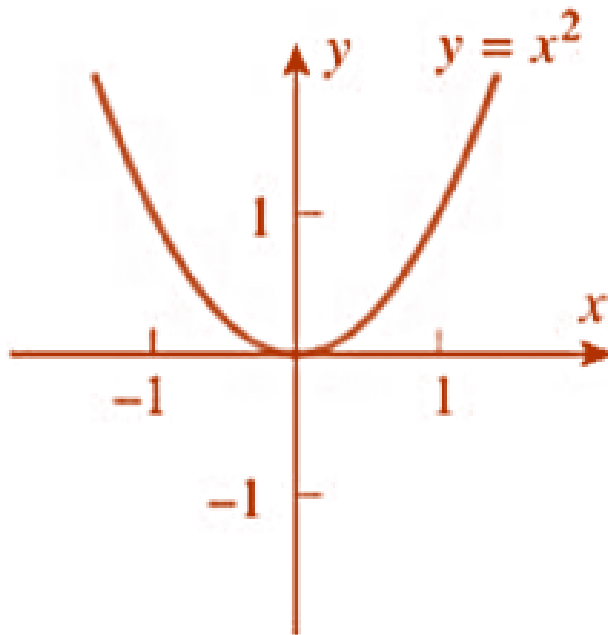
Se n par



Família $y = f(x) = x^n$ $n = 1, 2, 3 \dots$

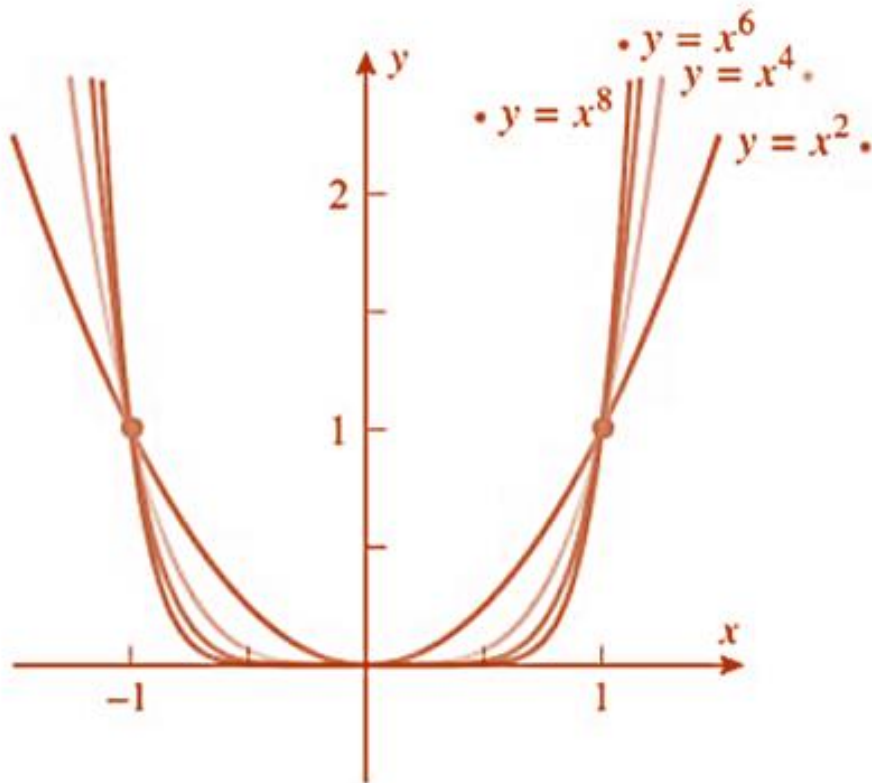
➤ **Função potência:** $y = x^p$, nesse caso $p = n > 0$

Se n par

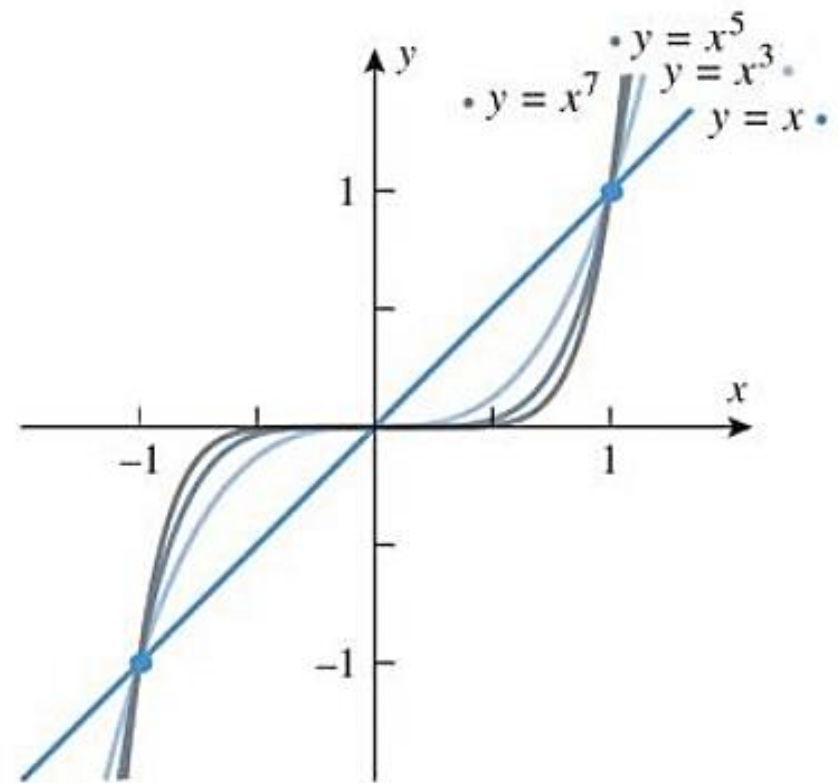


Família $y = f(x) = x^n$ $n = 1, 2, 3 \dots$

n par



n ímpar



Família $y = f(x) = x^{-n}$ $n = 1, 2, 3 \dots$

➤ Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

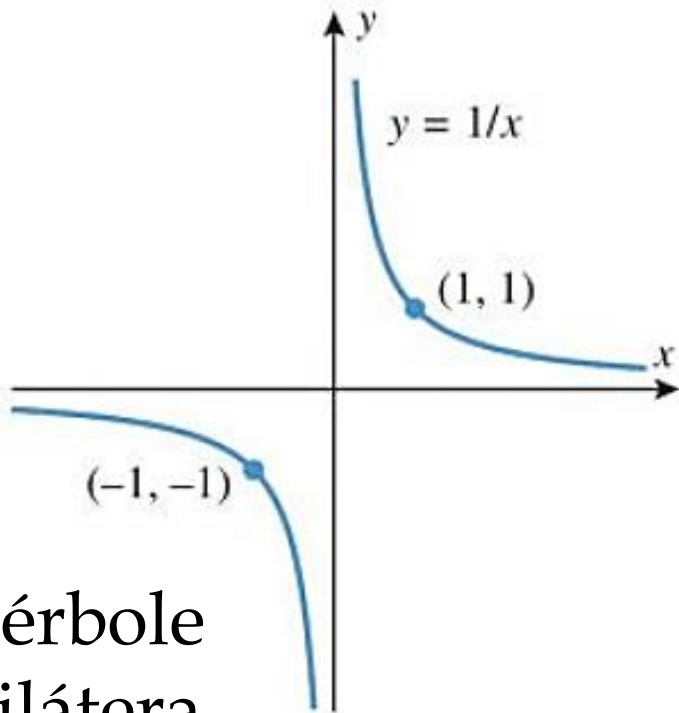
Se n ímpar:

- As funções são ímpares (**simétricas pela origem**);
- O gráfico passa pelos pontos **$(1, 1)$** e **$(-1, -1)$** ;
- Se n cresce, gráfico se achata em $x > 1$ e $x < -1$;
- E será mais vertical para:
 $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$;
- Gráfico tem quebra (descontinuidade) em $x = 0$.

Família $y = f(x) = x^{-n} \quad n = 1, 2, 3 \dots$

➤ Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Se n ímpar:

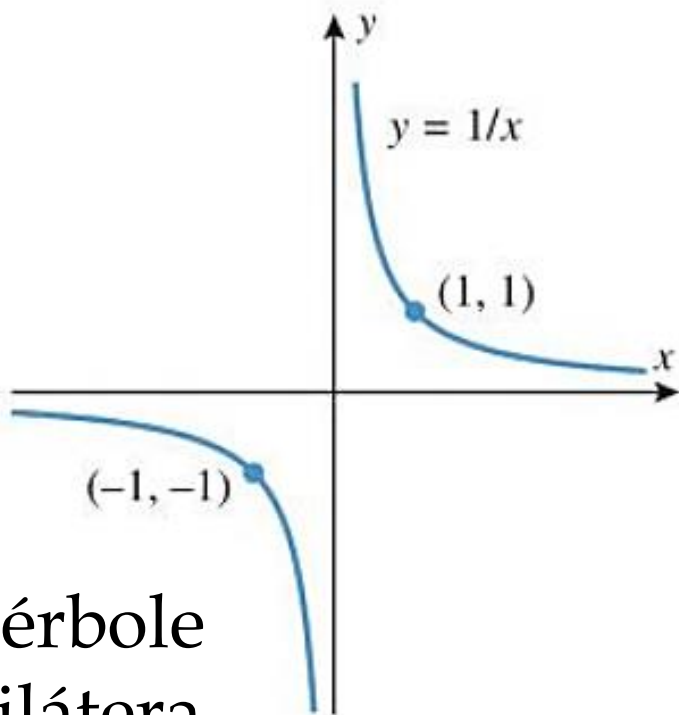


Hipérbole
equilátera

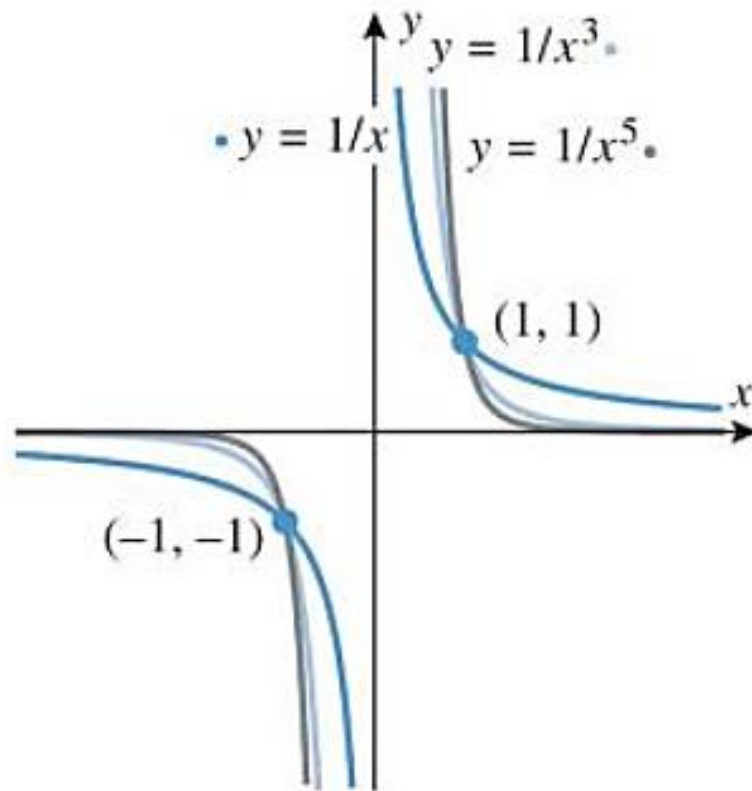
Família $y = f(x) = x^{-n}$ $n = 1, 2, 3 \dots$

➤ Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Se n ímpar:



Hipérbole
equilátera



Família $y = f(x) = x^{-n}$ $n = 1, 2, 3 \dots$

➤ Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

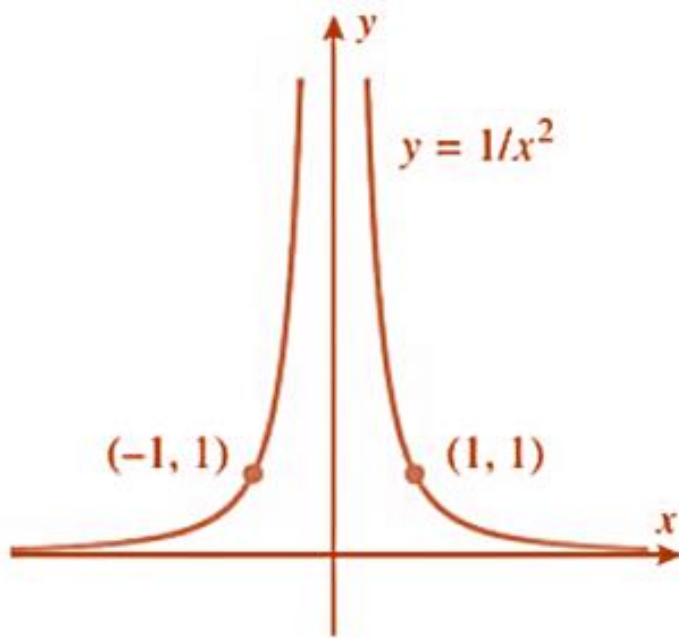
Se n par:

- As funções são pares (**simétricas pelo eixo y**);
- O gráfico passa pelos pontos **$(-1, 1)$** e **$(1, 1)$** ;
- Se n cresce, gráfico se achata em $x > 1$ e $x < -1$;
- E será mais vertical para:
 $-1 < x < 0$ e $0 < x < 1$;
- Gráfico tem quebra (descontinuidade) em $x = 0$.

Família $y = f(x) = x^{-n} \quad n = 1, 2, 3 \dots$

➤ Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

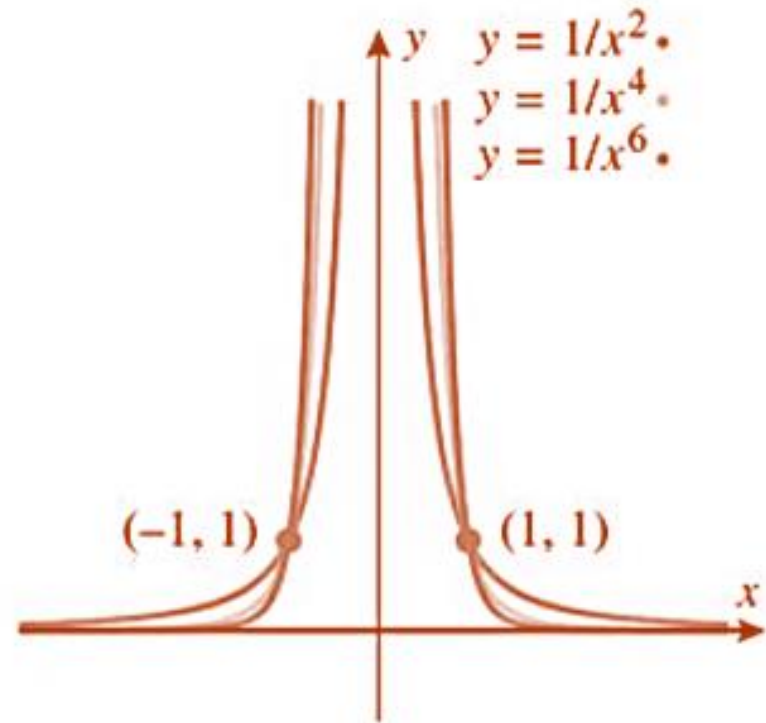
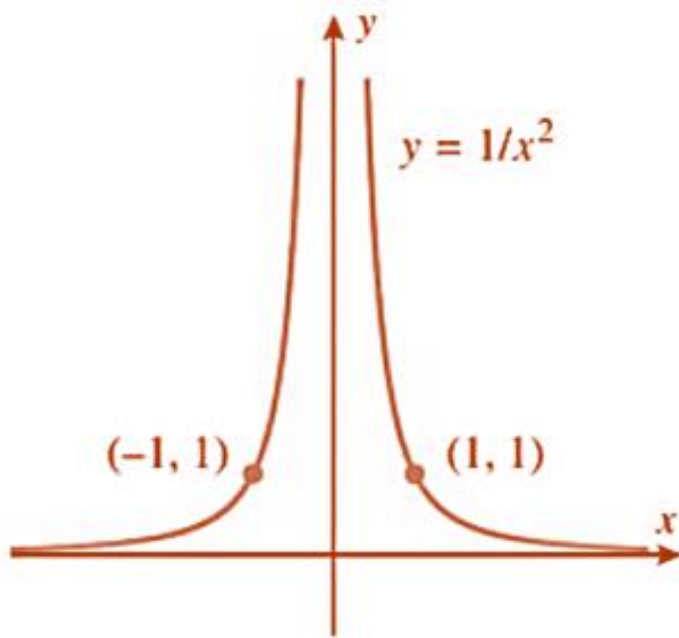
Se n par:



Família $y = f(x) = x^{-n}$ $n = 1, 2, 3 \dots$

➤ Gráficos do tipo $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Se n par:



Funções potência com expoente não inteiros

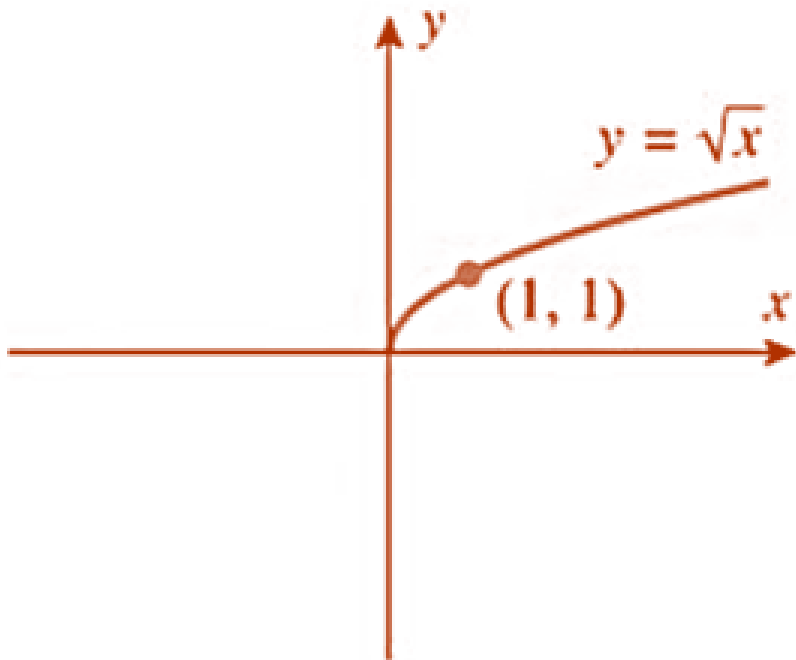
$$y = f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Funções potência com expoente não inteiros

$$y = f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Se n par:

Domínio: $[0, +\infty)$

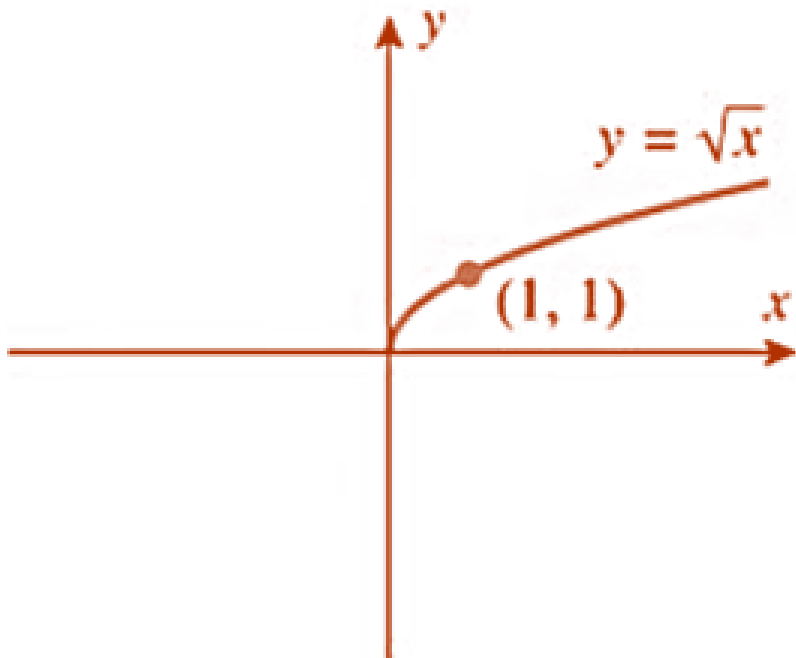


Funções potência com expoente não inteiros

$y = f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad n = 1, 2, 3 \dots$

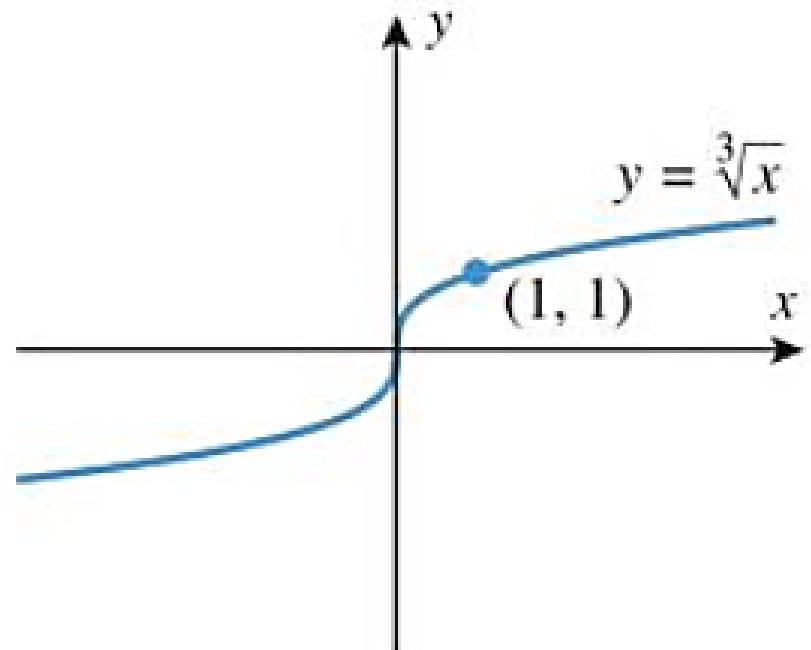
Se n par:

Domínio: $[0, +\infty)$



Se n ímpar:

Domínio: $(-\infty, +\infty)$



Polinômios $f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_1 x + C_0$

Em que: $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ são os coeficientes.

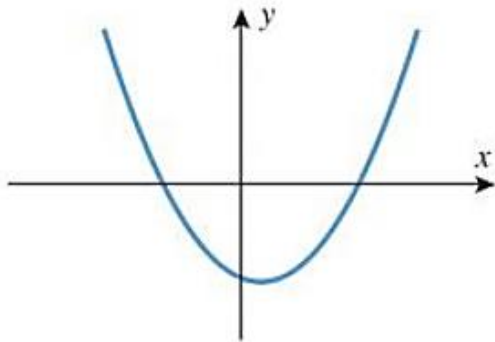
Polinômios $f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_1 x + C_0$

Em que: $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ são os coeficientes.

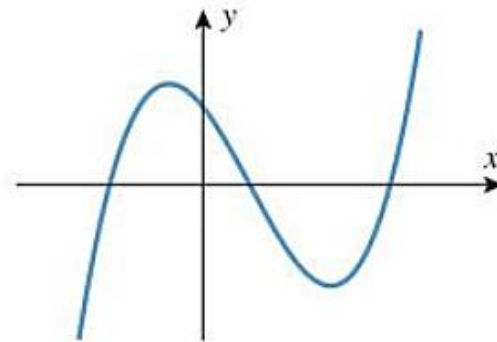
- A **mais alta potência** com um coeficiente não nulo é denominada **grau** do polinômio;
- O polinômio de **grau um** é chamado **linear**;
- O de **grau dois** **quadrático**;
- Domínio natural: $(-\infty, +\infty)$;
- Não possuem descontinuidade e bicos agudos.

Polinômios $f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_1 x + C_0$

O número de picos e vales é determinado pelo grau.



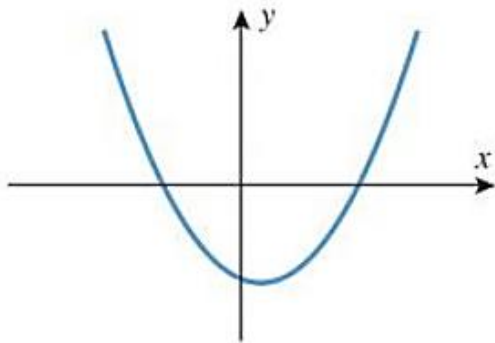
Grau 2



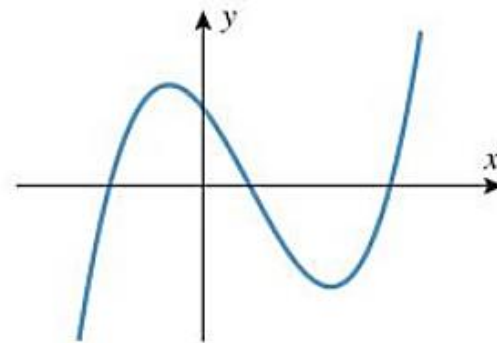
Grau 3

Polinômios $f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + C_1 x + C_0$

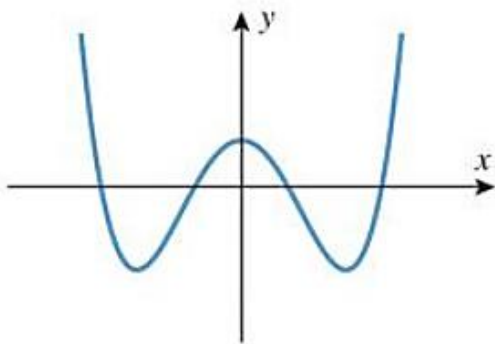
O número de picos e vales é determinado pelo grau.



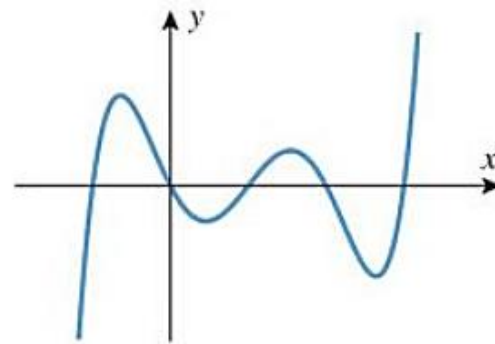
Grau 2



Grau 3



Grau 4



Grau 5

Exemplo

Esboçar o gráfico de: $f(x) = x^3 - x$

Exercícios

Esboçar o gráfico de:

a) $f(x) = 2x^3 - 8x$

b) $f(x) = -3(x - 2)^2$

Funções racionais

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Em que: $P(x)$ e $Q(x)$ são *polinômios*.

Funções racionais

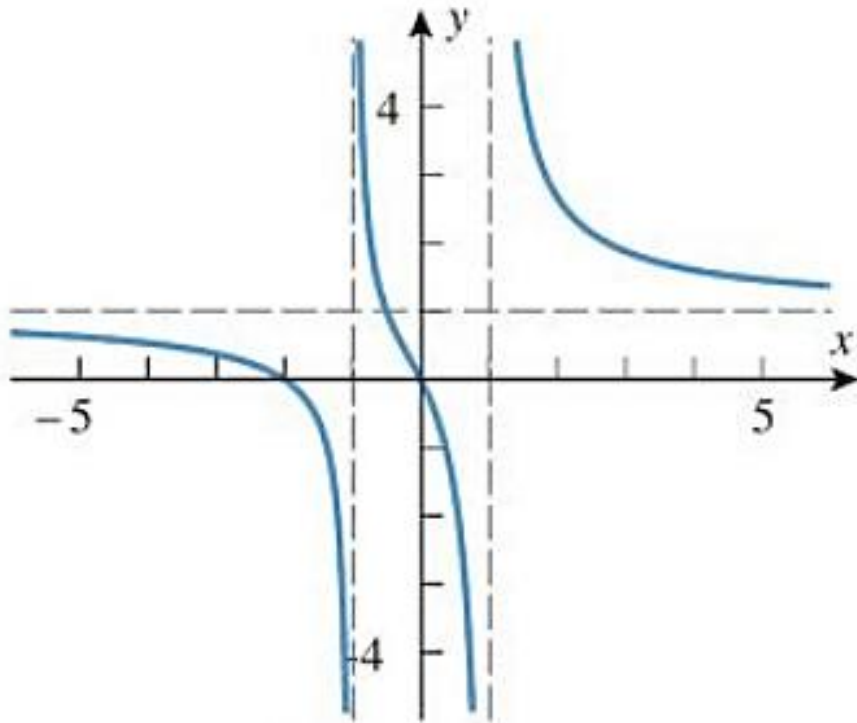
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Em que: $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios.

- Domínio: $x \in \mathbb{R}$, tal que $Q(x) \neq 0$
- Possuem descontinuidade onde $Q(x) = 0$;
- O gráfico se aproxima de retas verticais (**assíntotas verticais**) nos pontos em que $f(x)$ não está definida;
- O gráfico pode começar ou terminar em retas horizontais (**assíntotas horizontais**).

Funções racionais

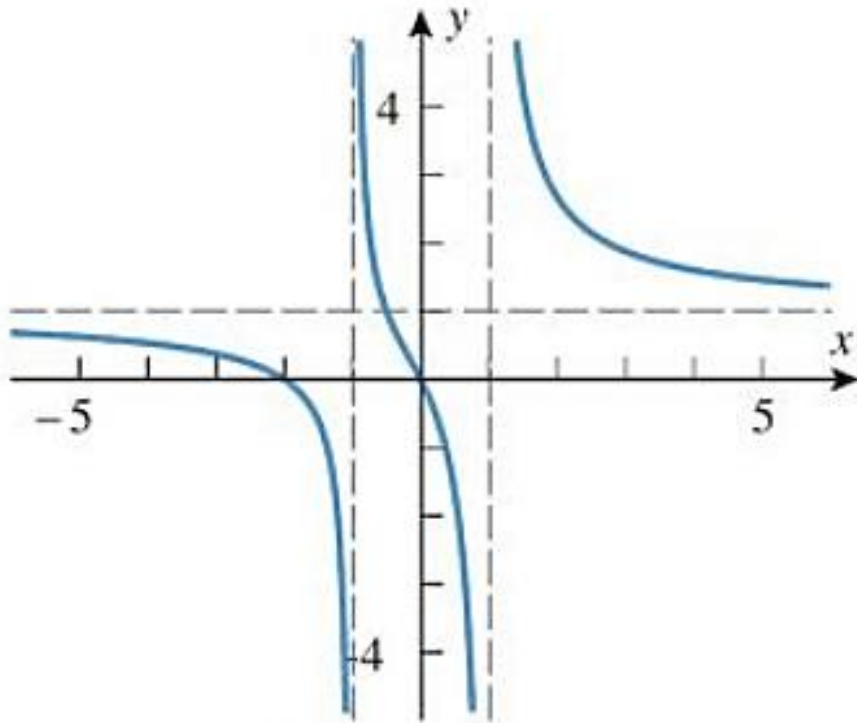
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$



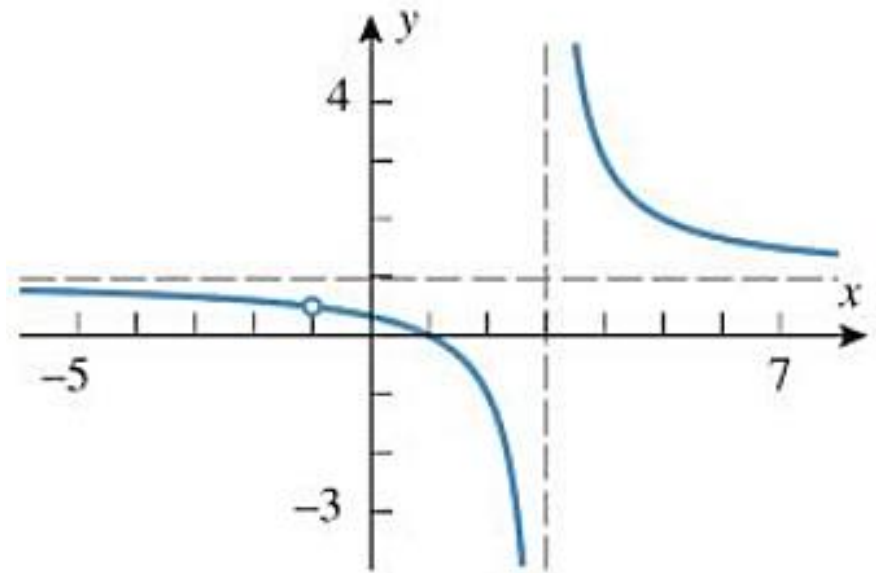
$$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$

Funções racionais

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$



$$y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$$



$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3}$$

Exemplo

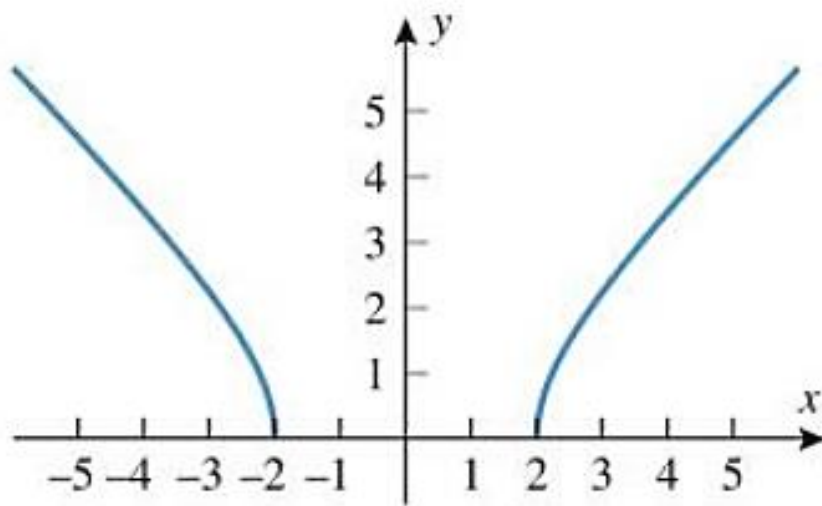
Esboçar o gráfico de: $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$

Funções algébricas

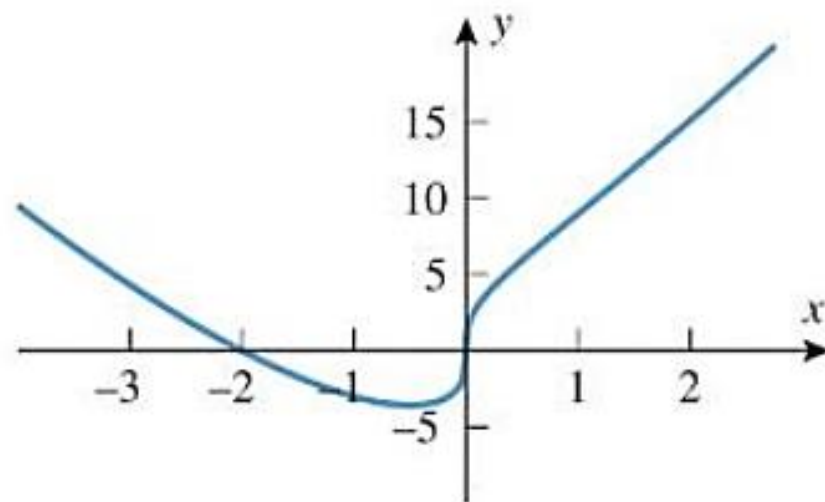
- Construídas com polinômios e operações como: adição, subtração, divisão e raízes

Funções algébricas

- Construídas com polinômios e operações como: adição, subtração, divisão e raízes
- Os gráficos variam amplamente.



$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$



$$y = 3\sqrt[3]{x}(2+x)$$

Aula 04

Famílias seno e cosseno

Família $y = A \sin(Bx - C)$ $y = A \cos(Bx - C)$

➤ A , B e C são constantes não nulas.

Família $y = A \sin(Bx - C)$ $y = A \cos(Bx - C)$

➤ A , B e C são constantes não nulas.

Caso em que $C = 0$ com $A > 0$ e $B > 0$

- A alonga ou comprime **verticalmente** o gráfico;
- B alonga ou comprime **horizontalmente** o gráfico;

Família $y = A \sin(Bx - C)$ $y = A \cos(Bx - C)$

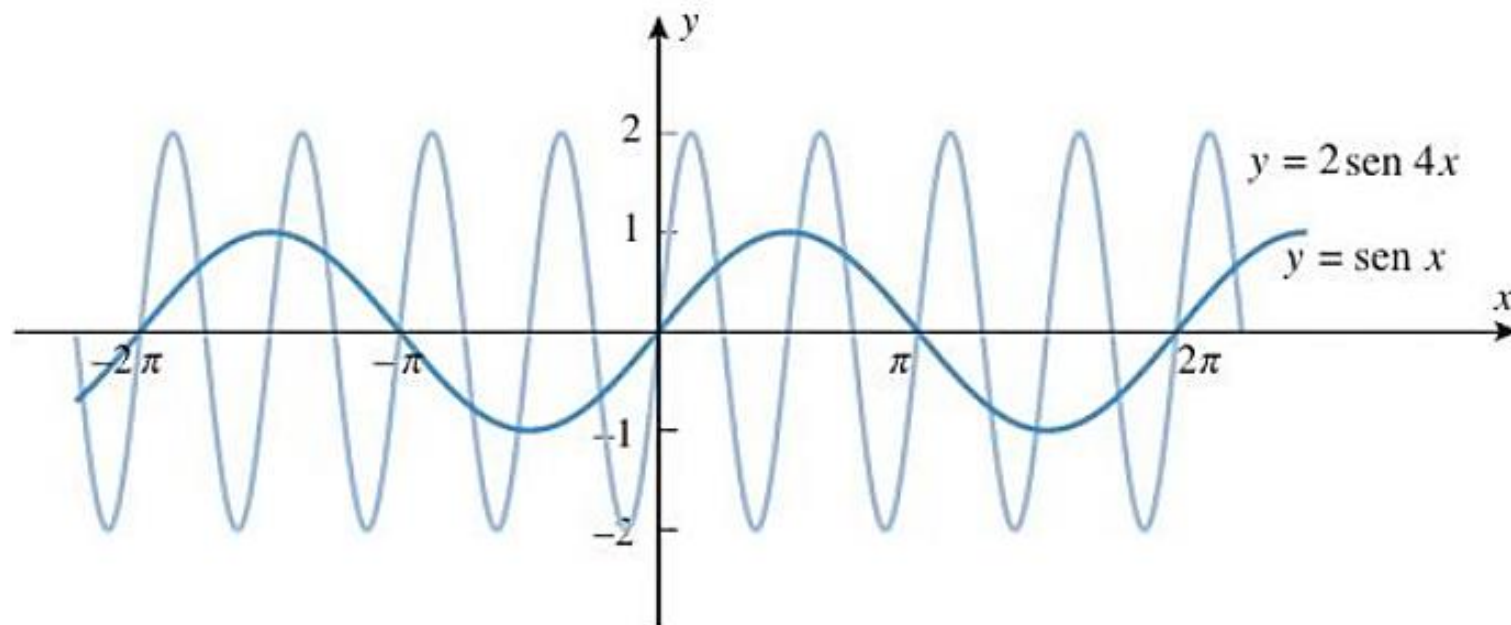
➤ A , B e C são constantes não nulas.

Caso em que $C = 0$ com $A > 0$ e $B > 0$

- A alonga ou comprime **verticalmente** o gráfico;
- B alonga ou comprime **horizontalmente** o gráfico;
- As funções oscilam entre $-A$ e A . (Amplitude $|A|$);
- O gráfico se repete a cada $\frac{2\pi}{B}$. (Período $T = \frac{2\pi}{|B|}$);
- A frequência será: $f = \frac{1}{T} = \frac{|B|}{2\pi}$

Família $y = A \operatorname{sen}(Bx - C)$ $y = A \operatorname{cos}(Bx - C)$

➤ $y = A \operatorname{sen}(Bx)$.



Amplitude: $A = 2$; Período: $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$;

Frequência: $f = \frac{1}{T} = \frac{2}{\pi}$

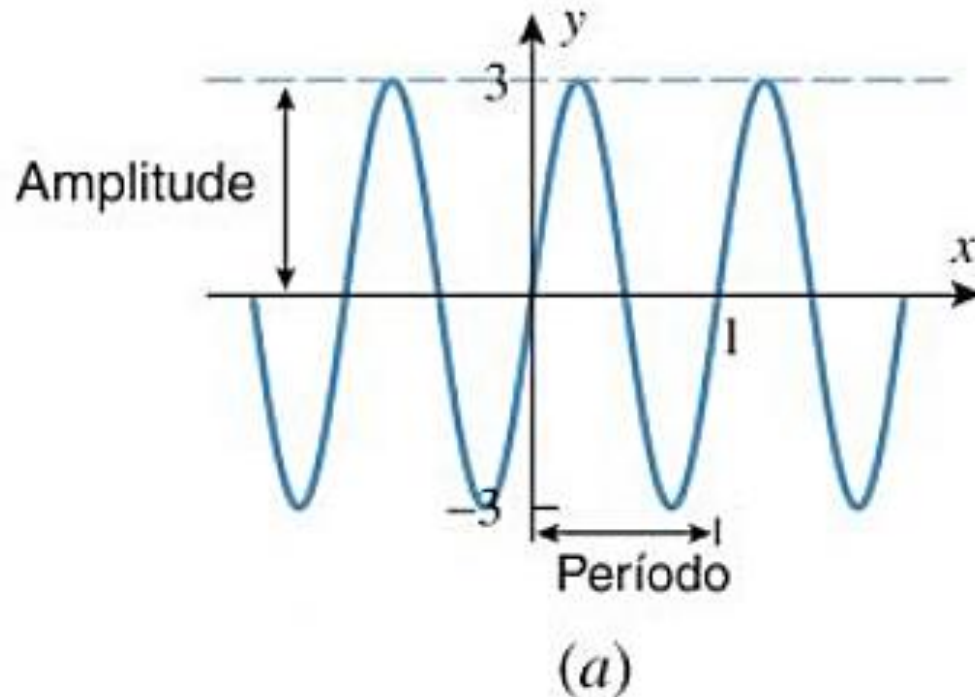
Exemplo

Esboçar o gráfico e mostrar o período e amplitude.

$$(a) y = 3\text{sen}(2\pi x)$$

Exemplo - solução

$$(a) y = 3\text{sen}(2\pi x)$$



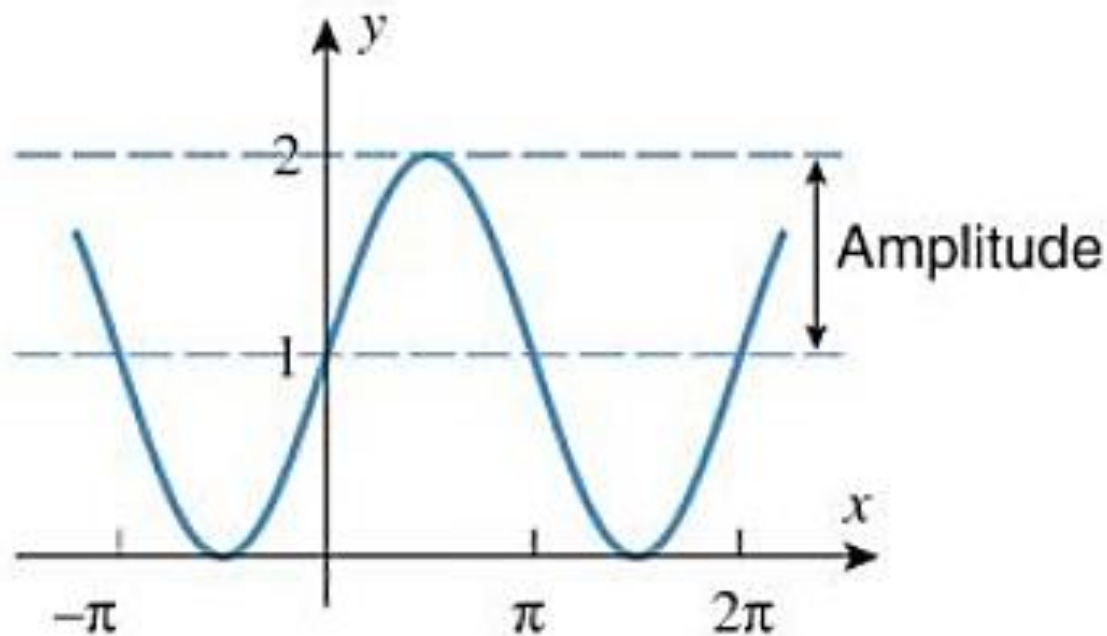
Exercício

Esboçar o gráfico e mostrar o período e amplitude.

$$(b) y = 1 + \text{sen}x$$

Exercício - solução

(b) $y = 1 + \text{sen}x$



(c)

Família $y = A \operatorname{sen}(Bx - C)$ $y = A \operatorname{cos}(Bx - C)$

Caso em que $C \neq 0$ com $A > 0$ e $B > 0$;

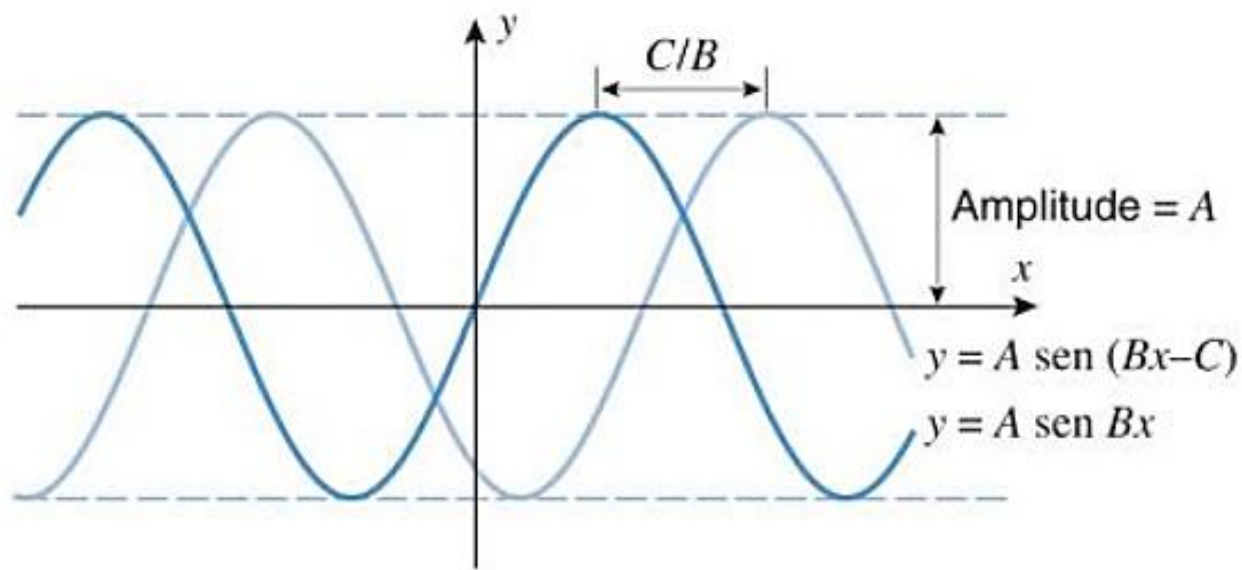
- Escrever na forma:

$$y = A \operatorname{sen} \left[B \left(x - \frac{C}{B} \right) \right] \quad \text{e} \quad y = A \operatorname{cos} \left[B \left(x - \frac{C}{B} \right) \right]$$

- Os gráficos são trasladados horizontalmente;
- Se $\frac{C}{B} > 0$ trasladar $y = A \operatorname{sen}(Bx)$ p/ direita;
- Se $\frac{C}{B} < 0$ trasladar $y = A \operatorname{sen}(Bx)$ p/ esquerda;

Família $y = A \text{sen}(Bx - C)$ $y = A \text{cos}(Bx - C)$

Caso em que $\frac{C}{B} > 0$



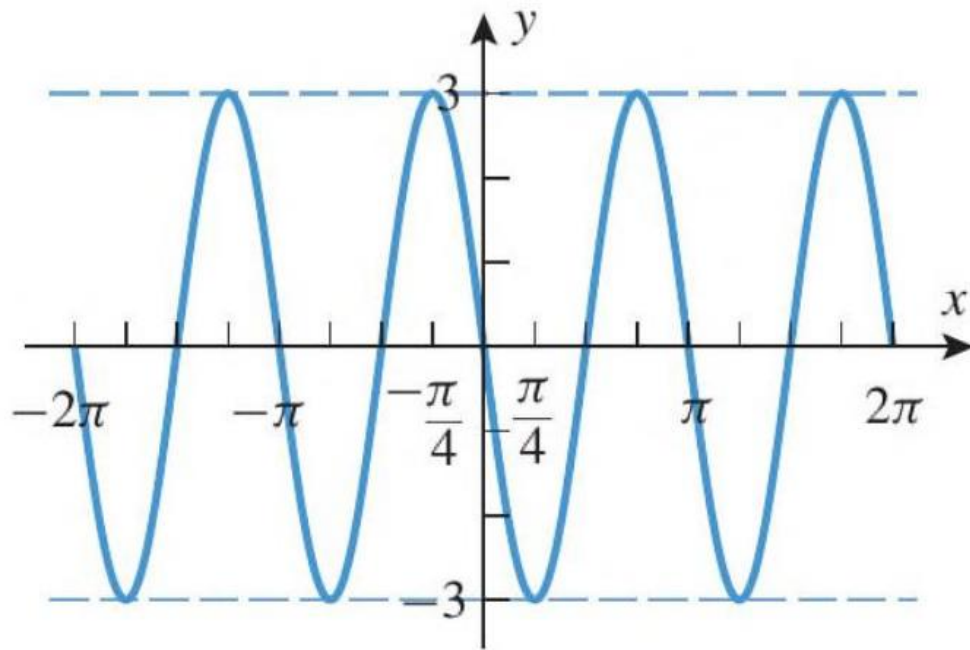
Exercício

Encontrar o período, a amplitude e a translação.

$$(a) y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercício - solução

$$(c) y = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$



Para depois desta aula:

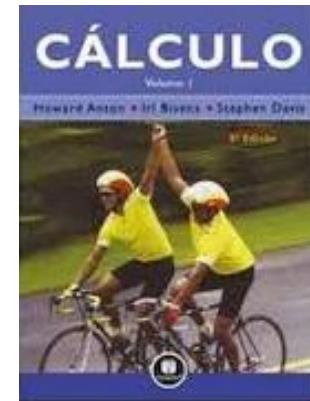
- Rer ler o capítulo do livro texto (Howard);
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Realizar a lista de exercícios (baixar no [site](#));

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com



henrique.faria@unesp.br