Capítulo 5 - A Reta

Geometria Analítica

Prof. Henrique A. M. Faria

Aula 1 - Retas

Equação Vetorial da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$,
$\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Só existe uma reta que passa por A e é paralela a $\vec{v}$

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

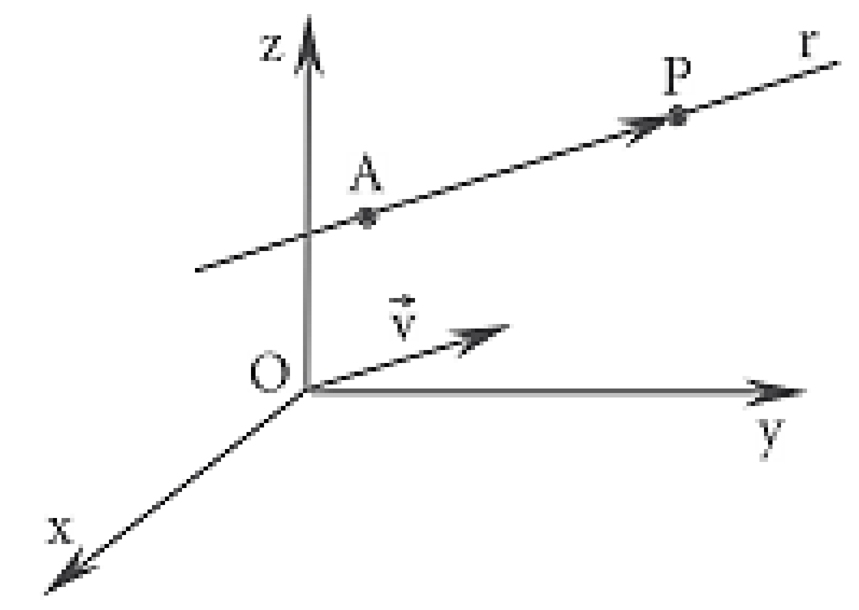


Figura 5.1

Equação Vetorial da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$,
$\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Só existe uma reta que passa por A e é paralela a $\vec{v}$

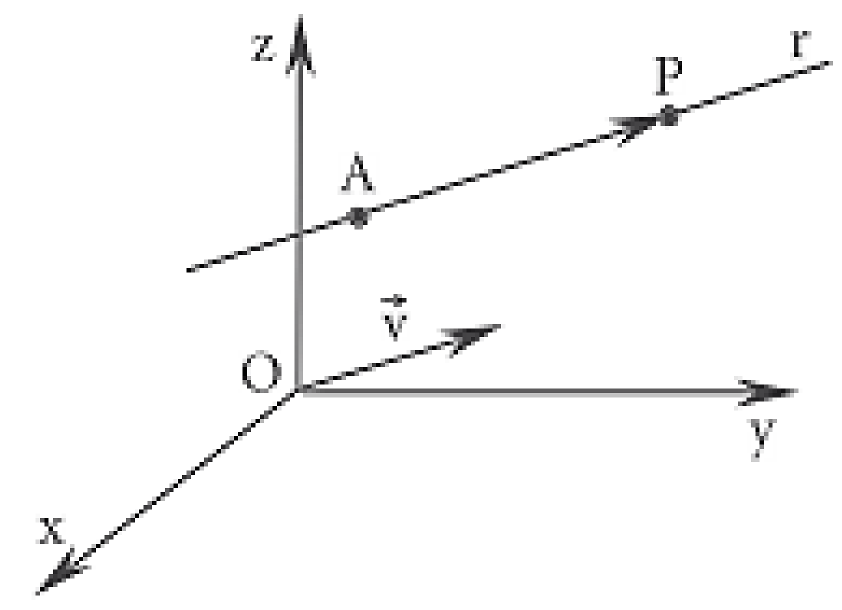


Figura 5.1

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

Equação Vetorial da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$,
$\boldsymbol{\vec{v} = (a, b, c)}$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Só existe uma reta que passa por A e é paralela a $\vec{v}$

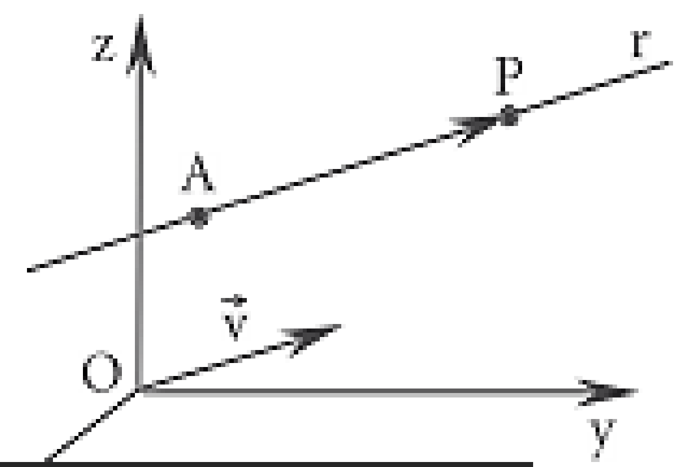


Figura 5.1

Equações vetoriais da reta

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

Exemplo 1

A reta r passa por $\boldsymbol{A(1, -1, 4)}$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \boldsymbol{2})$. Obter a equação vetorial dessa reta.

Observações

a) Para cada número real t corresponde um $P \in r$, sendo a recíproca também verdadeira.

Exemplo 2

A reta $\boldsymbol{r}$ é definida pela equação vetorial:

$$\boldsymbol{r}\text{: } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{4}) + \boldsymbol{t}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2}).$$

Determinar $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$ sendo $P(\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{8})$.

Observações

b) Existem infinitas equações vetoriais de $\boldsymbol{r}$ obtidas ao se tomar outro ponto A ou outro vetor diretor múltiplo de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Exemplo 3

Se $\boldsymbol{A}(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{4})$ e $2\vec{\boldsymbol{v}}=(\mathbf{4},\mathbf{6},\mathbf{4})$

$\boldsymbol{r}$: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{4})+\boldsymbol{t}(\mathbf{4},\mathbf{6},\mathbf{4})$.

Equações paramétricas da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}, \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(a, b, c)}$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Da equação vetorial da reta tem-se:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

Equações paramétricas da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}, \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Da equação vetorial da reta tem-se:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

Da igualdade de vetores:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Equações paramétricas da reta

Exemplo 4

a) Dados $\boldsymbol{A(2,3,-4)}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(1,-2,3)}$. Obter as equações paramétricas da reta $\boldsymbol{r}$ que passa por $\boldsymbol{A}$ e é paralela a $\vec{\boldsymbol{v}}$.

b) Encontrar um ponto $\boldsymbol{B}$ e um ponto $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{r}$ com parâmetros $t = 1$ e $t = 4$, respectivamente.

c) Determinar um ponto de $\boldsymbol{r}$ cuja abscissa é $\boldsymbol{4}$.

Exemplo 4

d) Verificar se $\boldsymbol{D(4,-1,2)}$ pertence a reta $\boldsymbol{r}$.

e) Determinar para que valores de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ o ponto $\boldsymbol{F(m,5,n)}$ pertence a $\boldsymbol{r}$.

f) Escrever outro conjunto de equações paramétricas de $\boldsymbol{r}$ tomando $\boldsymbol{B(3,1,-1)}$ calculado no item (b) e o mesmo $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(1,-2,3)}$.

Exemplo 4

g) Escrever as equações paramétricas da reta $\boldsymbol{s} \parallel \boldsymbol{r}$ que passa por $\boldsymbol{G(5, 2, -4)}$.

h) Escrever as equações paramétricas da reta $\boldsymbol{q}$ que passa por $\boldsymbol{A(2, 3, -4)}$ e é paralela ao eixo $\boldsymbol{Y}$.

Exercícios em classe

1. Determinar um equação vetorial da reta $\boldsymbol{r}$ definida pelos pontos $\boldsymbol{A(2,-3,4)}$ e $\boldsymbol{B(1,-1,2)}$. Verificar se $\boldsymbol{D(-1,3,4)}$ pertence a $\boldsymbol{r}$.

2. Dada a reta $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{(x,y,z)=(-1,2,3)+t(2,-3,0)}$:

   a) Escrever as equações paramétricas de $\boldsymbol{r}$;

   b) Encontrar um ponto $\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{r}$ tal que $\boldsymbol{t=1/2}$;

   c) Para que valores de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ o ponto $k(2,n,m) \in r$

Aula 2 - Retas

Equações paramétricas de um segmento de reta

Seja $\boldsymbol{r}$ uma reta que passa pelos pontos $\boldsymbol{A(3,-1,-2)}$ e $\boldsymbol{B(1,2,4)}$ as equações paramétricas dessa reta são:

$$\boldsymbol{\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,4) - (3,-1,-2) = (-2,3,6)}$$

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$$

Equações paramétricas de um segmento de reta

Se um segmento de reta $\boldsymbol{AB}$ está contido em $\boldsymbol{r}$, as equações paramétricas desse segmento são as mesmas, porém com $0 \leq \boldsymbol{t} \leq \mathbf{1}$, ou seja:

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$$

$$para\ t = 0 \qquad (x, y, z) = (3, -1, -2) = A$$

$$para\ t = 1 \qquad (x, y, z) = (1, 2, 4) = B$$

$P = A + t(B - A)$ Equação vetorial do segmento AB

Equações simétricas da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}, \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

As equações simétricas da Reta são

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad t = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Equações simétricas da Reta

Sejam $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}, \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

As equações simétricas da Reta são

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad t = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Equações simétricas da reta

Exemplo 1

A reta r passa por $\boldsymbol{A(3,0,-5)}$ e tem direção de $\boldsymbol{\vec{v}=(2,2,-1)}$.

A) Obter as equações simétricas dessa reta;

B) Encontrar o ponto $\boldsymbol{P(5,y,z)}$ pertencente a r.

Equações reduzidas da reta

Sejam $\boldsymbol{A(2,-4,-3)}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1},\mathbf{2},-\mathbf{3})$. É possível reduzir as equações simétricas da reta para duas variáveis em função da terceira. Exemplo

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2x-8 = y$$

Equações reduzidas da reta

Sejam $\boldsymbol{A(2,-4,-3)}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\mathbf{3})$. É possível reduzir as equações simétricas da reta para duas variáveis em função da terceira. Exemplo

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} \implies \boxed{2x-8=y}$$

Equações reduzidas da reta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{z+3}{-3} \implies \boxed{-3x+3=z}$$

Equações reduzidas consequências

- $P(x, x-2, -3x+3)$ pertence a r;
- As equações reduzidas podem ser expressas nas variáveis $\boldsymbol{y}$ ou $\boldsymbol{z}$ pelo mesmo procedimento ;

Equações reduzidas consequências

- $P(x, x-2, -3x+3)$ pertence a r;
- As equações reduzidas podem ser expressas nas variáveis y ou z pelo mesmo procedimento ;
- Para encontrar o vetor diretor de r:

$$\begin{cases} 2x - 8 = y \\ -3x + 3 = z \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{para } x = 0 & \rightarrow & y = -8 \;\; e \; z = 3 \\ \text{para } x = 1 & \rightarrow & y = -6 \;\; e \; z = 0 \end{matrix}$$

$$A(0, -8, 3) \quad e \quad B(1, -6, 0) \qquad \rightarrow \qquad \overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$$

Exemplo 2

Determinar o ponto da reta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z}{4}$

a) Que possui abscissa 5;

b) Que possui ordenada 2.

Exercício em classe

Escrever as equações reduzidadas na variável $\boldsymbol{z}$ da reta que passa por $\boldsymbol{A(-1, 6, 3)}$ e $\boldsymbol{B(2, 2, 1)}$.

Aula 3 - Retas

Retas paralelas aos planos coordenados ($X0Y, X0Z, Y0Z$)

- Se o vetor diretor de uma reta for paralelo a um plano coordenado a reta é paralela a esse plano;

- Uma das coordenadas do vetor diretor é nula;

Retas paralelas aos planos coordenados $(X0Y, X0Z, Y0Z)$

Exemplo 1

$\vec{v} = (2, 3, 0)$
$A(-1, 2, 4)$

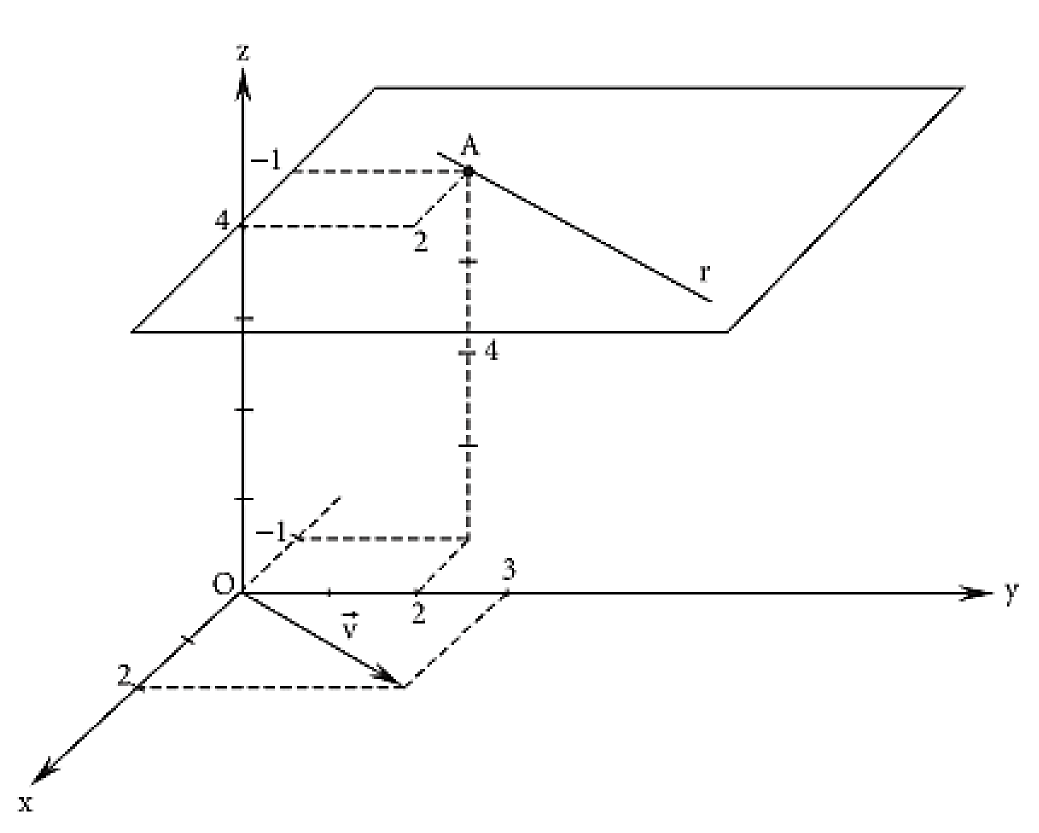


Figura 5.4

Retas paralelas aos planos coordenados ($X0Y, X0Z, Y0Z$)

Exemplo 1

$\vec{v} = (2, 3, 0)$
$A(-1, 2, 4)$

A reta r é paralela ao plano $X0Y$.

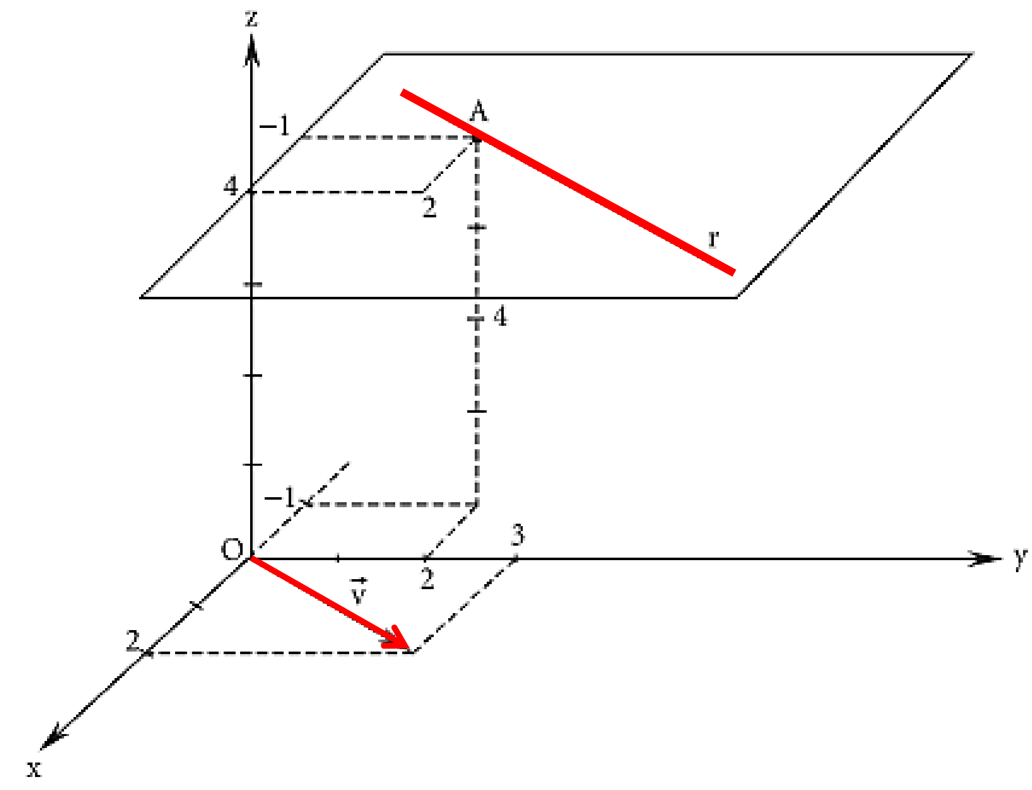


Figura 5.4

Exercício em classe 1

Seja a reta $\boldsymbol{r}$ que passa por $\boldsymbol{A(1,5,3)}$ e é paralela ao vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{-1,0,2})$. Escrever as equações paramétricas e indicar em que plano está essa reta $\boldsymbol{r}$.

Retas paralelas aos eixos coordenados

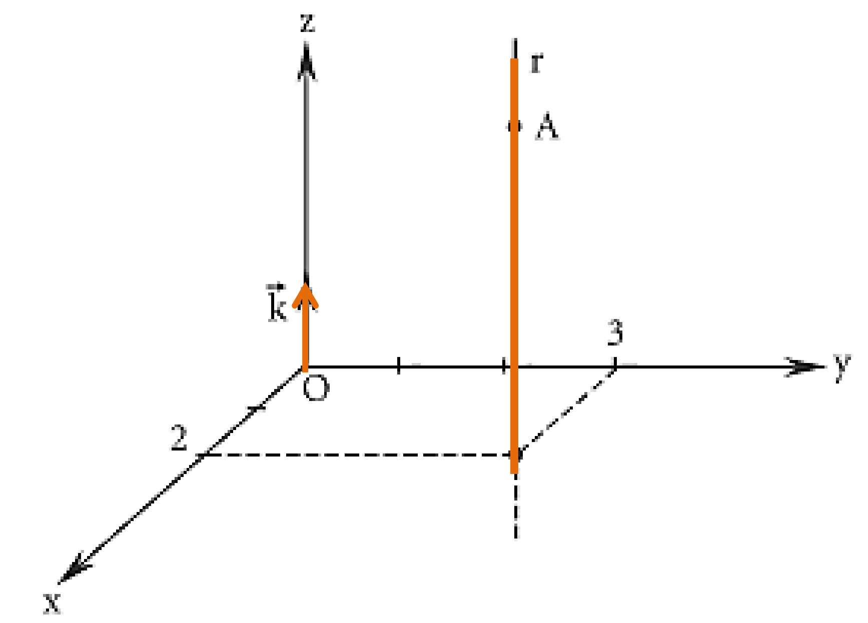


Figura 5.6

- Duas das coordenadas do vetor diretor são nulas;
- O vetor diretor é múltiplo de um dos vetores da base.

Exemplo 2

A reta $\boldsymbol{r}$ que passa por $\boldsymbol{A(2,3,4)}$ e tem direção do vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{3})$. Escrever as equações paramétricas e mostrar que $\boldsymbol{r} \parallel \vec{\boldsymbol{k}}$.

Notas

- Os eixos $0\mathrm{X}, 0\mathrm{Y}$ e $0Z$ são retas particulares com direção de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente;
- Por exemplo, as equações paramétrica dos eixos:

$$0X: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad 0Y: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad 0Z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Ângulo entre duas retas

O ângulo entre duas retas r_1 e r_2 é o menor ângulo entre seus vetores diretores.

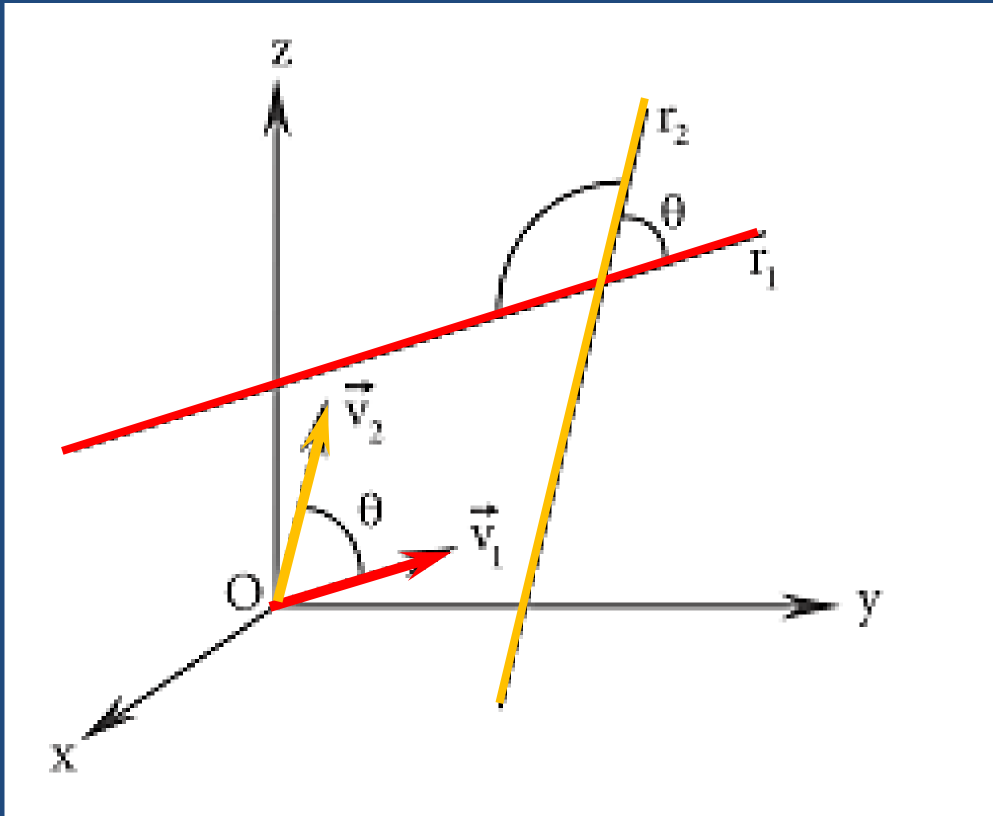


Figura 5.9

Ângulo entre duas retas

O ângulo entre duas retas r_1 e r_2 é o menor ângulo entre seus vetores diretores.

$$cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}|}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

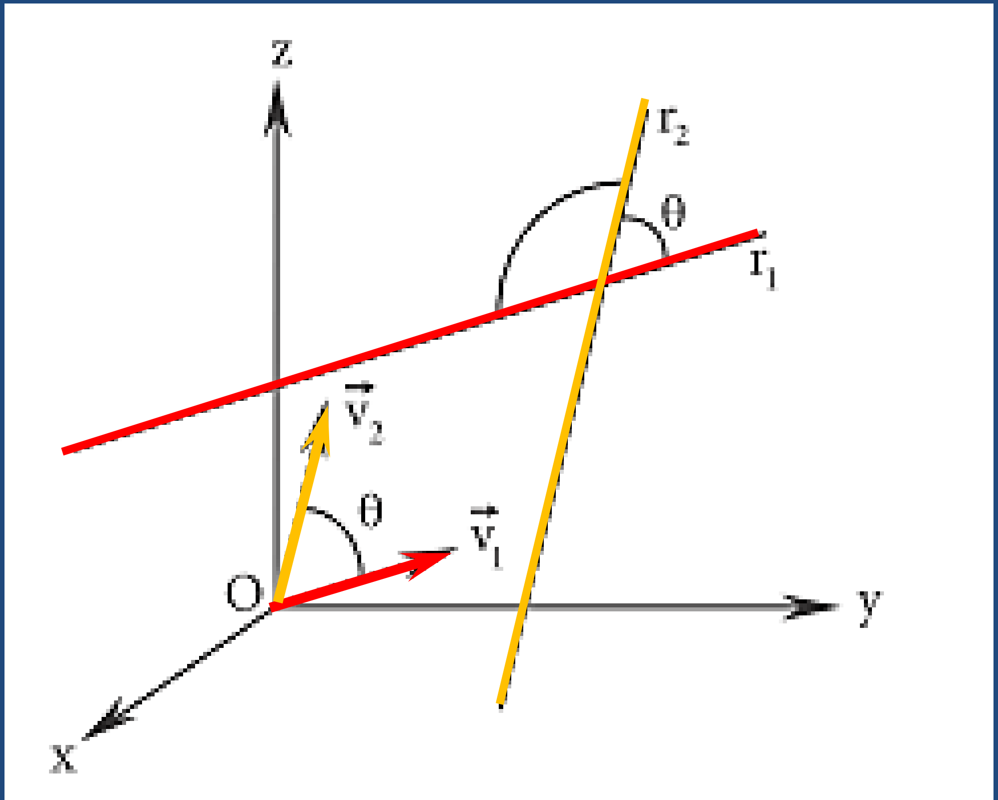


Figura 5.9

Exemplo 3

Calcular o ângulo entre duas retas definidas pelos vetores diretores $\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} = (-\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$.

Exercícios em classe 2 (p. 119, 21)

Calcular o ângulo entre duas retas definidas por:

(b) $r_1: \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} y = \frac{z+1}{-1} \\ x = 4 \end{cases}$ Resp.: $\theta = 30°$

(c) $r_1: \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}t \\ y = t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ Resp.: $\theta = 30°$

(d) $r_1: \frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y}{4} = \frac{z-2}{3} \end{cases}$

https://www.geogebra.org/m/Qdwfjkj4

Resp.: $\theta = \arccos 2/3 \approx 48°$

Aula 4 - Retas

Reta ortogonais

Sejam as retas r_1 e r, não paralelas, com a direção de $\overrightarrow{v_1}$ e $\vec{v}$.

$$r_1 \perp r \iff \overrightarrow{v_1} \cdot \vec{v} = 0$$

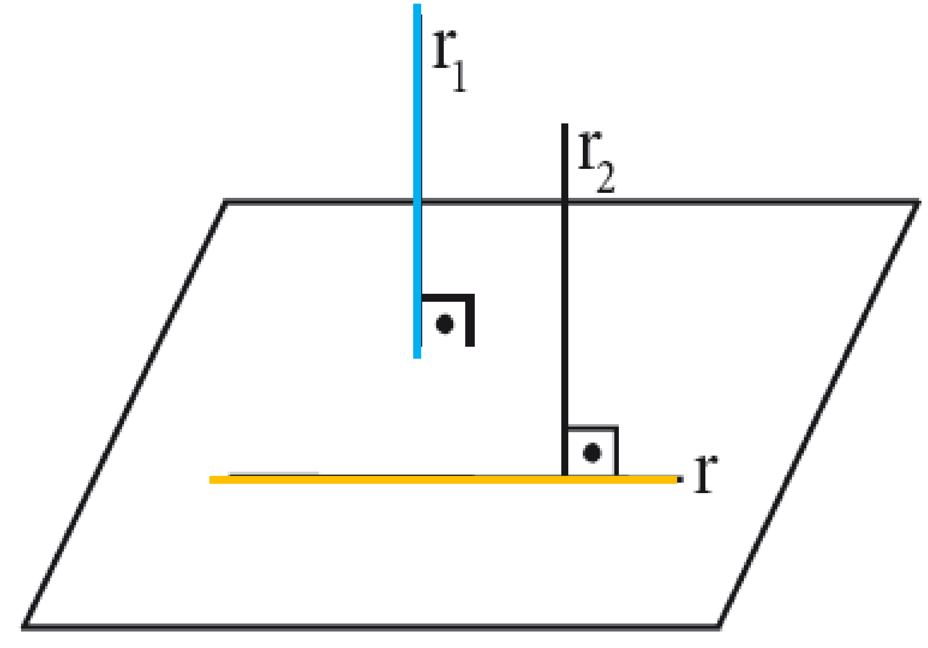


Figura 5.10

Reta ortogonais

Sejam as retas r_1 e r, não paralelas, com a direção de $\overrightarrow{v_1}$ e $\vec{v}$.

$$r_1 \perp r \iff \overrightarrow{v_1} \cdot \vec{v} = 0$$

$$r_2 \perp r \iff \overrightarrow{v_2} \cdot \vec{v} = 0$$

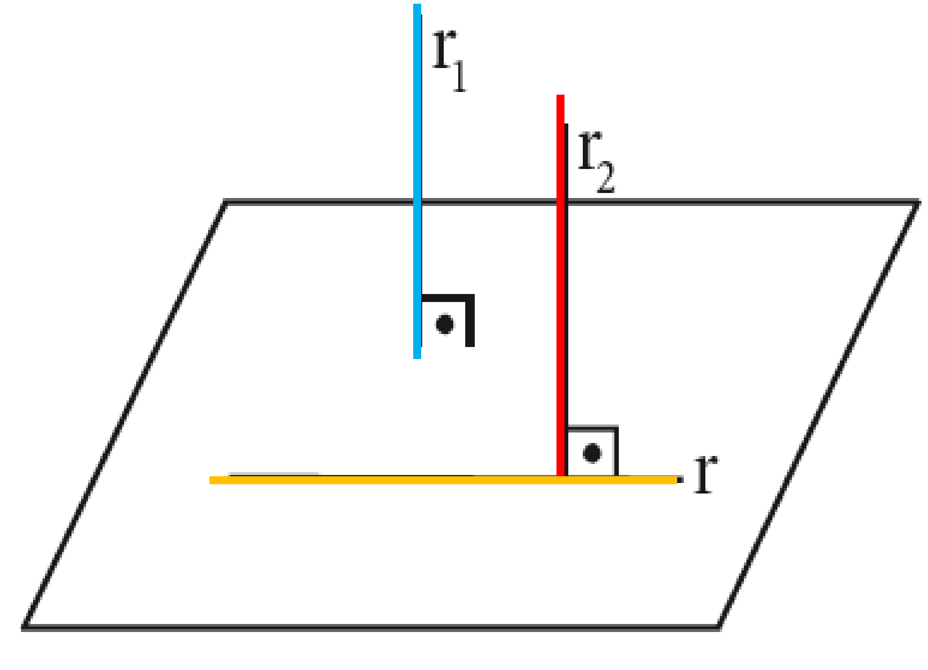


Figura 5.10

Reta ortogonais

Duas retas ortogonais podem ser reversas ou concorrentes.

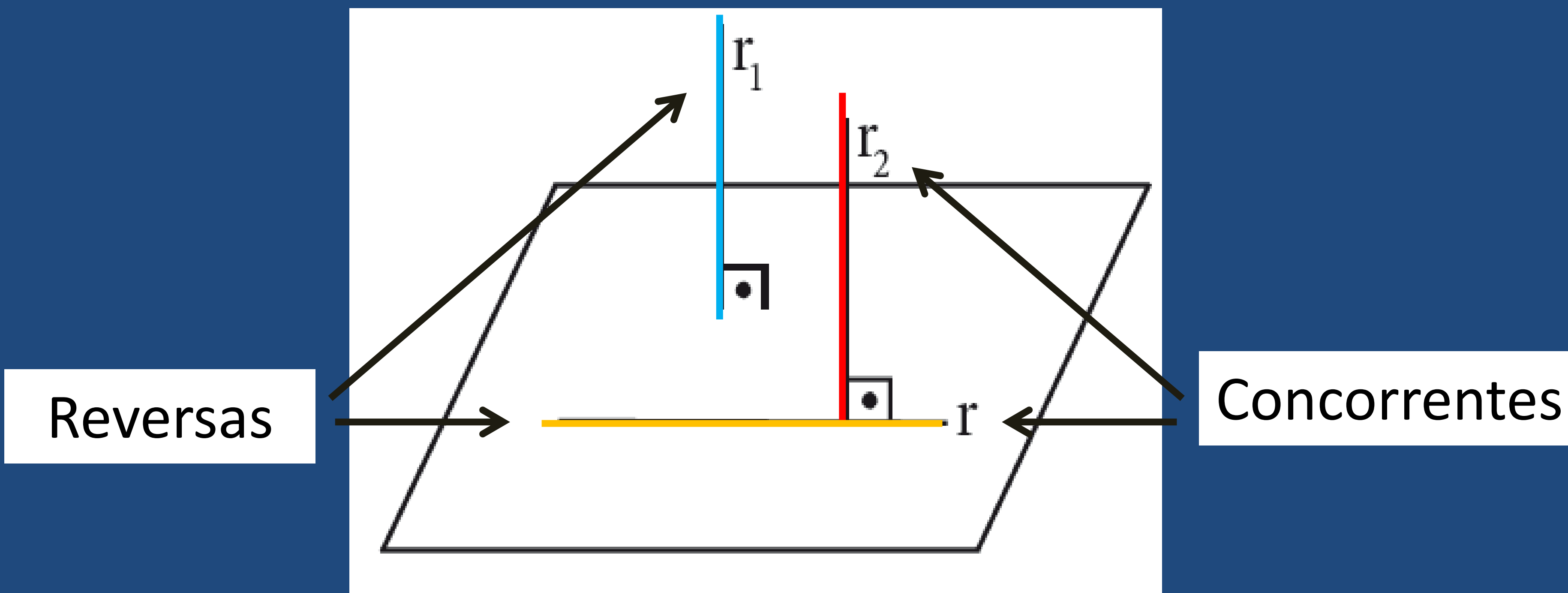


Figura 5.10

Exemplo 1

Verificar se as retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ são ortogonais.

$$r_1: \begin{cases} y = -2x + 1 \\ z = 4x \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$$

Reta ortogonal a duas retas

Sejam as retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$, não paralelas, com a direção de $\overrightarrow{\boldsymbol{v_1}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}$.

Uma reta $\boldsymbol{r}$ com direção do vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ será ortogonal a estas retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ se, simultaneamente:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} &= 0 \\ \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v_1}} \times \overrightarrow{\boldsymbol{v_2}}$$

Exemplo 2

Determinar as equações paramétricas da reta $\boldsymbol{r}$ que passa pelo ponto $\boldsymbol{A(3,4,-1)}$ e é ortogonal as retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$.

$$r_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 5 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Intersecção de duas retas

Sejam as retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ definidas pelas equações:

$$r_1: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = x_2 + dh \\ y = y_2 + eh \\ z = z_2 + fh \end{cases}$$

- Se existe um ponto comum $\mathrm{I}(x, y, z)$ entre as duas retas, as coordenadas verificam as equações de $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$.
- A intersecção das duas retas pode ser encontrada igualando-se suas equações.

Exemplo 3

Determinar caso exista o ponto de intersecção das duas retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$.

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 1 + 2h \\ z = 2 - h \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -3 - 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Intersecção de duas retas

Retas coplanares: se interceptam ou são paralelas;

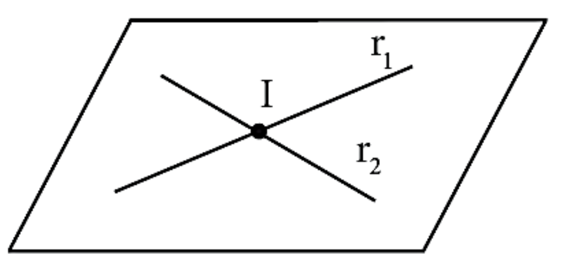


Figura 5.11

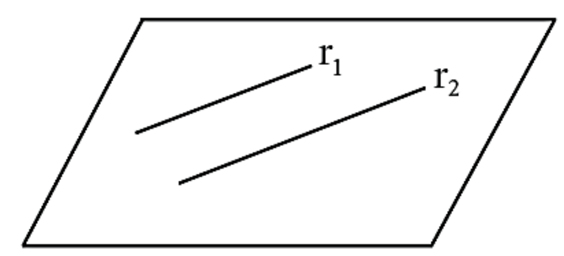


Figura 5.12

Retas não coplanares: são chamadas de retas reversas.

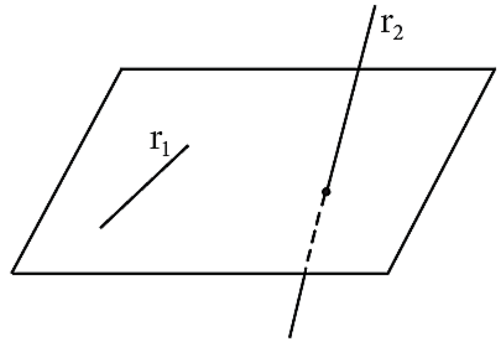


Figura 5.13

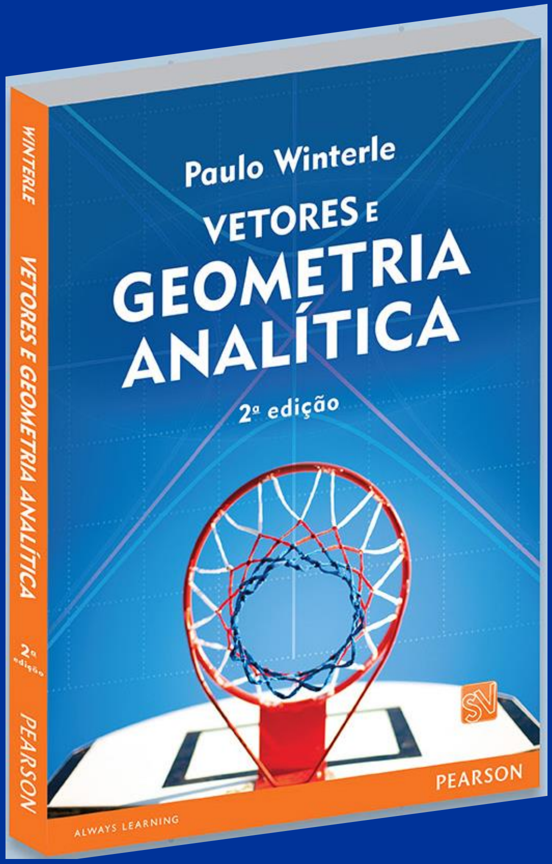
Exercícios em classe 1

Determinar caso exista o ponto de interseção das duas retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$. Se não existe, determinar se essas retas são paralelas ou concorrentes.

(b) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = -t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ Resp.: $I \nexists$

(c) $r_1: \begin{cases} y = -3x + 2 \\ z = 2x - 5 \end{cases}$ $\quad r_2: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-6} = \dfrac{z}{4}$ Resp.: $I \nexists$

Bibliografia



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.