Prática 3 – Gráficos de funções potência e exponencial

Laboratório de Física I

1º semestre 2022

Prof. Dr. Henrique A. M. Faria

Funções quadráticas do tipo $\boldsymbol{y = Ax^2}$

prof. Henrique Faria

Funções do tipo $y = Ax^2$

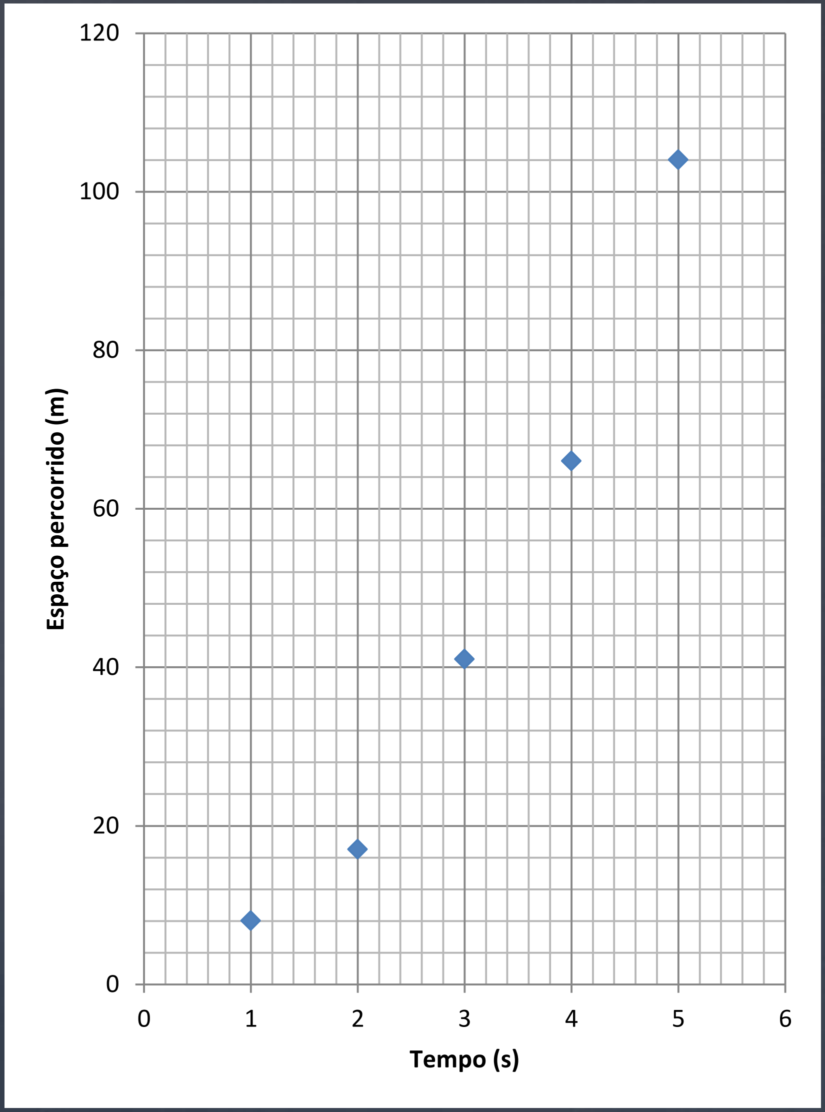
- Por exemplo movimento retilíneo uniforme variado, partindo do repouso.

$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5

$$S = S_0 + \frac{a}{2}t^2$$

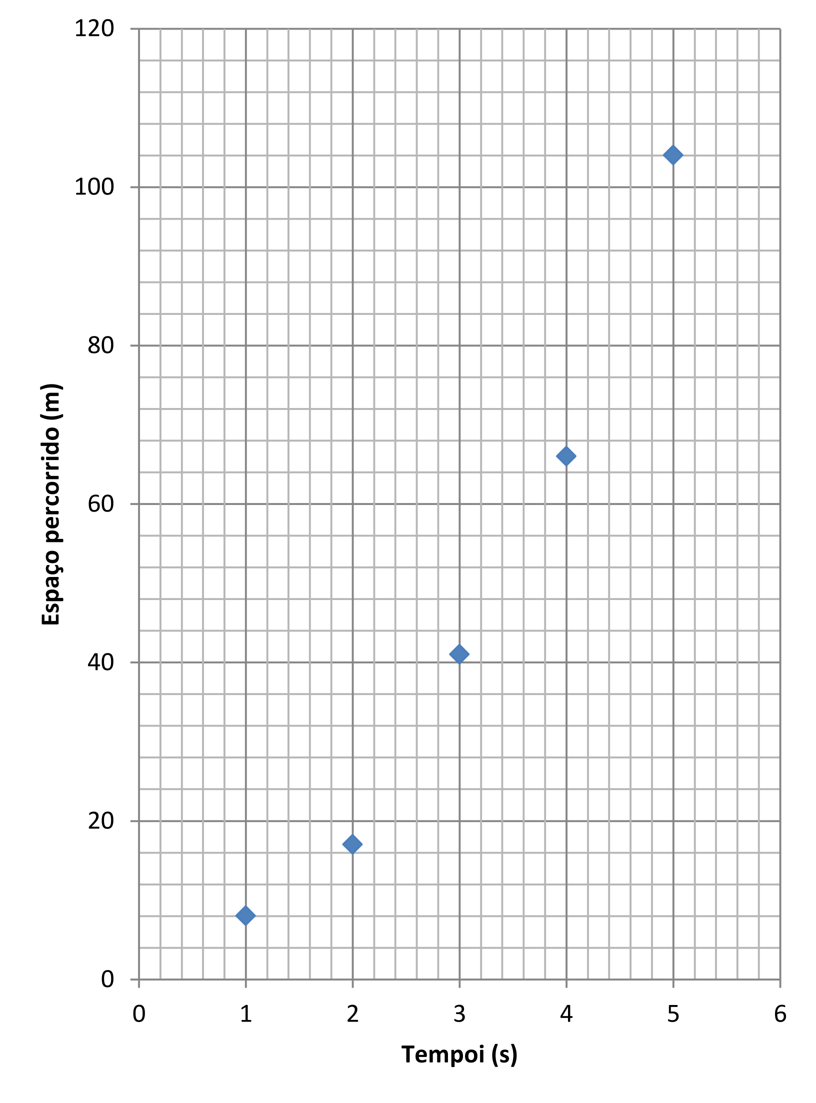
- Inicialmente plotamos os pontos em um papel milimetrado.
- Contudo, não obtemos um comportamento linear.
- Podemos linearizar a função para obter um uma relação funcional que forneça uma reta.

Funções do tipo $y = Ax^2$



$$S = S_0 + \frac{a}{2}t^2$$

Funções do tipo $y = Ax^2$



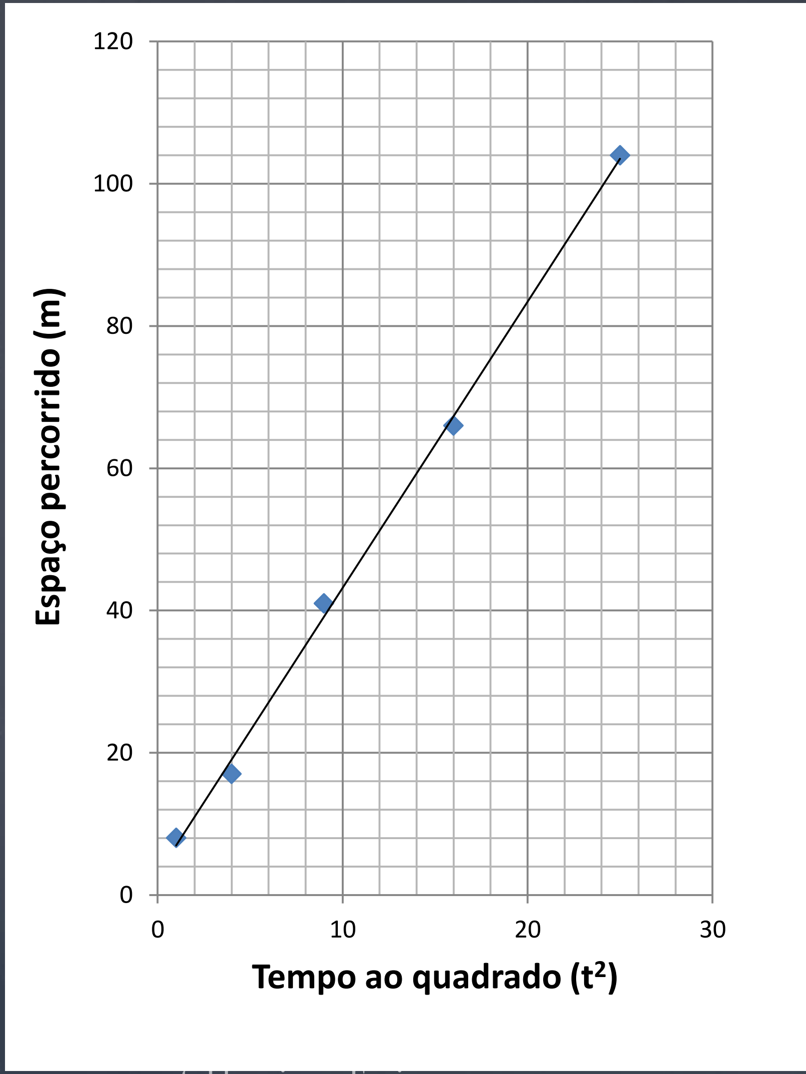
$$S = S_0 + \frac{a}{2}t^2$$

Linearização

- Gráfico S *versus* t^2

$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5
t^2	1	4	9	16	25

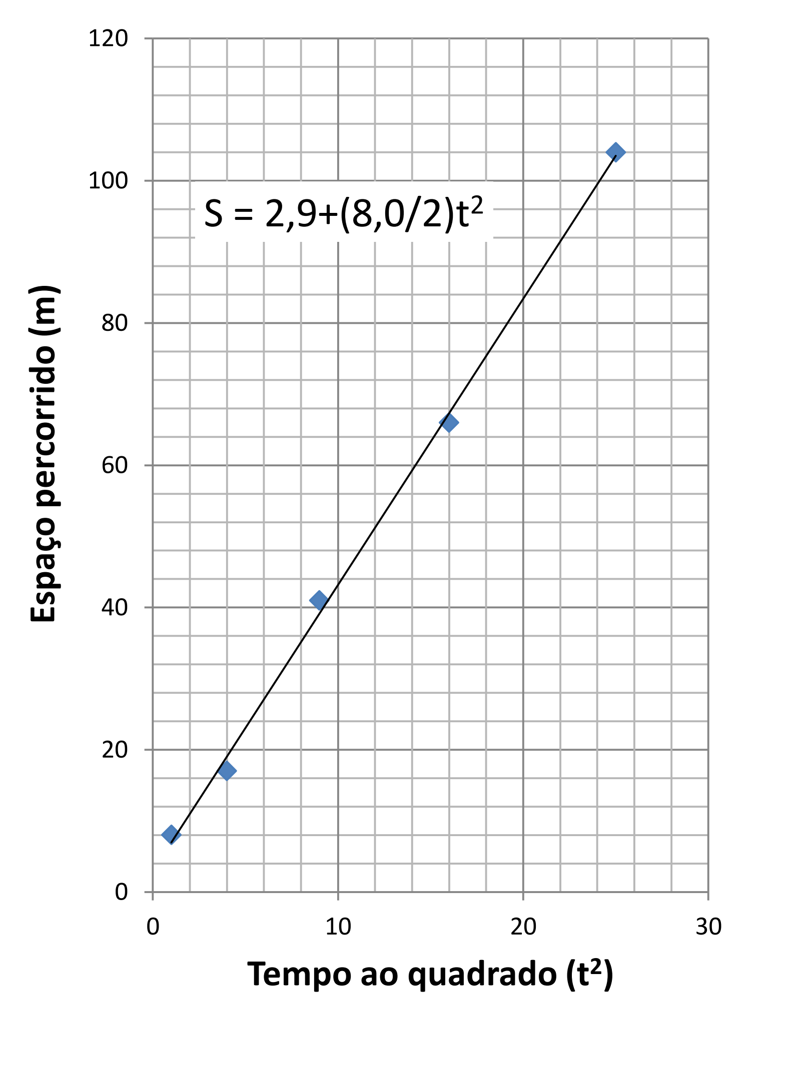
Funções do tipo $y = Ax^2$



$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5
t^2	1	4	9	16	25

prof. Henrique Faria

Funções do tipo $y = Ax^2$



$S(m)$	8	17	41	66	104
$t(s)$	1	2	3	4	5
t^2	1	4	9	16	25

$$a = \frac{\Delta S}{\Delta t^2} = 4{,}0$$

$$b = 2{,}9\ (do\ gráfico)$$

$$S = 2{,}9 + \frac{8{,}0}{2} t^2$$

Funções do tipo

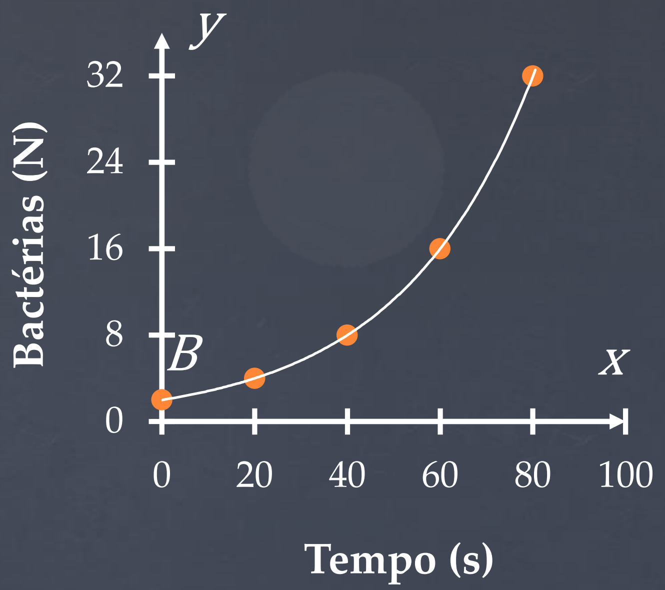
$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{n}}$ e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\mathrm{hn}}$

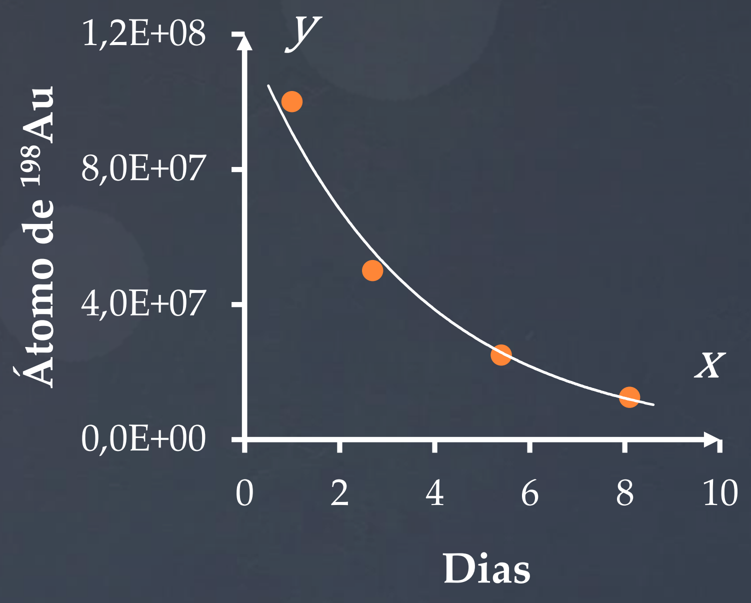
Gráficos em Escala logarítmica Mono-log e Di-log

prof. Henrique Faria

Decaimento e crescimento exponencial ($y = A e^{hn}$)

Ao construirmos um gráfico na escala linear poderemos obter um dos comportamentos:

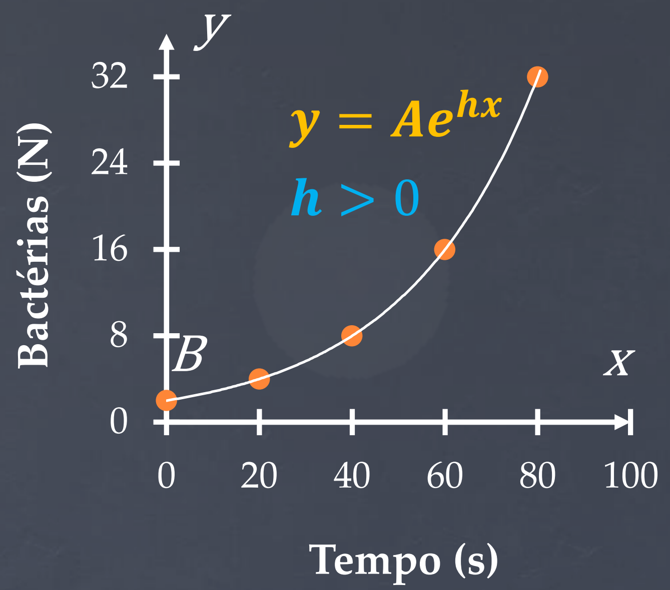


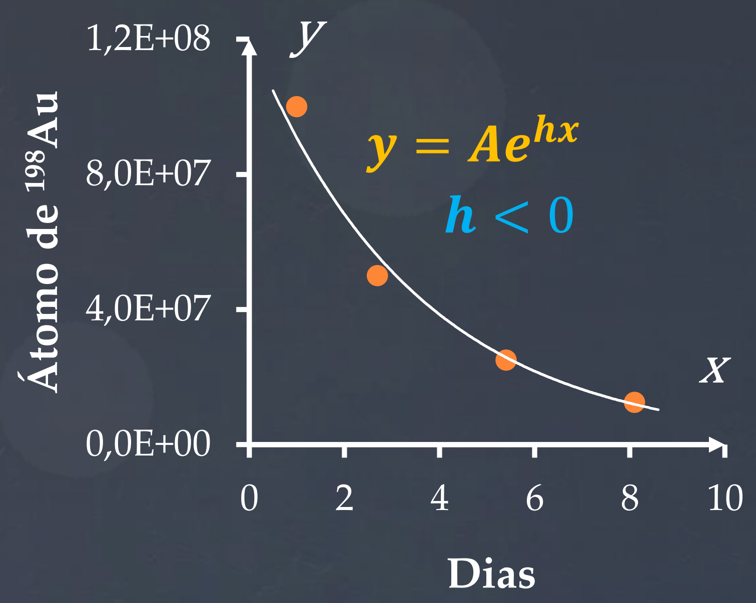


Crescimento

Decrescimento

Decaimento e crescimento exponencial





$\boldsymbol{y}$: variável dependente; $\boldsymbol{x}$: variável independente; $\boldsymbol{h}$: $constante$

$\boldsymbol{A}$: contante (interseção de y em $x = 0$); e: 2,71 … (base do ln)

Exemplo

Um organismo unicelular se reproduz por divisão binária a uma taxa constante. Se inicialmente há duas bactérias e cada uma se divide em duas a cada 20 minutos teremos a seguinte taxa de crescimento:

Número de bactérias (*N*)	2	4	8	16	32
Tempo *t* (minutos)	0	20	40	60	80

a) Determinar, a partir do gráfico de *N* versus ***t***, uma relação funcional entre as grandezas;

b) Calcular o número de bactérias em ***t*** = 2h (não medida).

a) Gráfico na escala linear do crescimento de bactérias no tempo.

Ao utilizar as cinco primeiras etapas descritas no exemplo da coluna de destilação obtemos o gráfico:

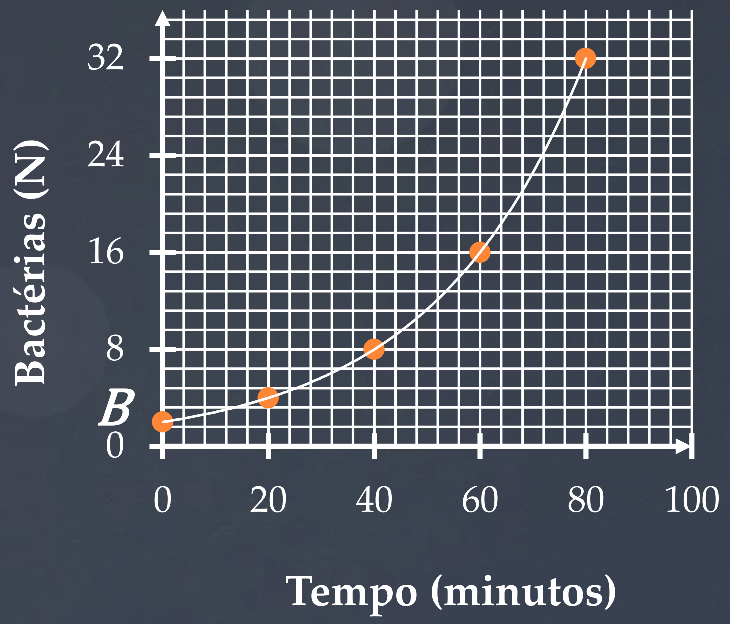
Gráfico linear

Poderá ser feito em papel milimetrado ou em softwares para traçar gráficos.

Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$N = Ae^{ht} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ \ldots$$



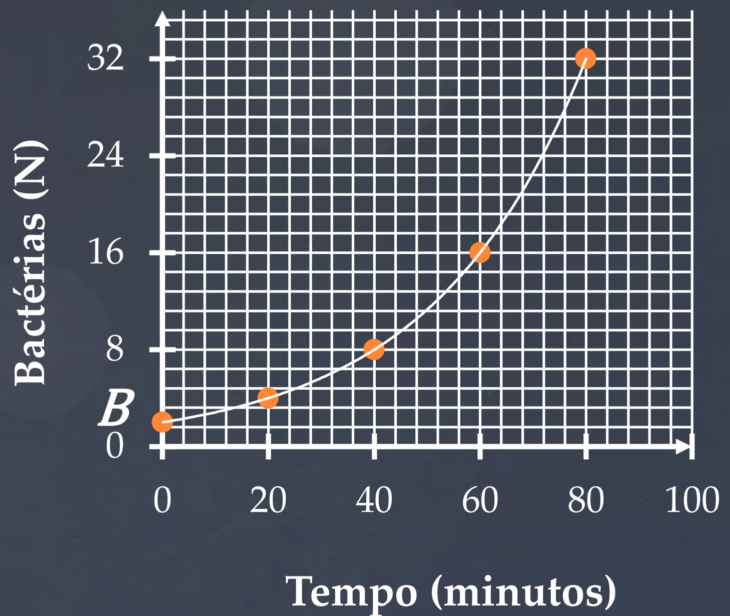
Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{ht}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$



prof. Henrique Faria

Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

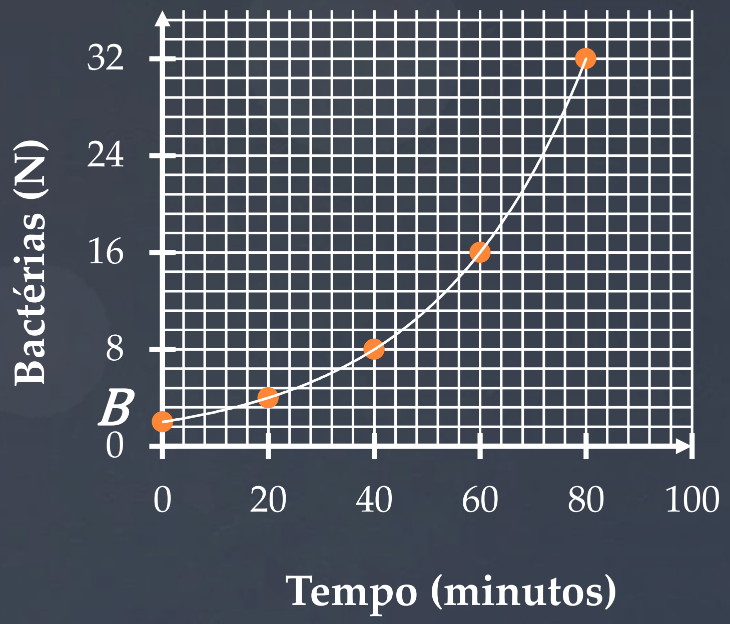
$$\boldsymbol{N = Ae^{ht}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ \ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

Para encontrar o parâmetro ***h***

devemos linearizar a função:



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{ht}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$

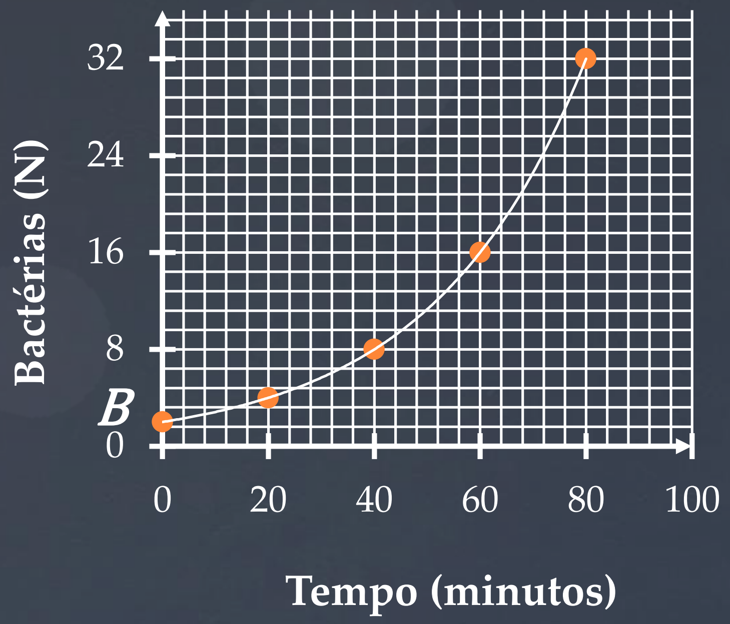
Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

*Para encontrar o parâmetro **h***

devemos linearizar a função:

$$logN = logAe^{ht}$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{ht}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ \ldots$$

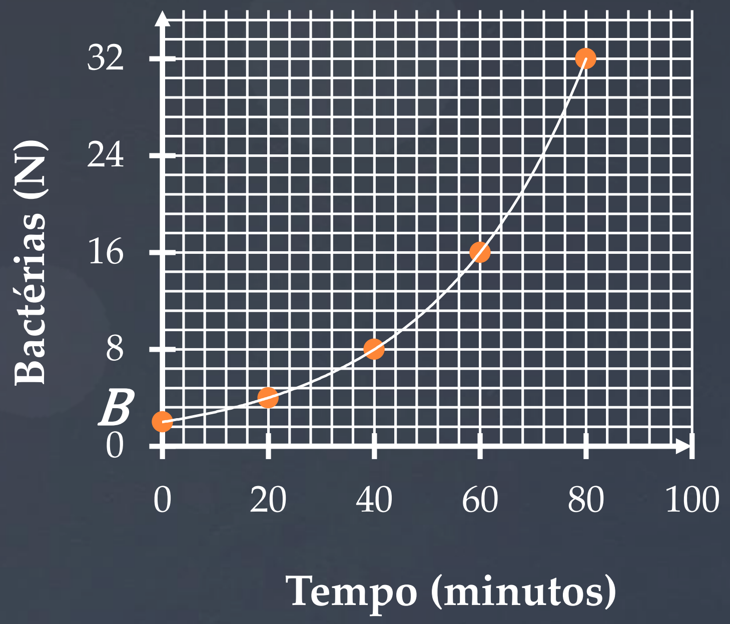
Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

Para encontrar o parâmetro ***h*** *devemos linearizar a função:*

$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{at}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$

Determinação de A:

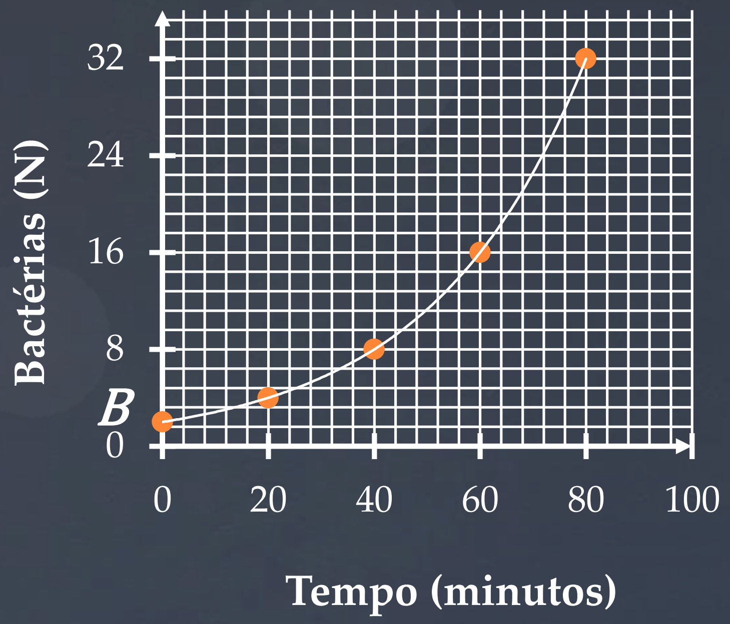
$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

*Para encontrar o parâmetro **h** devemos linearizar a função:*

$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$

$$logN = logA + h.t.loge$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{at}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

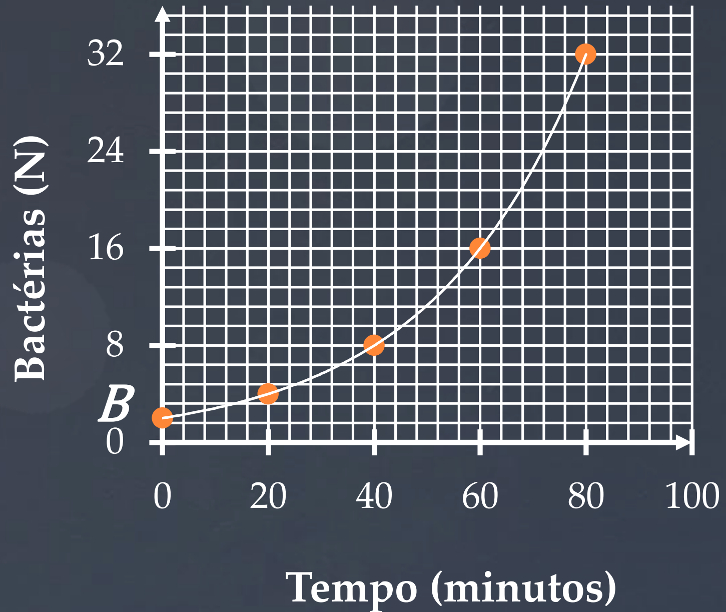
*Para encontrar o parâmetro **h** devemos linearizar a função:*

$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$

$$logN = logA + h.t.loge$$

$$logN = logA + (h.loge)t$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{at}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ \ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

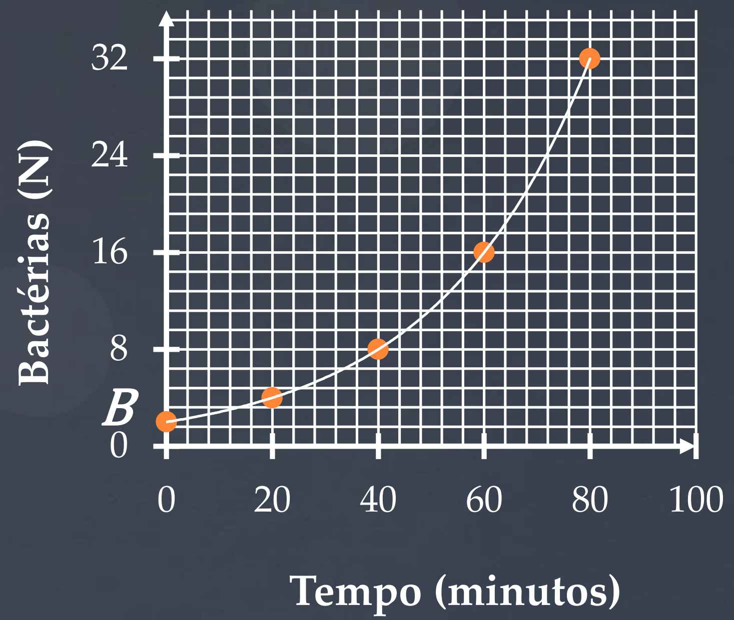
Para encontrar o parâmetro ***h*** *devemos linearizar a função:*

$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$

$$logN = logA + h.t.loge$$

$$logN = logA + (h.loge)t$$



Relação funcional

O comportamento indica um crescimento exponencial das bactérias no tempo. Então, a função terá a forma:

$$\boldsymbol{N = Ae^{at}} \qquad sendo\ e = 2{,}71\ldots$$

Determinação de A:

$$Se\ \boldsymbol{t = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N = A = 2}$$

*Para encontrar o parâmetro **h** devemos linearizar a função:*

$$logN = logAe^{ht}$$

$$logN = logA + loge^{ht}$$

$$logN = logA + h.t.loge$$

$$logN = logA + (h.loge)t$$

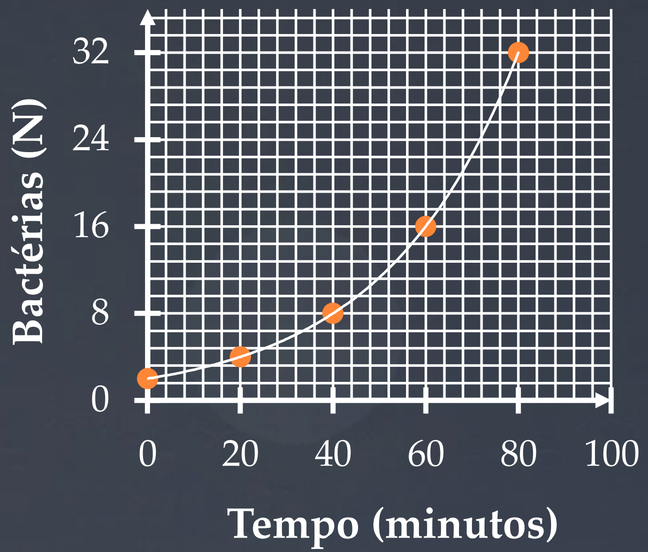
$$(\ y = b + mx\ )$$

prof. Henrique Faria

***Em consequência*:**

$$\boldsymbol{m = h.\log e}$$

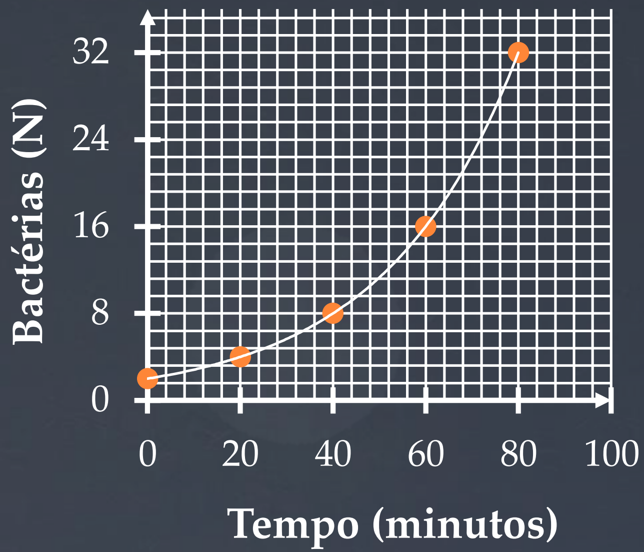
A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o ***log*** somente na variável dependente (*N*).

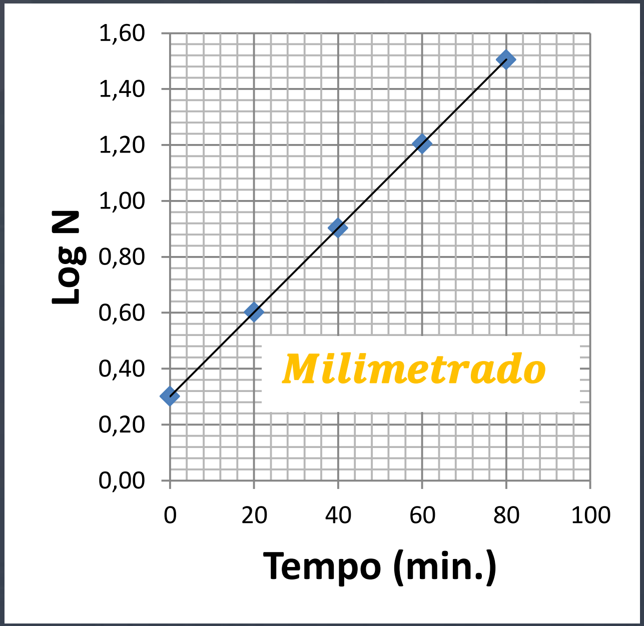


Em consequência:

$$\boldsymbol{m = h.\log e}$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o ***log*** somente na variável dependente (*N*).





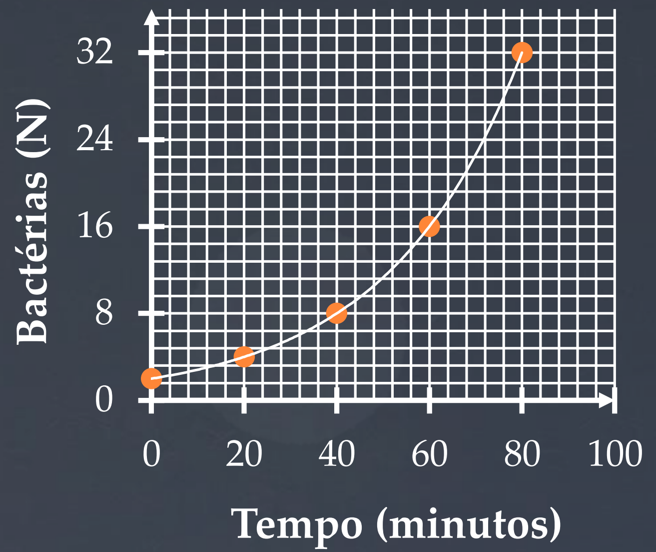
Em consequência:

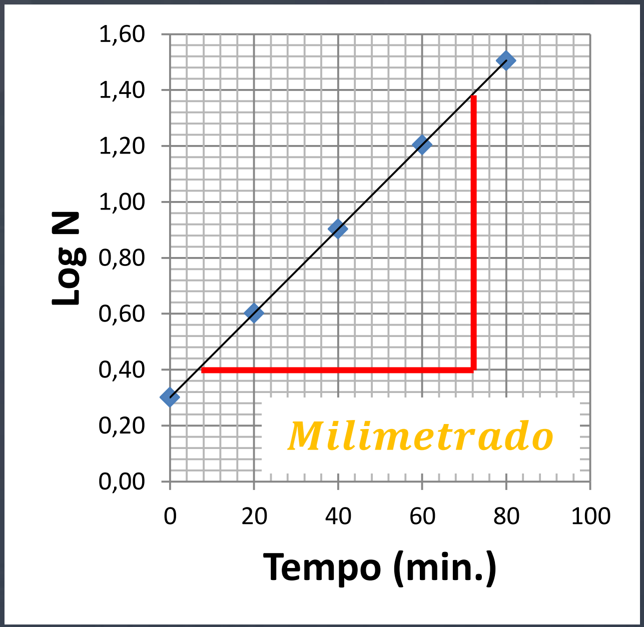
$$m = h.\log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o ***log*** somente na variável dependente (N).

A inclinação $\boldsymbol{m}$ será então:

$$m = \frac{1{,}36 - 0{,}40}{72 - 8} = 0{,}015$$





Em consequência:

$$m = h.\log e$$

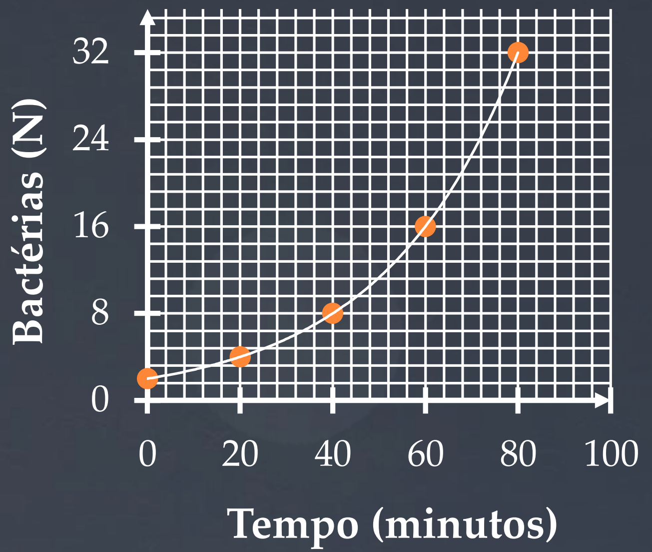
A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o ***log*** somente na variável dependente (*N*).

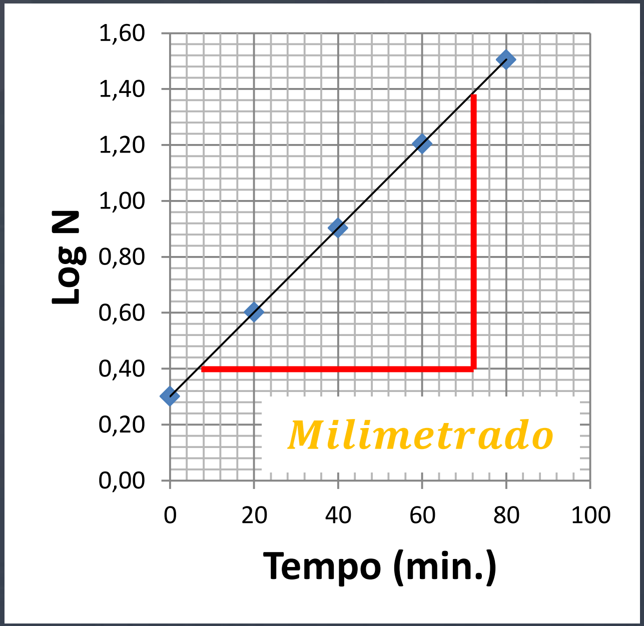
A inclinação $\boldsymbol{m}$ será então:

$$m = \frac{1{,}36 - 0{,}40}{72 - 8} = 0{,}015$$

Então calcula-se o coeficiente ***h***:

$$h = \frac{m}{\log e} = \frac{0{,}015}{\log 2{,}71} = 0{,}035$$





***Em consequência*:**

$$m = h.\log e$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o *log* somente na variável dependente (*N*).

A inclinação m será então:

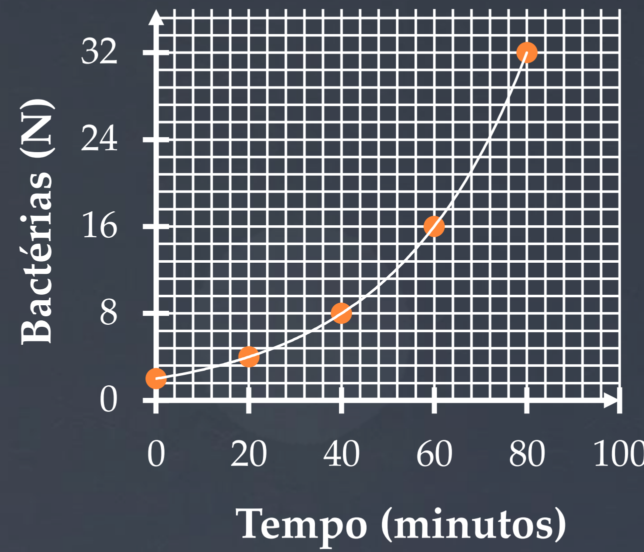
$$m = \frac{1{,}36-0{,}40}{72-8} = 0,015$$

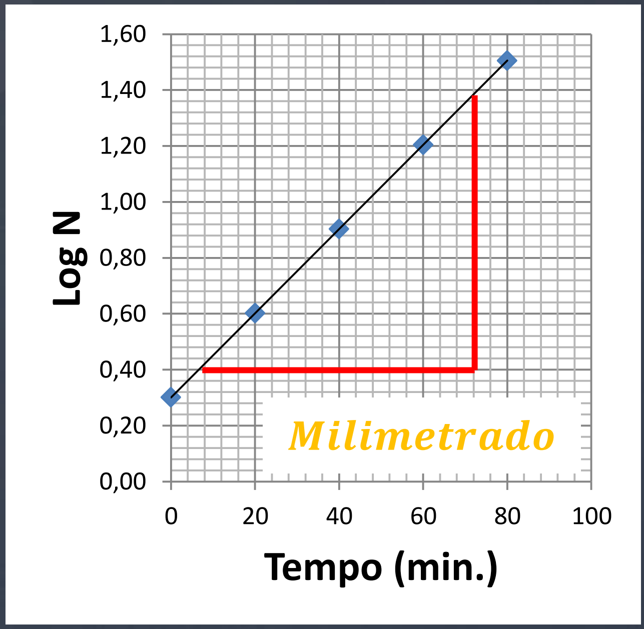
Então calcula-se o coeficiente *h*:

$$h = \frac{m}{\log e} = \frac{0{,}015}{\log 2{,}71} = 0,035$$

A relação funcional será:

$$N = 2e^{0{,}035.t}$$





Em consequência:

$$m = h.loge$$

A escala de tempo é linear e o novo gráfico é obtido aplicando-se o ***log*** somente na variável dependente (N).

A inclinação $\boldsymbol{m}$ será então:

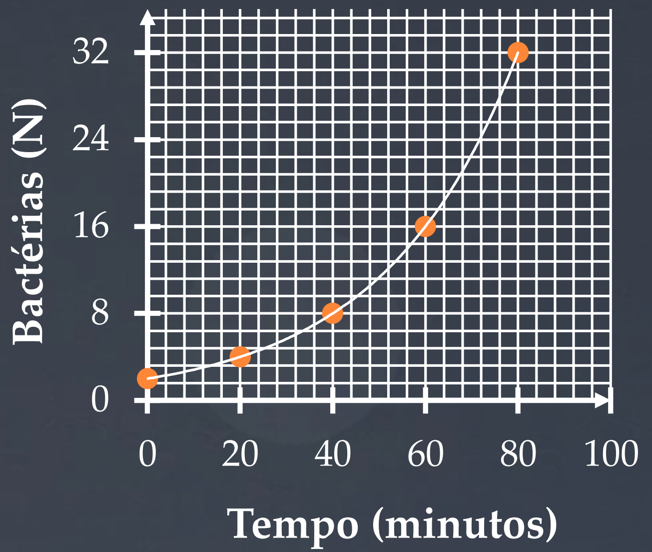
$$m = \frac{1{,}36-0{,}40}{72-8} = 0,015$$

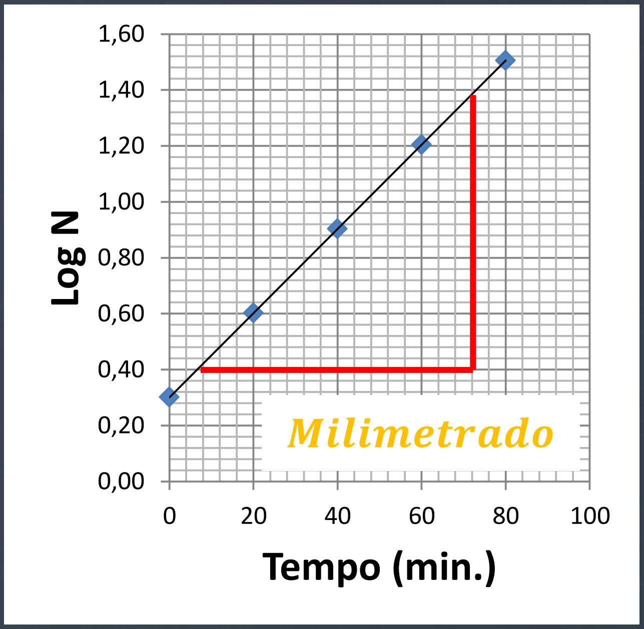
Então calcula-se o coeficiente $\boldsymbol{h}$:

$$h = \frac{m}{loge} = \frac{0{,}015}{log2{,}71} = 0,035$$

A relação funcional será:

$$N = 2e^{0{,}035.t}$$





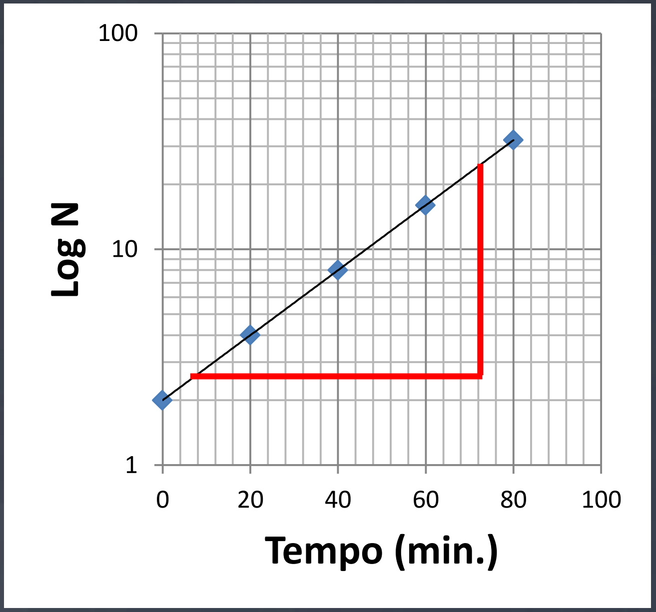
b) $Em\ t = 120\ \text{min}$ $\quad N = 128\ Bactérias$

Segunda opção papel Mono-log

$$\boldsymbol{m = h.\,loge}$$

A inclinação $\boldsymbol{m}$ será então:

$$\boldsymbol{m = \frac{log25 - log2{,}5}{72-8} = 0,015}$$

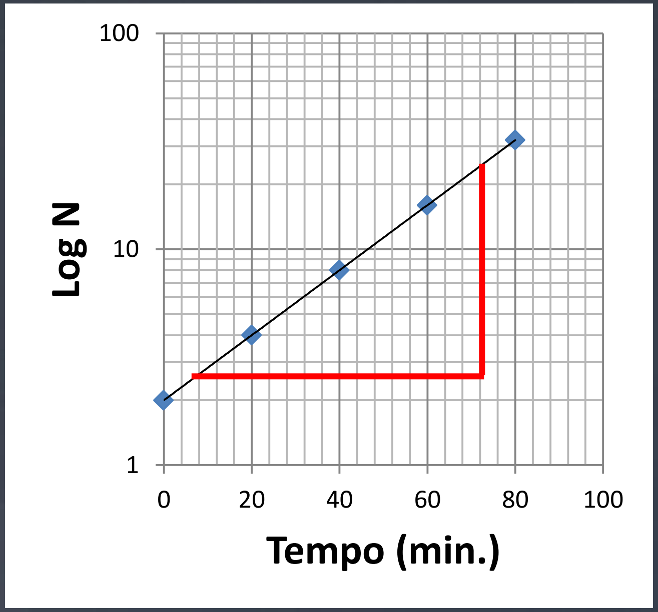


Segunda opção papel Mono-log

$$\boldsymbol{m = h.\log e}$$

A inclinação $\boldsymbol{m}$ será então:

$$\boldsymbol{m = \frac{\log 25 - \log 2{,}5}{72-8} = 0,015}$$



Então calcula-se o coeficiente $\boldsymbol{h}$:

$$\boldsymbol{h = \frac{m}{\log e} = \frac{0{,}015}{\log 2{,}71} = 0,035}$$

A relação funcional será:

$$\boldsymbol{N = 2e^{0{,}035.t}}$$

Funções do tipo $y = Ax^n$

Relação funcional

$$Y = Ax^n$$

Linearização da função:

$$logY = log\mathbf{Ax^n}$$

$$logN = logA + log\mathbf{x^n}$$

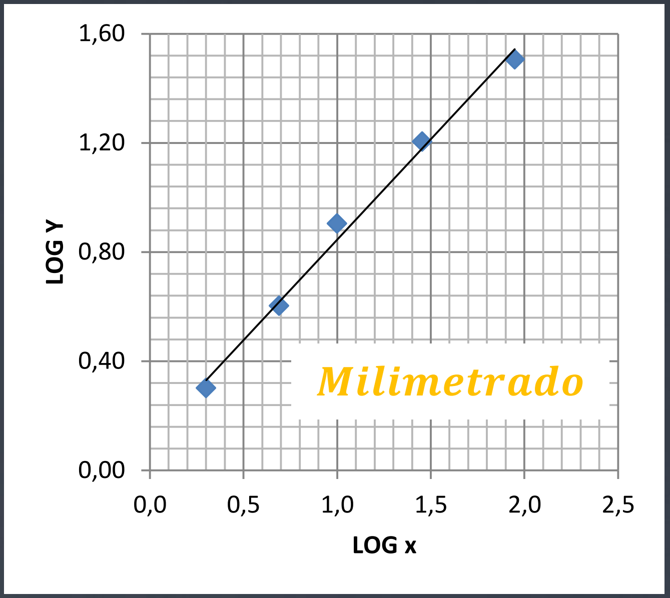
$$logN = logA + nlogx$$

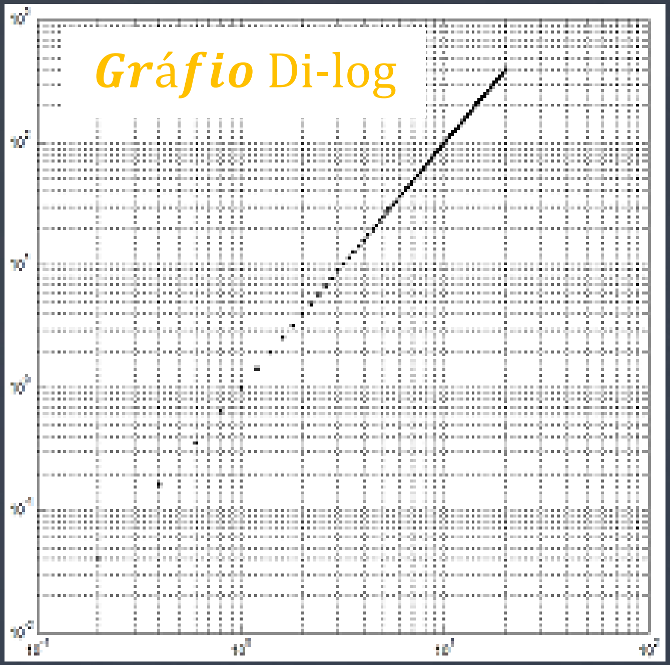
$$(\ y \ = \ b \ + \ nx\ )$$

Coeficiente angular a(n) e b serão:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta Y}{\Delta x} = \frac{\mathbf{logY_1 - logY_2}}{\mathbf{logx_1 - logx_2}}$$

b: *substituir dois valores da reta na relação funcional.*





prof. Henrique Faria

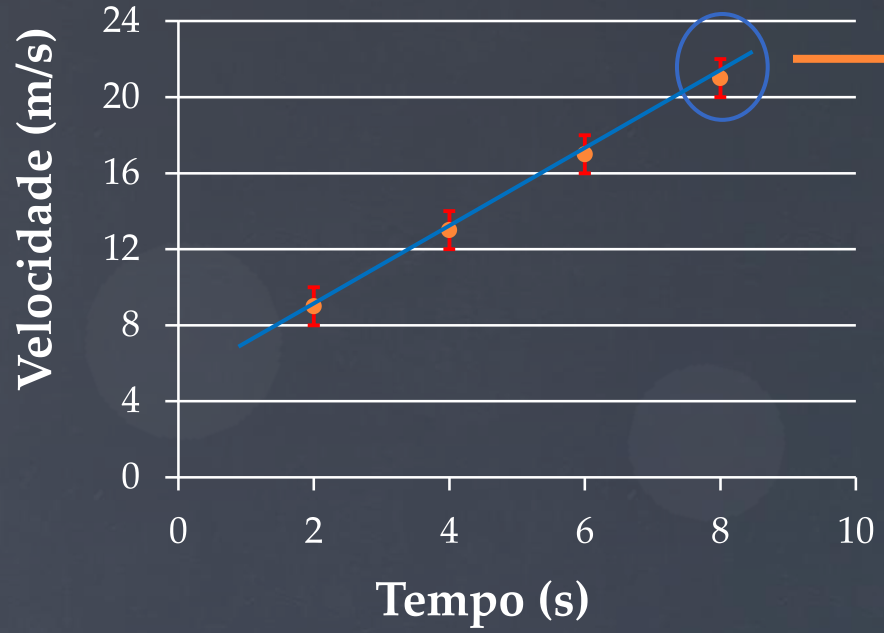
Representação de incertezas em gráficos

- Exemplo da velocidade de um corpo no tempo;
- Foram tomadas três medidas de velocidade que resultaram em um valor mais provável e uma incerteza;

v (m/s)	9 ± 1	13 ± 1	17 ± 1	21 ± 1
t (s)	2	4	6	8

- Representar o gráfico da velocidade em função do tempo com as incertezas nas ordenadas (v).

Gráfico linear da velocidade no tempo

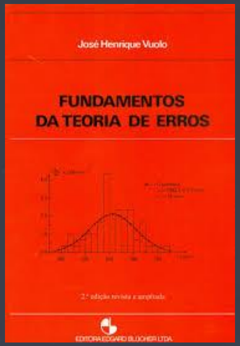


v = (21 ± 1) m/s

A reta de ajuste obtida pelo método dos mínimos quadrados (MMQ) considera as barras de incertezas.

Referências

1. VUOLO, J. H.; Fundamentos da Teoria de Erros. 2nd ed., São Paulo: Edgar Blücher Ltda., 1996.



prof. Henrique Faria