

Geometria Analítica

Engenharias

Semana 04 – Aula 1

Produto vetorial

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

Propriedade (a): permutação de linhas inverte o sinal

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (-4) \times 2 = 23$$

Propriedade (a): permutação de linhas inverte o sinal

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4) \times 2 - (3) \times 5 = -23$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 6 - 3 \times 2 = 0$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \times 0 - 0 \times 7 = 0$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

- - - + + +

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = a(y_1z_2) + b(x_2z_1) + c(x_1y_2) \\ -c(x_2y_1) - a(y_2z_1) - b(x_1z_2)$$

Definição de produto Vetorial

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

- Expresso pela forma: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$;
- O resultado é um terceiro vetor, ortogonal a \vec{u} e \vec{v} ;
- Para calculá-lo utiliza-se o determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \text{VETOR}$$

Exemplo 1

Sejam $\vec{u} = (5, 4, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} =$$

Exercícios

Sejam $\vec{u} = (3, -1, -2)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, 1)$

1) $\vec{u} \times \vec{u}$

2) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$

3) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$

4) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

5) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Dispositivo prático para o cálculo

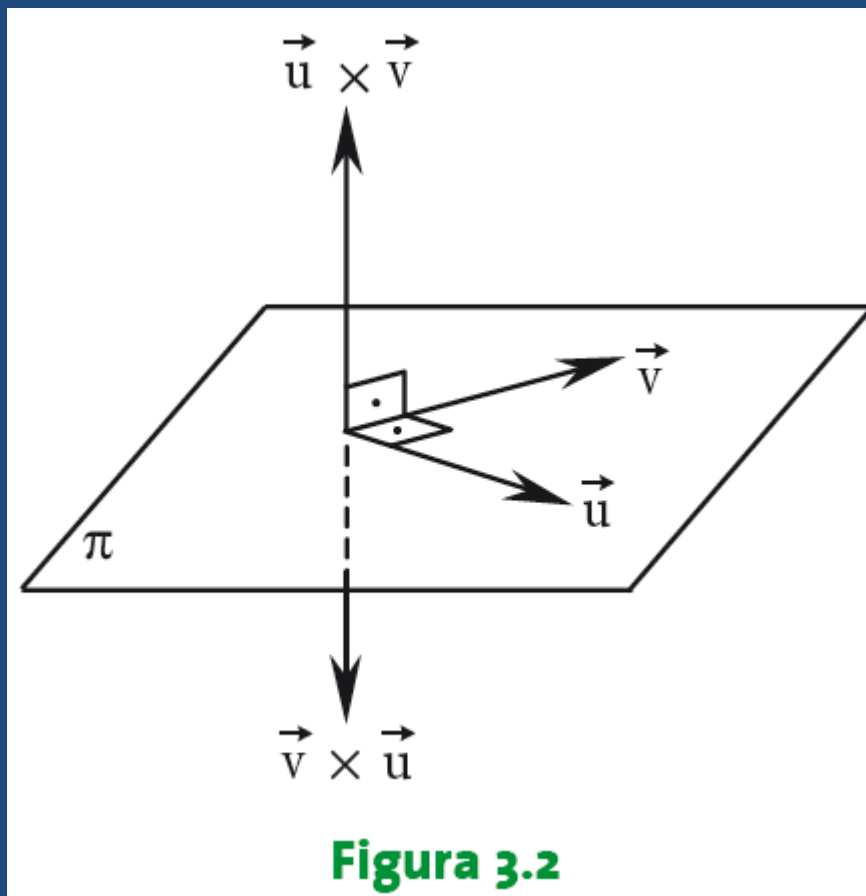
Sejam $\vec{u} = (5, 4, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{matrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (4, -2, -4)$$

As três componentes de $\vec{u} \times \vec{v}$ são dadas pelos três determinantes da coordenadas dos dois vetores.

Característica do produto vetorial



- O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortotogonal a \vec{u} e \vec{v} .
- O comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{sen}\theta$

Regra da mão direita

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido pela regra da mão direita.

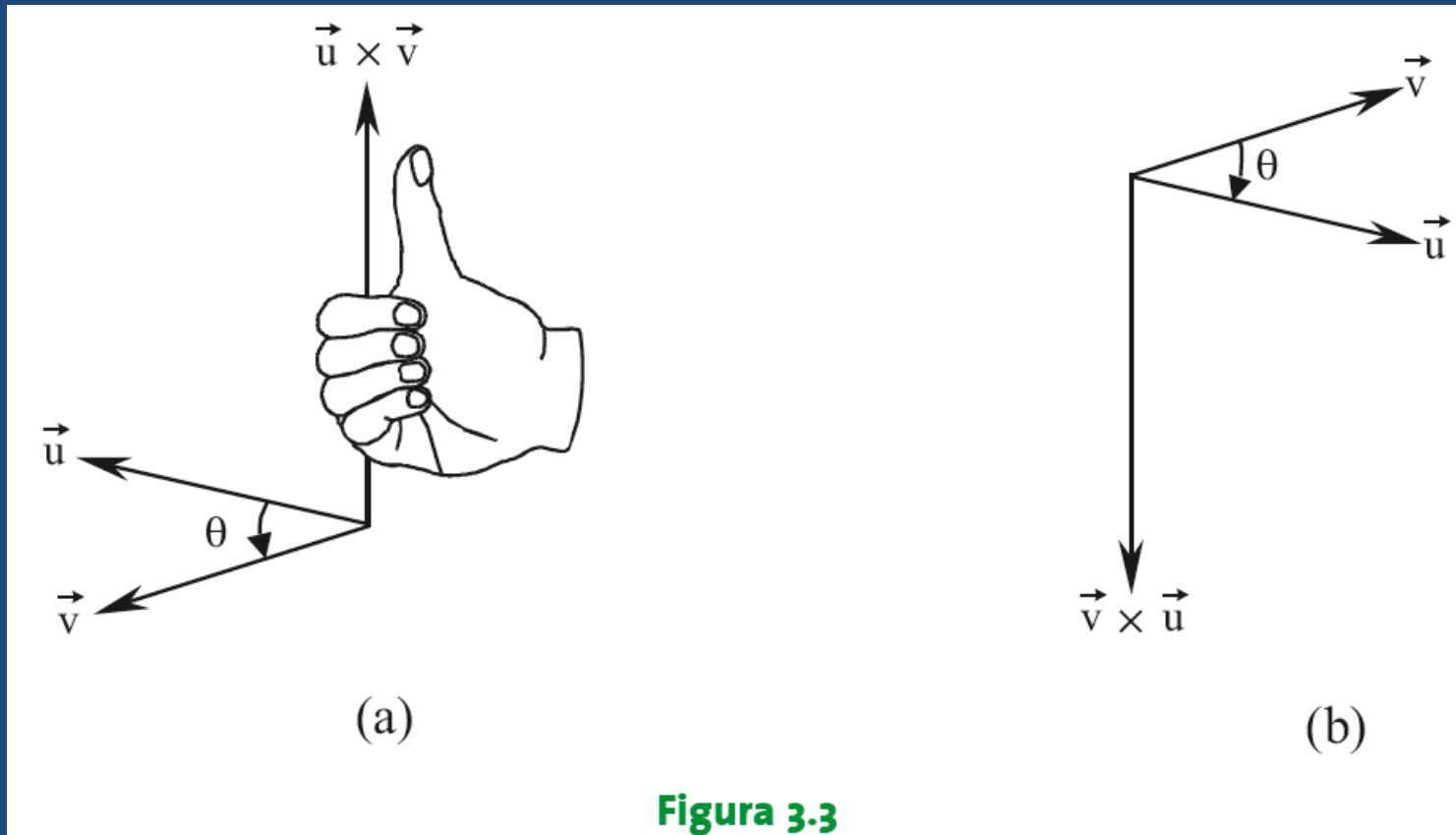
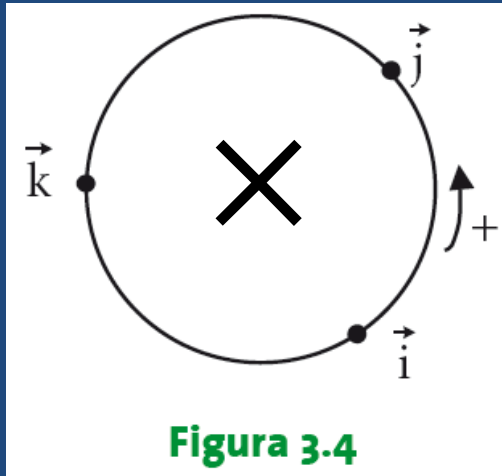


Figura 3.3

Prof. Henrique A M Faria

Regra para os vetores da base

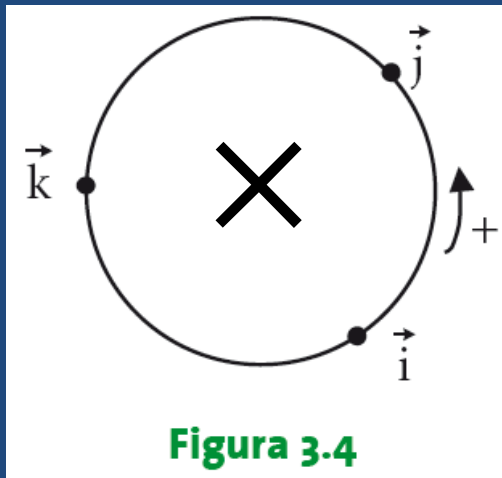


$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

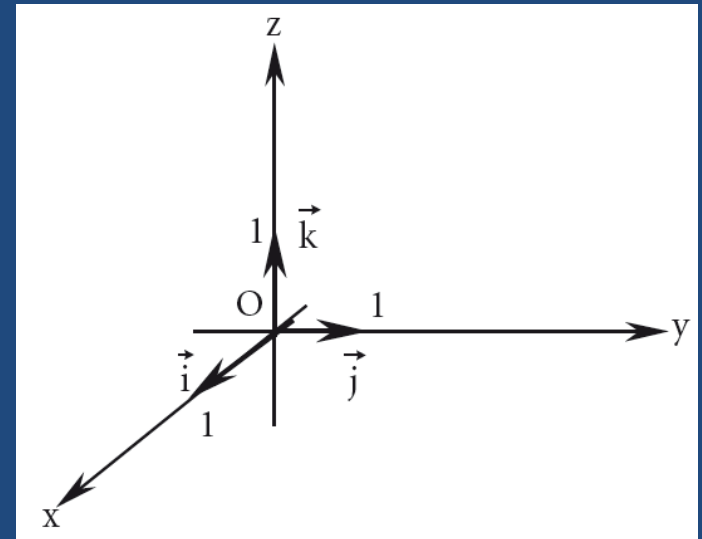
Regra para os vetores da base



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



Exemplo 2

Determine o vetor \vec{x} ortogonal ao eixo y de maneira que $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$, sendo: $\vec{u} = (1, 1, -1)$, $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

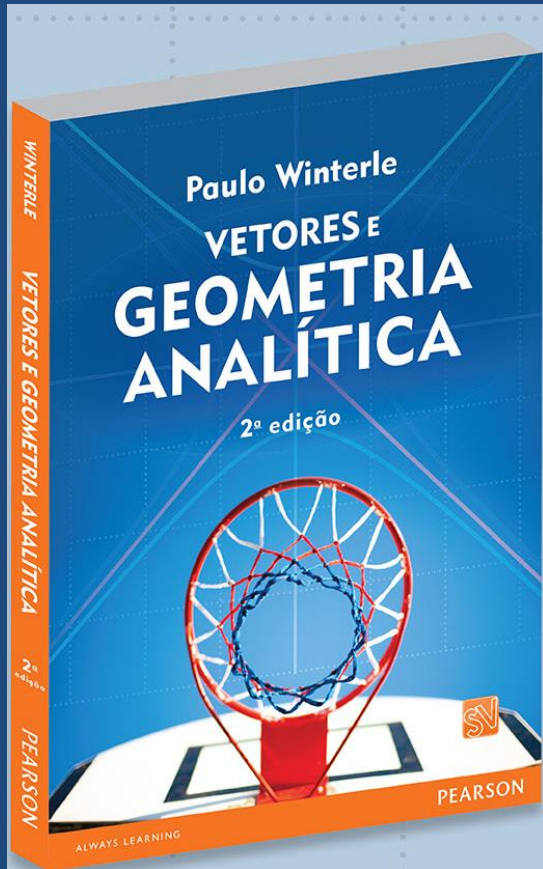
Para depois da aula

- Rer ler o capítulo 3 do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios.

Próxima aula

- Interpretação geométrica do produto vetorial e produto misto.

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato



profhenrique.com



henrique.faria@unesp.br